

MÁQUINAS Y MECANISMOS

Cuarta edición

David H. Myszka

PEARSON

MÁQUINAS Y MECANISMOS

Cuarta edición

David H. Myszka

University of Dayton

Traducción

Antonio Enríquez Brito

Traductor especialista en ingeniería mecánica

Revisión técnica

Sergio Saldaña Sánchez

Ángel Hernández Fernández

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Unidad Profesional Zacatenco

Instituto Politécnico Nacional

México

Horacio Ahuett Garza

Departamento de Ingeniería Mecánica

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

México



Datos de catalogación bibliográfica

MYSZKA, DAVID H.

Máquinas y mecanismos.
Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1215-1
Área: Ingeniería

Formato: 21 · 27 cm Páginas: 384

Edición en español
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editor sponsor: Luis M. Cruz Castillo
luis.cruz@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández
Gerencia editorial
Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

CUARTA EDICIÓN, 2012

ISBN: 978-607-32-1215-1
ISBN e-book: 978-607-32-1216-8
ISBN e-chapter: 978-607-32-1217-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12



www.pearsonenespañol.com

ISBN: 978-607-32-1215-1

PREFACIO

El propósito de este libro es ofrecer las técnicas necesarias para estudiar el movimiento de las máquinas. El texto se enfoca en la aplicación de teorías cinemáticas a maquinaria del mundo real. Además, intenta cerrar la brecha entre el estudio teórico de la cinemática y la aplicación a mecanismos prácticos. Los estudiantes que terminen un curso basado en este libro serán capaces de determinar las características del movimiento de una máquina. Los temas que se presentan en esta obra son fundamentales en el proceso de diseño de máquinas, en tanto que deberían realizarse análisis con base en conceptos de diseño para optimizar el movimiento de una máquina.

Esta cuarta edición incorpora buena parte de la retroalimentación recibida de los profesores y estudiantes que usaron las tres primeras ediciones. Entre las mejoras que incluye esta edición destacan las siguientes: una sección introductoria a los mecanismos de propósitos especiales; ampliación de las descripciones de las propiedades cinemáticas, para definirlas con mayor precisión; identificación clara de las cantidades vectoriales por medio de notación en negritas; gráficas de tiempo; presentación de métodos analítico-sintéticos; tablas que describen el movimiento de seguidores de levas, y una tabla estándar que se utiliza para seleccionar el paso de cadena. Se revisaron los problemas que aparecen al final de cada capítulo y, además, se incluyeron muchos problemas nuevos.

Se espera que los estudiantes que utilicen este libro hayan cursado dibujo técnico, álgebra a nivel universitario y trigonometría. Si bien se mencionan conceptos de cálculo elemental, no se requiere que el estudiante haya cursado cálculo. Asimismo, serán útiles los conocimientos de vectores, mecánica y software de aplicación como hojas de cálculo. Sin embargo, estos conceptos también se explican en el libro.

El enfoque al aplicar desarrollos teóricos a problemas prácticos es consistente con la filosofía de programas de tecnología ingenieril. Este libro se orienta básicamente a los programas relacionados con mecánica y manufactura, y puede utilizarse en programas tanto para licenciatura como para capacitación.

Las siguientes son algunas de las características distintivas de este libro:

1. Ilustraciones y bocetos de máquinas que incluyen los mecanismos que se estudian en el texto.
2. El enfoque se centra en la aplicación de las teorías cinemáticas a los mecanismos comunes y prácticos.
3. En el análisis de los mecanismos se emplean métodos analíticos y técnicas gráficas.
4. Con frecuencia se utilizan ejercicios en Working Model®, un paquete de software dinámico disponible comercialmente (véase la sección 2.3 de la página 32 para consultar mayor información). En el libro se incluyen tutoriales y problemas que utilizan este software.
5. A lo largo de la obra se incluyen e ilustran sugerencias para implementar las técnicas gráficas de sistemas de diseño asistidos por computadora (CAD).
6. Cada capítulo termina, al menos, con un estudio de caso. Cada uno ilustra un mecanismo que se utiliza en equipo industrial, y desafía al estudiante a analizar el fundamento racional detrás del diseño y a sugerir mejoras.
7. Se presentan métodos de análisis de fuerzas de mecanismos estáticos y dinámicos.
8. Después de cada concepto importante se incluye un problema de ejemplo que ilustra su aplicación.
9. Los problemas de ejemplo comienzan con la introducción de una máquina real que depende del mecanismo que se analiza.
10. Numerosos problemas que se presentan al final de los capítulos son consistentes con el enfoque de aplicación del texto. Todos los conceptos introducidos en el capítulo tienen al menos un problema asociado, la mayoría de los cuales incluyen la máquina que depende del mecanismo que se analiza.
11. Siempre que sea pertinente, al final de los capítulos se incluyen problemas que utilizan los métodos analíticos, y que son los más adecuados para dispositivos programables (calculadoras, hojas de cálculo, software de matemáticas, etcétera).

Inicialmente, desarrollé este libro de texto después de impartir el curso de mecanismos durante varios semestres, lo que me permitió constatar que los estudiantes no siempre distinguían las aplicaciones prácticas del material. Para ello, desarrollé un gran énfasis en los problemas de estudio de caso y, de hecho, iniciaba cada clase exponiendo uno. Los estudiantes se referían a ello como el "mecanismo del día". Considero que esto fue una excelente oportunidad para centrar la atención en el funcionamiento de las máquinas; además de que promueve el diálogo y crea una comunidad de aprendizaje en el aula de clases.

Por último, la finalidad de cualquier libro de texto es guiar a los estudiantes a través de una experiencia de aprendizaje de una manera eficaz. Espero sinceramente que este libro cumpla con su intención. Doy la bienvenida a todas las sugerencias y los comentarios que se envíen a dmyszka@udayton.edu.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud a los revisores de este libro por sus comentarios y sugerencias: Dave Brock, Kalamazoo Valley Community College; Laura Calswell, University of Cincinnati; Charles Drake, Ferris State University; Lubambala Kabengela, University of North Carolina at Charlotte; Sung Kim, Piedmont Technical College; Michael J. Rider, Ohio Northern University; and Gerald Weisman, University of Vermont.

Dave Myszka

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN A LOS MECANISMOS Y A LA CINEMÁTICA

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Explicar la necesidad del análisis cinemático de los mecanismos.**
2. **Definir los componentes básicos que integran un mecanismo.**
3. **Elaborar el diagrama cinemático de la vista de una máquina compleja.**
4. **Calcular el número de grados de libertad en un mecanismo.**
5. **Identificar un mecanismo de cuatro barras y clasificarlo de acuerdo con su posible movimiento.**
6. **Identificar un mecanismo de manivela-corredera.**

1.1 INTRODUCCIÓN

Imagine que forma parte de un equipo de diseño y desarrollo. El equipo es responsable del diseño de un sistema de limpiadores para el parabrisas de un automóvil. El vehículo en cuestión es un modelo deportivo con línea aerodinámica y el parabrisas inclinado. Desde luego, el objetivo de este sistema de limpiadores es remover el agua y el polvo del parabrisas, para brindar una visión clara al conductor. Generalmente lo anterior se realiza deslizando un par de limpiadores a través del cristal.

Una de las primeras tareas del diseño consiste en establecer los movimientos adecuados de los limpiadores. Los movimientos deben ser suficientes para garantizar que se limpien las partes críticas del parabrisas. Los rangos de visión de diferentes conductores se determinan mediante estudios estadísticos exhaustivos. Esta información establece las pautas del movimiento requerido de los limpiadores. Se habrán de tomar decisiones importantes sobre si el movimiento de los limpiadores que mejor se ajusta al vehículo es en tándem o en sentido opuesto. Otras decisiones se refieren al tamaño de los ángulos de limpieza del lado del conductor y del lado del pasajero, así como la ubicación de los pivotes. La figura 1.1 muestra el concepto de diseño con un patrón de movimientos opuestos de los limpiadores.

Una vez que se establece el movimiento deseado, se debe configurar el ensamble de los componentes para mover los limpiadores de acuerdo con el patrón elegido. Las actividades posteriores incluyen el análisis de otros aspectos del movimiento como la sincronización y la tendencia a azotarse de los limpiadores. Para tal sistema, al igual que en las máquinas, la comprensión y el análisis del movimiento son indispensables para un funcionamiento adecuado. Estos tipos y análisis del movimiento forman la parte medular de este libro.

Otra tarea importante en el diseño de maquinaria es la determinación del efecto de las fuerzas que actúan sobre la máquina. Tales fuerzas definen el tipo de la fuente de potencia que se requiere para operar la máquina. Las fuerzas también establecen la resistencia requerida de los componentes. El sistema de limpiadores, por ejemplo, debe resistir la fricción que se crea cuando se limpia la savia que cayó sobre el parabrisas, luego de que el automóvil se estacionara debajo de un árbol. Este tipo de análisis de fuerzas es un tema fundamental en la parte final del libro.

1.2 MÁQUINAS Y MECANISMOS

Las *máquinas* son dispositivos que se utilizan al modificar, transmitir y dirigir fuerzas para llevar a cabo un objetivo específico. Una sierra de cadena es una máquina conocida que dirige fuerzas hacia la cadena con la finalidad de cortar madera. Un *mecanismo* es una parte mecánica de una máquina, cuya función

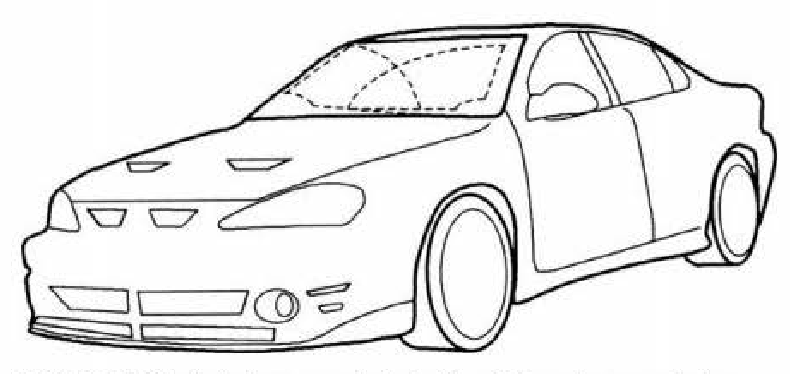


FIGURA 1.1 Movimiento propuesto de los limpiadores de un parabrisas.



FIGURA 1.2 Plataforma de altura ajustable. (Cortesía de Advance Lifts).

es transmitir movimiento y fuerza de una fuente de potencia a una salida. Es el corazón de la máquina. En la sierra de cadena, el mecanismo toma la potencia de un pequeño motor y la suministra en el extremo de corte de la cadena.

La figura 1.2 ilustra una plataforma de altura ajustable que se impulsa con cilindros hidráulicos. Si bien se podría llamar máquina al dispositivo completo, las partes que toman la potencia de los cilindros y elevan y bajan la plataforma son las que integran el mecanismo.

Se consideran como mecanismo las partes rígidas que están configuradas y conectadas de modo que producen el movimiento que se desea en la máquina. El propósito del mecanismo de la figura 1.2 es elevar la plataforma y cualquier objeto que se encuentre sobre ella. La *síntesis* es el proceso de desarrollo de un mecanismo para satisfacer los requerimientos de funcionamiento de la máquina. El *análisis* garantiza que el mecanismo se moverá de tal modo que cumplirá con los requerimientos.

1.3 CINEMÁTICA

La *cinemática* trata con la manera en que se mueven los cuerpos. Es el estudio de la geometría del movimiento. El análisis cinemático implica la determinación de posición, desplazamiento, rotación, rapidez, velocidad y aceleración de un mecanismo.

Para ilustrar la importancia de este análisis, regrese a la plataforma de elevación de la figura 1.2. El análisis cinemático ofrece información sobre cuestiones significativas del diseño tales como:

- ¿Cuál es la importancia de la longitud de las piernas que soportan la plataforma?
- ¿Es necesario que las piernas de soporte estén cruzadas y conectadas en su punto medio, o sería mejor configurarlas para que se crucen más cerca de la plataforma?
- ¿A qué distancia deben extenderse los cilindros para elevar 8 in la plataforma?

Asimismo, el análisis de las fuerzas dinámicas de la plataforma ayudaría a contestar otras preguntas importantes del diseño:

- ¿Qué capacidad (fuerza máxima) se requiere en el cilindro hidráulico?
- ¿La plataforma está a salvo de la tendencia a volcarse?
- ¿Cuáles deben ser el tamaño de la sección transversal y el material para que no fallen las piernas de soporte?

La mayoría de los mecanismos se mueven de tal forma que sus partes se mueven en planos paralelos. En el dispositivo de la figura 1.2, se utilizan dos mecanismos idénticos en lados opuestos de la plataforma para efectos de estabilidad. Sin embargo, el movimiento de estos mecanismos se da en un plano estrictamente vertical. Por consiguiente, estos mecanismos se conocen como *mecanismos planos* porque su movimiento se limita a un espacio bidimensional. La mayoría de los mecanismos comerciales son planos y son el tema principal del libro.

1.4 TERMINOLOGÍA DE MECANISMOS

Como se mencionó, los mecanismos consisten en partes conectadas con el objetivo de transmitir movimiento y fuerza, desde una fuente de potencia hasta una salida. Un *eslabonamiento* es un mecanismo donde se unen partes rígidas para formar una cadena. Una de las partes se denomina *bancada*, porque sirve como marco de referencia para el movimiento de todas las demás partes. La bancada normalmente es una parte sin movimiento. En la figura 1.3 se observa una popular máquina de guía elíptica para ejercicio, en la cual dos eslabonamientos planos están configurados para operar fuera de fase con la finalidad de simular el movimiento de caminar, incluyendo el movimiento de los brazos. Como la base se apoya en el suelo y no se mueve durante la operación, se considera que la base es la bancada.

Los *eslabones* son las partes individuales del mecanismo y se consideran cuerpos rígidos que están conectados con otros eslabones para transmitir movimiento y fuerzas. Teóricamente, un cuerpo rígido verdadero no se deforma durante el movimiento. Aunque en realidad no hay un cuerpo rígido, los eslabones de los mecanismos se diseñan considerando una deformación mínima y se suponen rígidos. El reposapiés y los manubrios de la máquina para ejercicio comprenden diferentes eslabones y, junto con los eslabones, están interconectados para producir restricciones al movimiento.

Partes elásticas, como los resortes, no son rígidas; por lo tanto, no se consideran eslabones. No tienen efecto sobre la cinemática del mecanismo y se suelen ignorar en el análisis



FIGURA 1.3 Máquina de guía elíptica para ejercicio de entrenamiento (foto de www.precor.com).

cinemático. Suministran fuerzas, por lo que se deben incluir en la parte del análisis de las fuerzas dinámicas.

Una *unión* es una conexión móvil entre los eslabones que permite el movimiento relativo entre ellos. Las dos *uniones principales*, llamadas también *uniones totales*, son la unión de revoluta y la unión prismática. La *unión de revoluta*, conocida también como *unión de perno* o *de bisagra*, permite la rotación pura entre los dos eslabones que conecta. La *unión de corredera*, conocida también como *unión de pistón* o *prismática*, permite el deslizamiento lineal entre los eslabones que conecta. La figura 1.4 muestra las dos juntas.

La figura 1.5a muestra una unión de leva que permite tanto la rotación como el deslizamiento entre los dos eslabones que conecta. Debido al movimiento complejo que genera, a la conexión de leva se le llama *unión de orden superior* o *media unión*. Una conexión de engranes permite asimismo la rotación y el deslizamiento entre los dos engranes conforme sus dientes se van acoplando. En la figura 1.5b se presenta esta configuración. La conexión de engrane también es una unión de orden superior.

Un *eslabón simple* es un cuerpo rígido que solo tiene dos uniones que se conectan con otros eslabones. La figura 1.6a ilustra un eslabón simple. Una *manivela* es un eslabón simple

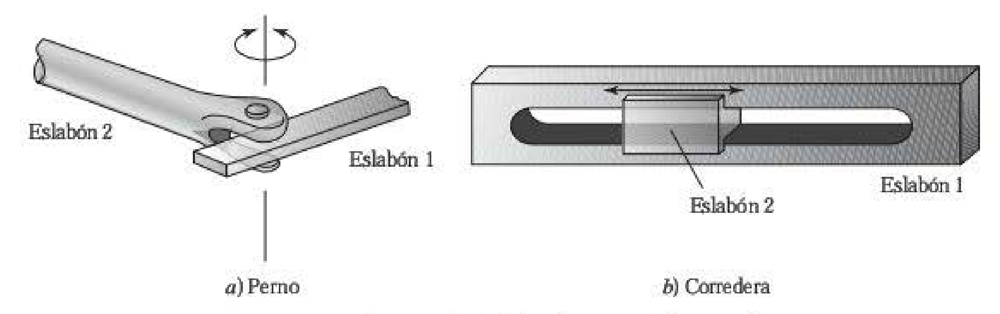


FIGURA 1.4 Uniones principales: *a*) perno y *b*) corredera.

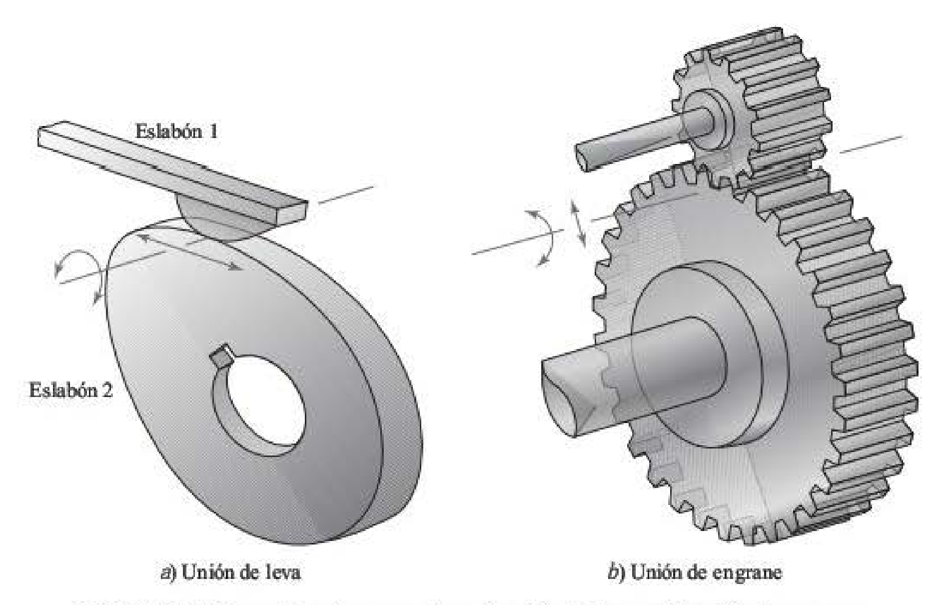


FIGURA 1.5 Uniones de orden superior: *a*) unión de leva y *b*) unión de engrane.

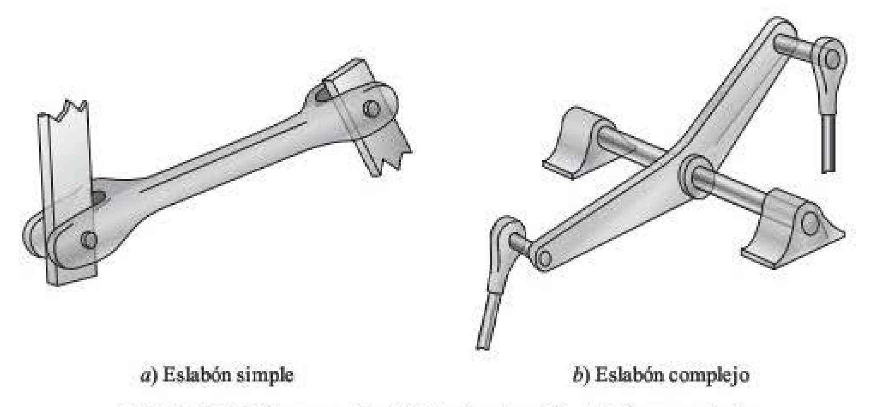


FIGURA 1.6 Eslabones: *a*) eslabón simple y *b*) eslabón complejo.

que puede girar completamente alrededor de un centro fijo. Un balancín es un eslabón simple que oscila con cierto ángulo, invirtiendo su dirección a determinados intervalos.

Un *eslabón complejo* es un cuerpo rígido que contiene más de dos uniones. La figura 1.6b muestra un eslabón complejo. Un *brazo de balancín* es un eslabón complejo que contiene tres uniones y pivota cerca de su centro. Una *manivela de campana* es similar a un brazo de balancín, pero está curvada en el centro. El eslabón complejo de la figura 1.6b es una manivela de campana.

Un *punto de interés* es un punto del eslabón donde el movimiento tiene un interés especial. El extremo del limpiador del parabrisas, mencionado anteriormente, se consideraría un punto de interés. Una vez que se lleva a cabo el análisis cinemático, se determinan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de ese punto.

El último componente general de un mecanismo es el *actuador*, que es el componente que impulsa el mecanismo. Los actuadores comunes incluyen motores (eléctricos e hidráulicos), motores de gasolina, cilindros (hidráulicos y neumáticos), motores de tornillos de bolas y solenoides. Las máquinas que se operan manualmente utilizan el movimiento humano, como el giro de una manivela, como actuador. Los actuadores se analizarán en la sección 1.7.

Los eslabonamientos pueden ser *cadenas abiertas* o *cerradas*. Cada eslabón en la cadena cinemática cerrada se conecta a dos o más eslabones. La elevadora de la figura 1.2 y la máquina de guía elíptica de la figura 1.3 son cadenas cerradas. Una cadena abierta tiene, por lo menos, un eslabón que está conectado únicamente a otro eslabón. Eslabonamientos abiertos comunes son los brazos robóticos como el de la figura 1.7, así como otras máquinas "de carrera" como las retroexcavadoras y las grúas.

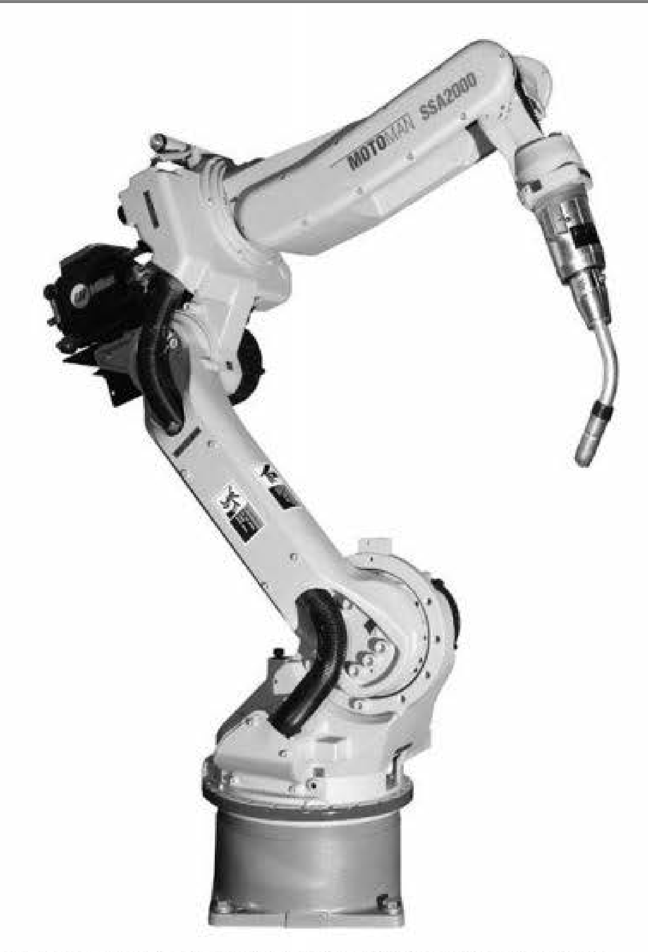


FIGURA 1.7 Robot articulado. (Cortesía de Motoman Inc.).

1.5 DIAGRAMAS CINEMÁTICOS

En el análisis del movimiento de una máquina, con frecuencia se dificulta visualizar el movimiento de los componentes en el dibujo completo de un ensamble. La figura 1.8 presenta una máquina que se utiliza para manejar partes en una línea de ensamble. Un motor produce la fuerza giratoria que impulsa un mecanismo que mueve los brazos delante de un lado a otro de manera sincronizada. Como se observa en la figura 1.8, una imagen completa de la máquina es muy compleja, por lo que resulta difícil concentrarse en el movimiento del mecanismo en consideración.

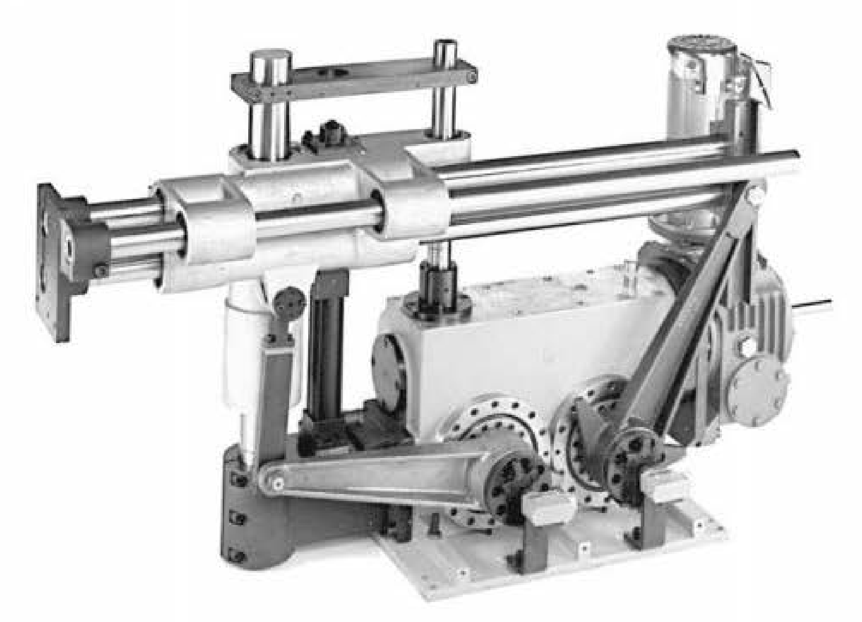
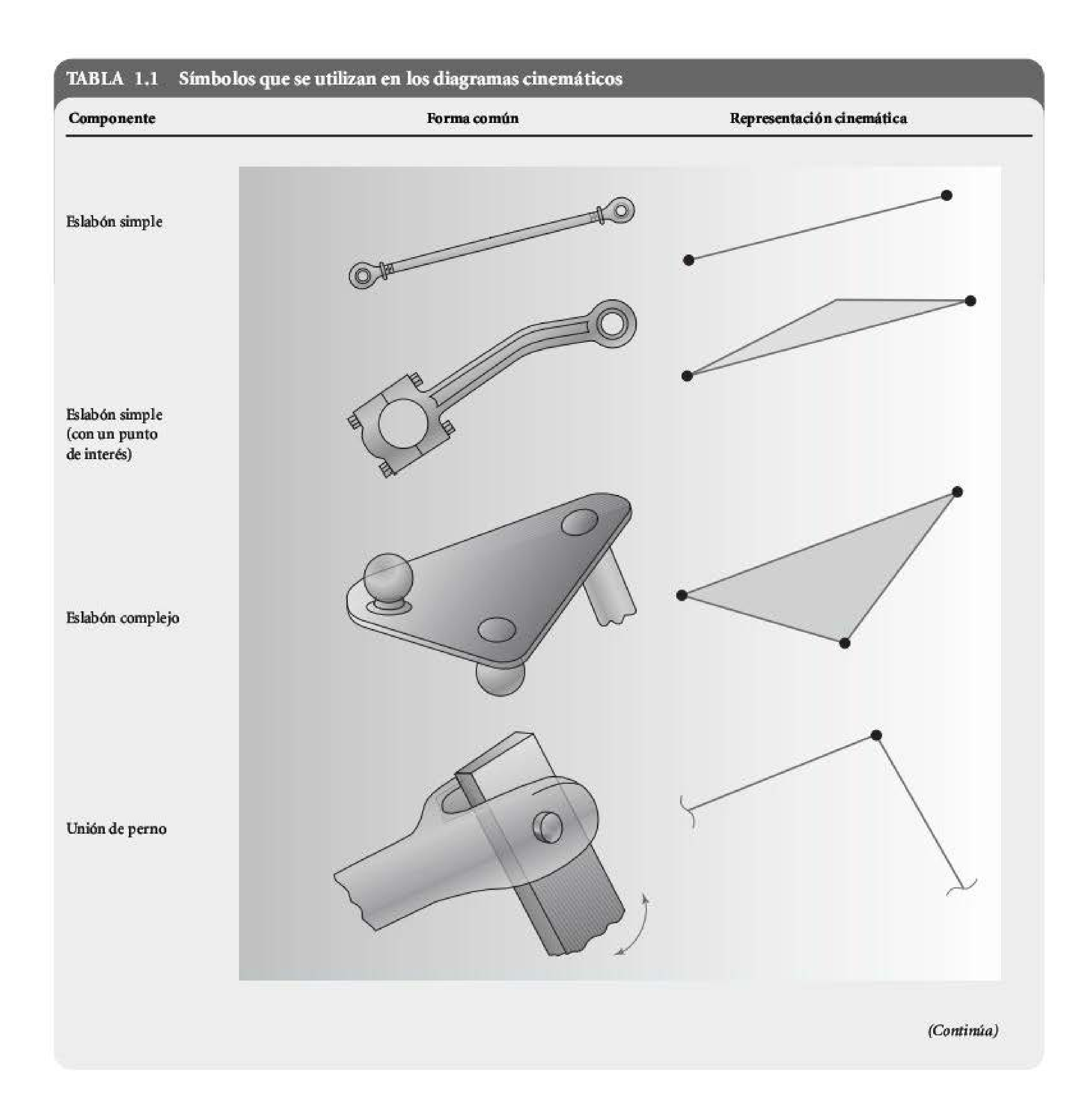


FIGURA 1.8 Cargador sincronizado de dos brazos. (Cortesía de PickOmatic Systems, Ferguson Machine Co.).

Es más fácil representar las partes de manera esquemática, de modo que solo se muestren las dimensiones que influyen en el movimiento del mecanismo. Tales diagramas "desmontados" se conocen con frecuencia como *diagramas cinemáticos*, cuyo propósito es similar al de los diagramas esquemáticos de los circuitos eléctricos o de los diagramas de tubería, donde se representan las variables que afectan la función principal del mecanismo. La tabla 1.1 muestra las convenciones comunes que se usan en la elaboración de los diagramas cinemáticos.

Se requiere que un diagrama cinemático se dibuje a una escala proporcional con el mecanismo real. Para efectos de identificación, los eslabones se numeran, iniciando con la bancada como el eslabón número 1. Para evitar confusión, las uniones se identifican con letras.

TABLA 1.1 Símbolos que se utilizan en los diagramas cinemáticos



Componente	Forma común	Representación cinemática
Eslabón simple		
Eslabón simple (con un punto de interés)		
Eslabón complejo		
Unión de perno		

(Continúa)

TABLA 1.1 (Continuación)

Componente	Forma común	Representación cinemática
Unión de corredera		
Unión de leva	Eslabón 1 Eslabón 2	
Unión de engranes		

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.1

La figura 1.9 es de una máquina que se usa para cortar y ajustar tableros de circuitos electrónicos impresos. Elabore un diagrama cinemático.

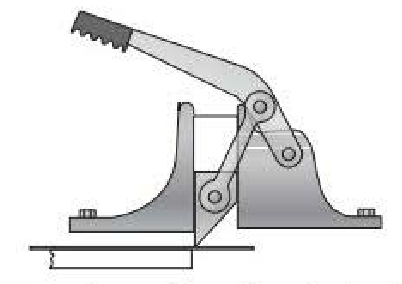


FIGURA 1.9 Prensa de corte del problema de ejemplo 1.1.

SOLUCIÓN: 1. ***Identifique la bancada***

El primer paso en la elaboración de un diagrama cinemático es decidir la parte que se diseñará como la bancada. El movimiento de todos los demás eslabones se determinará en relación con la bancada. En algunos casos, la selección es evidente porque la bancada está firmemente sujeta en el suelo.

En este problema, la base grande atornillada a la mesa se designa como bancada. El movimiento de todos los demás eslabones se determina en relación con esta base. La base se identifica como el eslabón 1.

2. ***Identifique todos los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa revela otras tres partes que se mueven:
   Eslabón 2: Mango
   Eslabón 3: Cuchilla cortante
   Eslabón 4: Barra que conecta la cuchilla con el mango

3. ***Identifique las uniones***

   Se utilizan pernos para unir el eslabón 1 al 2, el eslabón 2 al 3 y el eslabón 3 al 4. Tales uniones se identifican con letras *A* a *C*. Además, el cortador se desliza hacia arriba y hacia abajo, a lo largo de la base. Esta unión de corredera conecta el eslabón 4 con el 1 y se identifica con la letra *D*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

   Por último, se desea conocer el movimiento en el extremo del mango, que se identifica como el *punto de interés X*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

   En la figura 1.10 se presenta el diagrama cinemático.

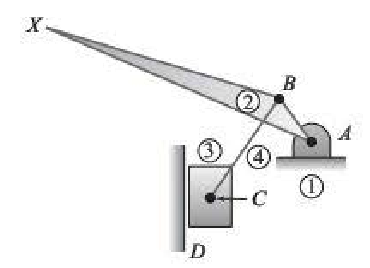


FIGURA 1.10 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.1.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.2

La figura 1.11 ilustra unas pinzas. Dibuje su diagrama cinemático.

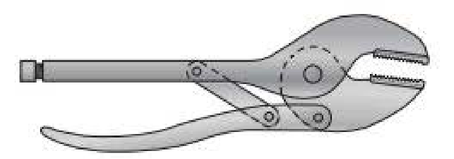


FIGURA 1.11 Pinzas del problema de ejemplo 1.2.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la bancada***

   El primer paso es decidir qué parte se designará como bancada. En este problema no hay partes sujetas al suelo. Por consiguiente, la selección de la bancada es arbitraria.

   Se designa el mango superior como bancada. El movimiento de todos los demás eslabones se determina en relación con el mango superior. El mango superior se identifica como el eslabón 1.

2. ***Identifique todos los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa revela otras tres partes que se mueven:
   Eslabón 2: Mango inferior
   Eslabón 3: Mordaza inferior
   Eslabón 4: Barra que conecta el mango superior y el mango inferior

3. ***Identifique las uniones***

   Se utilizan cuatro pernos para conectar estos eslabones (el eslabón 1 al 2, el 2 al 3, el 3 al 4 y el 4 al 1). Estas uniones se identifican con las letras *A* a *D*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

   Se desea conocer el movimiento en el extremo de la mordaza inferior, el cual se designa como el punto de interés *X*. Finalmente, también se busca determinar el movimiento en el extremo del mango inferior, que se designa como el punto de interés *Y*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático se observa en la figura 1.12.

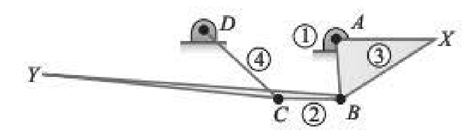


FIGURA 1.12 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.2.

1.6 INVERSIÓN CINEMÁTICA

El *movimiento absoluto* se mide con respecto a una bancada estacionaria. El *movimiento relativo* de un punto o un eslabón se mide con respecto a otro eslabón. Como se indicó en los ejemplos anteriores, el primer paso en la elaboración de un diagrama cinemático consiste en la selección de una parte que sirva como bancada. En algunos casos, la selección de la bancada es arbitraria, como en las pinzas del problema de ejemplo 1.2. Cuando se seleccionan diferentes eslabones como bancada, no se altera el movimiento relativo de los eslabones; sin embargo, el movimiento absoluto puede ser significativamente diferente. En las máquinas sin un eslabón fijo, por lo general el movimiento relativo es el resultado buscado en el análisis cinemático.

En el problema de ejemplo 1.2, un resultado importante del análisis cinemático es la distancia que se debe mover el mango para abrir las mordazas. Se trata de una cuestión de posición relativa de los eslabones: el mango y la mordaza. Como el movimiento relativo de los eslabones no cambia con la selección de una bancada, la selección de un eslabón como marco de referencia con frecuencia no tiene importancia. El uso de eslabones alternos como eslabones fijos se conoce como *inversión cinemática*.

1.7 MOVILIDAD

Una propiedad importante en el análisis de mecanismos es el número de grados de libertad del eslabonamiento. El grado de libertad es el número de entradas independientes requeridas para posicionar con exactitud todos los eslabones de un mecanismo con respecto al suelo. También se puede definir como el número de actuadores necesarios para operar el mecanismo. Un mecanismo actuador podría ser el movimiento manual de un eslabón hacia otra posición, la conexión de un motor al eje de un eslabón o el empuje del pistón de un cilindro hidráulico.

El número de grados de libertad de un mecanismo también se conoce como *movilidad*, el cual se identifica con el símbolo M. Cuando la configuración de un mecanismo está completamente definida con el posicionamiento de un eslabón, el sistema tiene un grado de libertad. La mayoría de los mecanismos comerciales tienen un grado de libertad. En contraste, los brazos robóticos suelen tener tres grados de libertad o incluso más.

1.7.1 Ecuación de Gruebler

Los grados de libertad para eslabonamientos planos conectados con uniones comunes se calculan con la *ecuación de Gruebler*:

$$M = \text{grados de libertad} = 3(n-1) - 2j_p - j_h$$

donde:

n = número total de eslabones en el mecanismo

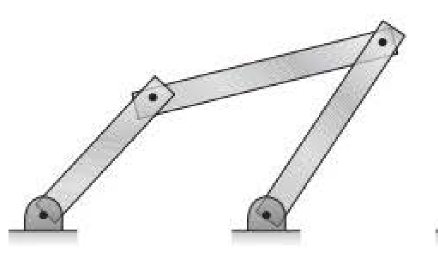
j_p = número total de uniones principales (uniones de pernos o de correderas)

j_h = número total de uniones de orden superior (uniones de levas o engranes)

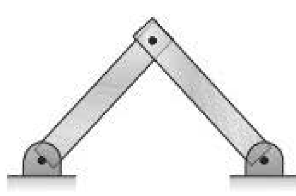
Como ya se mencionó, la mayoría de los eslabonamientos usados en las máquinas tienen un grado de libertad. En la figura 1.13a se presenta un eslabonamiento con un grado de libertad.

Los eslabonamientos con grados de libertad iguales a cero o negativos se conocen como *mecanismos bloqueados*, los cuales son incapaces de moverse y formar una estructura. Una *armadura* es una estructura formada por eslabones simples, conectados por uniones de perno, con cero grados de libertad. En la figura 1.13b se ilustra un mecanismo bloqueado.

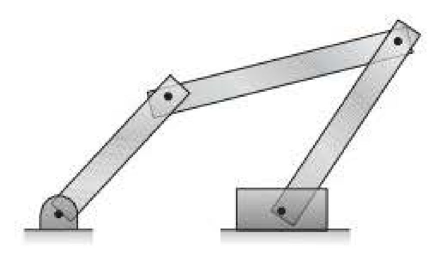
Los eslabonamientos con múltiples grados de libertad necesitan más de un impulsor para operar con precisión. Los mecanismos comunes con múltiples grados de libertad son cadenas cinemáticas abiertas que sirven para obtener cierto alcance y posicionamiento, tal como los brazos robóticos y las retroexcavadoras. En general, los eslabonamientos con múltiples grados de libertad ofrecen mayor capacidad para posicionar con precisión un eslabón. En la figura 1.13c se presenta un mecanismo con múltiples grados de libertad.



a) Un grado de libertad ($M = 1$)



b) Mecanismo bloqueado ($M = 0$)



c) Múltiples grados de libertad ($M = 2$)

FIGURA 1.13 Mecanismos y estructuras con movilidad variable.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.3

La figura 1.14 muestra una sujetadora de abrazadera. Elabore un diagrama cinemático, con la mordaza de la abrazadera y el mango como puntos de interés. Calcule también los grados de libertad de la abrazadera.

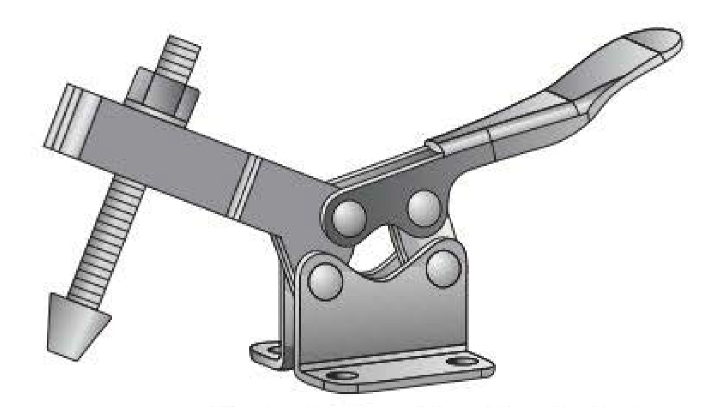


FIGURA 1.14 Sujetadora de abrazadera del problema de ejemplo 1.3.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la bancada***

   El componente atornillado al banco o la mesa se designa como la bancada. El movimiento de los demás eslabones se determina en relación con tal bancada. La bancada se numera como el eslabón 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa revela otras tres partes que se mueven:
   Eslabón 2: Mango
   Eslabón 3: Brazo que sirve como abrazadera-mordaza
   Eslabón 4: Barra que conecta el brazo de la abrazadera y el mango

3. ***Identifique las uniones***

   Se utilizan cuatro uniones de pernos para conectar los diferentes eslabones (el eslabón 1 al 2, el 2 al 3, el 3 al 4 y el 4 al 1). Tales uniones se identifican con las letras *A* a *D*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

   Se desea conocer el movimiento de la abrazadera-mordaza, la cual se designa como el punto de interés *X*. Se desea conocer también el movimiento del extremo del mango, que se designa como el punto de interés *Y*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

   En la figura 1.15 se detalla el diagrama cinemático.

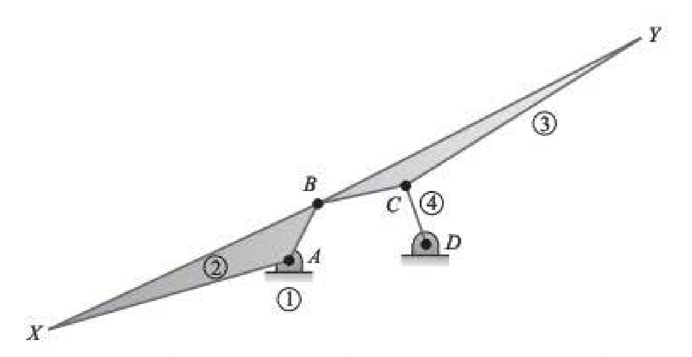


FIGURA 1.15 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.3.

6. ***Calcule la movilidad***

   Con los cuatro eslabones y las cuatro uniones de perno,

$$n = 4, j_p = 4 \text{ pernos}, j_h = 0$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1$$

El mecanismo está restringido con un grado de libertad. Al moverse un solo eslabón, el mango, se posicionan correctamente todos los demás eslabones en la sujetadora.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.4

La figura 1.16 muestra una trituradora de latas que se utiliza para reducir su tamaño y facilitar su almacenamiento antes de reciclarse. Elabore un diagrama cinemático, con el extremo del mango como punto de interés. Además, calcule los grados de libertad del dispositivo.

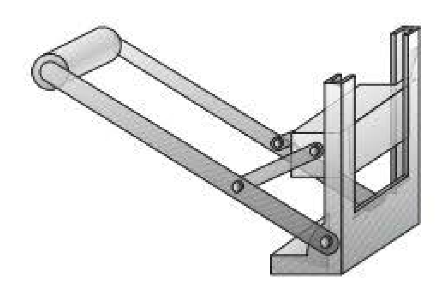


FIGURA 1.16 Trituradora de latas del problema de ejemplo 1.4.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la estructura***

   La parte de atrás del dispositivo sirve como base y puede sujetarse a la pared. Este componente se elige como la bancada. El movimiento de los demás eslabones se determina con respecto a la bancada. La bancada se identifica con el número 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa muestra un mecanismo plano con otras tres partes móviles:
   Eslabón 2: El mango
   Eslabón 3: Bloque usado como superficie trituradora o aplastadora
   Eslabón 4: Barra que conecta el bloque aplastador y el mango

3. ***Identifique las uniones***

   Se utilizan tres uniones de perno para conectar estas partes diferentes. Un perno une el mango con la base. Esta unión se etiqueta como *A*. Se usa un segundo perno para conectar el eslabón 4 con el mango. Esta unión se identifica como *B*. Un tercer perno une el bloque triturador y el eslabón 4. Esta unión se identifica como *C*.

   El bloque triturador se desliza verticalmente durante la operación, de modo que una unión de corredera conecta el triturador con la base. Esta unión se identifica como *D*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

   Se desea conocer el movimiento del extremo del mango. Este se designa como el punto de interés *X*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

   El diagrama cinemático se presenta en la figura 1.17.

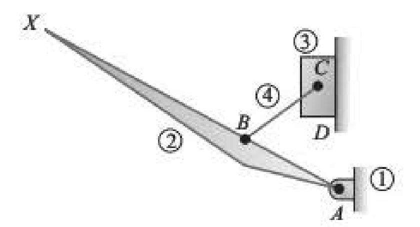


FIGURA 1.17 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.4.

6. ***Calcule la movilidad***

Se determinó que hay cuatro eslabones en este mecanismo. También existen tres uniones de perno y una unión de corredera. Por lo tanto,

$$n = 4, j_p = (3 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 4, j_h = 0$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1$$

El mecanismo triturador de latas está restringido por un grado de libertad. Con el movimiento de un solo eslabón, el mango, se pueden colocar con precisión los demás eslabones y aplastar una lata colocada debajo del bloque triturador.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.5

La figura 1.18 muestra otro dispositivo que sirve para cortar material. Elabore un diagrama cinemático, con el extremo del mango y el extremo de corte como puntos de interés. También calcule los grados de libertad de la prensa cortadora.

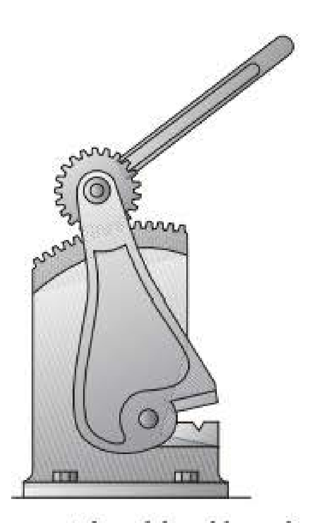


FIGURA 1.18 Prensa cortadora del problema de ejemplo 1.5.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la bancada***

La base está atornillada a una superficie de trabajo y se designa como la bancada. El movimiento de los demás eslabones se determina en relación con esta bancada. A la bancada se le asigna el número 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

Una observación cuidadosa revela otras dos partes móviles:

Eslabón 2: Engrane/mango
Eslabón 3: Palanca cortadora

3. ***Identifique las uniones***

Se usan dos uniones de perno para conectar estas partes. Un perno conecta la palanca cortadora con la bancada. Esta unión se rotula como *A*. Se usa un segundo perno para conectar el engrane/mango con la palanca cortadora. Esta unión se identifica como *B*.

El engrane/mango también se conecta a la bancada con una unión de engrane. Esta unión de orden superior se identifica como *C*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

Se desea conocer el movimiento del extremo del mango y se designa como el punto de interés *X*. También se busca determinar el movimiento de la superficie cortadora y se designa como el punto de interés *Y*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático se presenta en la figura 1.19.

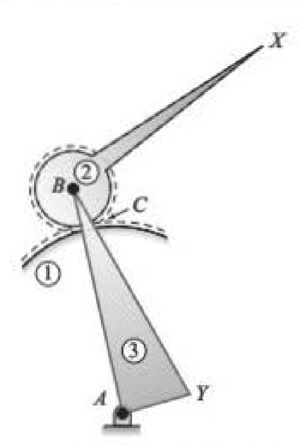


FIGURA 1.19 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.5.

6. ***Calcule la movilidad***

Para calcular la movilidad, se identificaron tres eslabones en el mecanismo. También hay dos uniones de perno y una unión de engrane, de modo que,

$$n = 3, j_p = (2 \text{ pernos}) = 2 \qquad j_h = (1 \text{ unión de engrane}) = 1$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(3 - 1) - 2(2) - 1 = 1$$

El mecanismo de la prensa de corte está restringido a un grado de libertad. Con el movimiento de un solo eslabón, el mango, los demás eslabones se posicionan con precisión y se lleva el extremo de corte sobre la pieza de trabajo.

1.7.2 Actuadores e impulsores

Para operar un mecanismo, se requiere un dispositivo actuador o impulsor que proporcione el movimiento y la energía de entrada. Para operar con precisión un mecanismo, se necesita un impulsor por cada grado de libertad. Se utilizan muchos actuadores diferentes en las máquinas y los mecanismos, tanto industriales como comerciales. Algunos de los más comunes son:

Los **motores eléctricos de corriente alterna** brindan el movimiento giratorio continuo menos costoso. Sin embargo, están limitados a unas cuantas velocidades estándar, que son una función de la frecuencia de la corriente eléctrica. En Estados Unidos la frecuencia de la corriente es de 60 Hz, lo cual corresponde a velocidades de 3600, 1800, 900, 720 y 600 rpm. Los motores monofásicos se utilizan en aplicaciones residenciales y están disponibles desde 1/50 hasta 2 hp. Los motores trifásicos son más eficientes, pero en la mayoría de los casos están limitados a aplicaciones industriales, porque requieren una potencia de servicio de tres fases. Están disponibles desde 1/4 hasta 500 hp.

Los **motores eléctricos de corriente continua** también producen movimiento giratorio. La velocidad y la dirección del movimiento se modifican fácilmente, pero requieren potencia de un generador o una batería. Los motores de corriente continua pueden alcanzar velocidades extremadamente grandes, hasta de 30000 rpm. Estos motores se usan con frecuencia en vehículos, dispositivos inalámbricos, o en aplicaciones donde se requiere controlar múltiples velocidades y direcciones, como en una máquina de coser.

Los **motores de gasolina** también generan movimiento giratorio continuo y su velocidad se regula dentro de un intervalo aproximado de 1000 a 8000 rpm. Son impulsores comunes y altamente portátiles que se utilizan en aplicaciones que requieren gran potencia. Como dependen del consumo de combustible, los motores de gasolina sirven para impulsar máquinas que operan en exteriores.

Los **servomotores** son motores que se acoplan a un controlador para generar un movimiento programado o mantenerlo en una posición fija. El controlador requiere sensores sobre el eslabón que se desea mover, para brindar información de retroalimentación acerca de su posición, velocidad y aceleración. Estos motores tienen menor capacidad de potencia que las otras clases de motores y son significativamente más costosos; no obstante, se utilizan en máquinas que requieren movimientos guiados con precisión como los robots.

Los **motores de aire o hidráulicos** también producen movimiento giratorio continuo y son parecidos a los motores eléctricos, pero tienen aplicaciones más limitadas. Lo anterior se debe a la necesidad de una fuente hidráulica o de aire comprimido. Tales dispositivos de inducción se usan principalmente dentro de las máquinas, como en el equipo de construcción y los aviones, donde se puede obtener un fluido hidráulico de alta presión.

Los **cilindros hidráulicos o neumáticos** son componentes comunes para impulsar un mecanismo con una carrera lineal limitada. La figura 1.20a muestra un cilindro hidráulico. La figura 1.20b es la representación cinemática común del cilindro.

FIGURA 1.20 Cilindro hidráulico.

El cilindro contiene un ensamble de pistón y una varilla que se desliza en relación con el cilindro. Para efectos cinemáticos, son dos eslabones (pistón/varilla y cilindro) conectados con una unión prismática. El cilindro y el extremo de la varilla suelen tener aditamentos para uniones de perno.

Los **actuadores de tornillo** también producen carrera lineal limitada. Estos actuadores consisten en un motor que hace girar un tornillo. Una tuerca aparejada suministra movimiento lineal. Los actuadores de tornillo se pueden controlar con precisión y reemplazar directamente a los cilindros. Sin embargo, son considerablemente más costosos que los cilindros, aun cuando haya fuentes de aire o hidráulicas disponibles. Como en los cilindros, en los actuadores de tornillo también existen aditamentos para uniones de perno en los dos extremos. Por consiguiente, su diagrama cinemático es idéntico al de la figura 1.20b.

Los **mecanismos manuales**, u operados manualmente, comprenden un gran número de máquinas o herramientas manuales. Los movimientos que se esperan de los actuadores "humanos" suelen ser bastante complejos. Sin embargo, si los movimientos que se esperan son repetitivos, se debería tener cuidado de posibles daños por fatiga y deformación.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.6

La figura 1.21 muestra un pie de balancín estabilizador para un camión. Elabore un diagrama cinemático con la parte inferior de la pierna estabilizadora como un punto de interés. También calcule el grado de libertad.

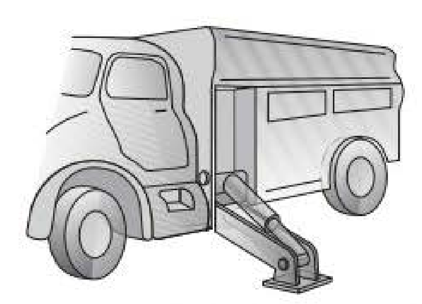


FIGURA 1.21 Balancín estabilizador del problema de ejemplo 1.6.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la bancada***

   Cuando se utiliza el balancín estabilizador, el camión está detenido, de modo que se designa el camión como la bancada. El movimiento de los demás eslabones se determina en relación con el camión. La bancada se identifica como el eslabón 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa revela otras tres partes móviles:

   Eslabón 2: Pie de balancín estabilizador
   Eslabón 3: Cilindro
   Eslabón 4: Pistón/varilla

3. ***Identifique las uniones***

   Se usan tres uniones de perno para conectar las partes. Una conecta la pierna estabilizadora con la bancada del camión, la cual se identifica como la unión *A*. Otra conecta la pierna estabilizadora con la varilla del cilindro y se identifica como la unión *B*. La última unión de perno conecta el cilindro con la bancada del camión y se identifica como la unión *C*.

   Hay una unión de corredera en el cilindro, la cual conecta el pistón/varilla con el cilindro. Se identifica como la unión *D*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

El pie estabilizador es parte del eslabón 2, mientras el punto de interés ubicado en la parte inferior del pie se identifica como el punto de interés *X*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático resultante se observa en la figura 1.22.

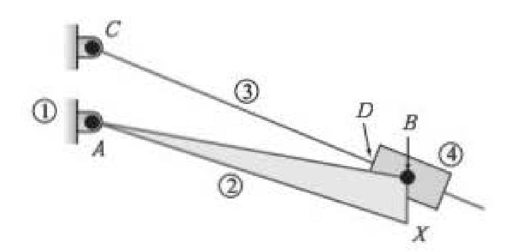


FIGURA 1.22 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.6.

6. ***Calcule la movilidad***

Para calcular la movilidad, se sabe que en tal mecanismo hay cuatro eslabones, tres uniones de perno y una unión de corredera. Por consiguiente,

$$n = 4, j_p = (3 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 4, j_h = 0$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1$$

El mecanismo estabilizador está restringido por un grado de libertad. Con el movimiento de un solo eslabón, el pistón, coloca en posiciones precisas los demás eslabones en el estabilizador y ubica al pie del balancín estabilizador en el suelo.

1.8 ESLABONES Y UNIONES USADOS COMÚNMENTE

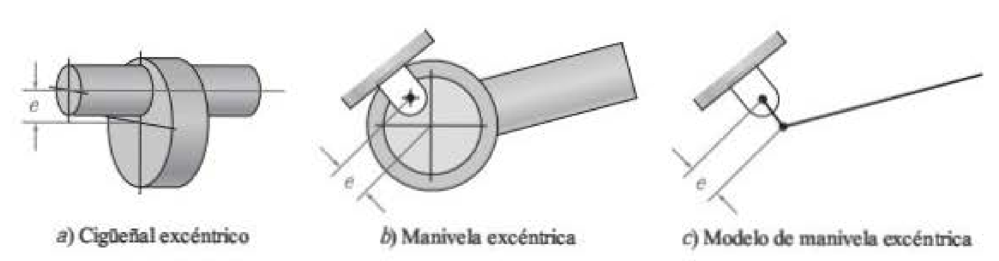
1.8.1 Manivela excéntrica

En muchos mecanismos, la longitud requerida de una manivela es tan corta que no es factible ajustar al tamaño adecuado los soportes con dos uniones de perno. Una solución frecuente consiste en diseñar el eslabón como un cigüeñal excéntrico, como se indica en la figura 1.23a. Este es el diseño que se utiliza en la mayoría de motores de gasolina y compresores.

El perno, sobre el extremo móvil del eslabón, se alarga de tal manera que contiene el eslabón completo. La circunferencia exterior del lóbulo circular sobre el cigüeñal se convierte en una unión de perno móvil, como se muestra en la figura 1.23b. La ubicación del(os) soporte(s) fijo(s) está descentrado al lóbulo excéntrico. Esta excentricidad del cigüeñal, *e*, es la longitud efectiva del cigüeñal. La figura 1.23c muestra un modelo cinemático de una manivela excéntrica. La ventaja de la manivela excéntrica es la gran superficie del área del perno móvil, la cual reduce el desgaste.

1.8.2 Unión de perno en una ranura

Una conexión común entre eslabones es la unión de perno en una ranura, como la que se ilustra en la figura 1.24a. Se trata una unión de orden superior porque permite que los dos eslabones giren y se deslicen entre sí. Para simplificar el análisis cinemático, se utilizan las uniones principales para modelar esta unión de orden superior. La unión de perno en una ranura se vuelve una combinación de unión de perno y unión de corredera, como en la figura 1.24b. Observe que así se agrega otro eslabón al mecanismo. En ambos casos, el movimiento relativo entre los eslabones es el mismo. No obstante, el uso de un modelo cinemático con las uniones principales facilita el análisis.



a) Cigüeñal excéntrico *b*) Manivela excéntrica *c*) Modelo de manivela excéntrica

FIGURA 1.23 Manivela excéntrica.

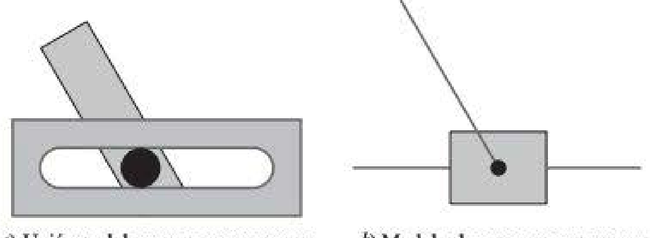


FIGURA 1.24 Unión de perno en una ranura.

1.8.3 Unión de tornillo

Una unión de tornillo, como la mostrada en la figura 1.25a, es otra conexión común entre eslabones. Los mecanismos de tornillo se analizan con detalle en el capítulo 12. Por ahora, sólo se dirá que una unión de tornillo permite dos movimientos relativos, aunque dependientes entre los eslabones que une. El giro específico de uno de los eslabones causará un movimiento relativo de traslación entre los dos eslabones. Por ejemplo, al girar el tornillo una revolución, la tuerca se mueve una distancia de 0.1 in en las cuerdas del tornillo, de modo que únicamente se introduce un movimiento independiente.

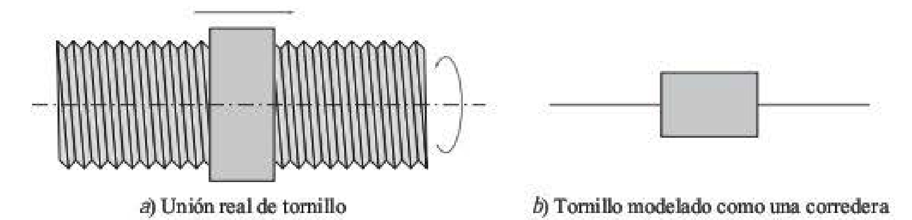


FIGURA 1.25 Unión de tornillo.

La unión de tornillo se modela por lo general como una unión de corredera, como la que se ilustra en la figura 1.25b. Debe quedar claro que hay rotación fuera del plano; sin embargo, únicamente la traslación relativa entre el tornillo y la tuerca se considera en el análisis cinemático plano.

Un actuador, tal como una manivela, suele producir un giro fuera del plano. Una porción del giro generará la correspondiente traslación relativa entre los eslabones unidos por la unión de tornillo. Esta traslación relativa se utiliza como "impulsor" en los análisis cinemáticos subsecuentes.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.7

La figura 1.26 ilustra una mesa levadiza que se usa para ajustar la altura de trabajo de diferentes objetos. Elabore un diagrama cinemático y calcule los grados de libertad.

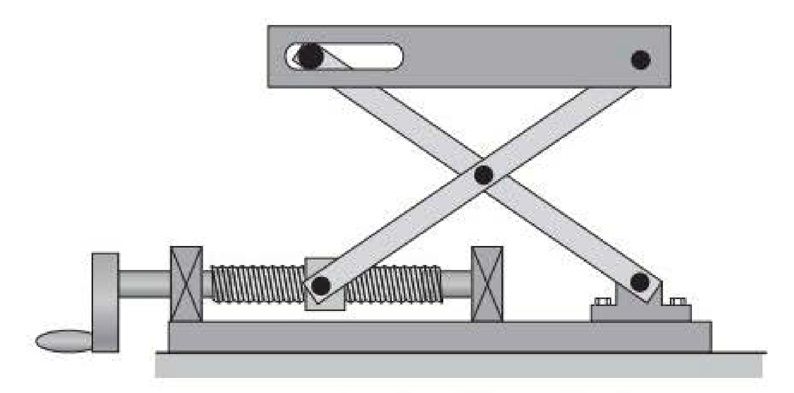


FIGURA 1.26 Mesa levadiza del problema de ejemplo 1.7.

SOLUCIÓN: 1. ***Identifique la bancada***

La placa de la base inferior descansa sobre una superficie fija, de modo que la placa de la base se designa como la bancada. El soporte en la parte inferior derecha de la figura 1.26 está atornillado a la placa de la base. Asimismo, los dos soportes que sostienen el tornillo en la parte izquierda también están atornillados a la base.

En el análisis de la sección anterior se vio que no se considera la rotación fuera del plano del tornillo. Solamente la traslación relativa de la tuerca se incluye en el modelo cinemático. Por lo tanto, el tornillo también se considera parte de la bancada. El movimiento de los demás eslabones se determinará en relación con esta placa de base inferior, la cual se identifica con el eslabón 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

   Una observación cuidadosa revela otras cinco partes móviles:

   Eslabón 2: Tuerca
   Eslabón 3: Brazo de soporte que conecta la tuerca con la mesa
   Eslabón 4: Brazo de soporte que conecta el soporte fijo con la ranura de la mesa
   Eslabón 5: Mesa
   Eslabón 6: Eslabón extra utilizado para modelar el perno en la unión de ranura con las uniones de perno y la corredera por separado

3. ***Identifique las uniones***

   Se usa una unión de corredera para modelar el movimiento entre el tornillo y la tuerca. Una unión de perno, designada como punto *A*, conecta la tuerca con el brazo de soporte identificado como eslabón 3. Una unión de perno, designada como punto *B*, conecta los dos brazos de soporte (eslabones 3 y 4). Otra unión de perno, designada como punto *C*, conecta el eslabón 3 con el eslabón 6. Una unión de corredera une el eslabón 6 con la mesa (eslabón 5). Un perno, designado como punto *D*, conecta la mesa con el brazo de soporte (eslabón 3). Por último, una unión de perno, designada como punto *E*, se emplea para conectar la base con el brazo de soporte (eslabón 4).

4. ***Elabore un diagrama cinemático***

   El diagrama cinemático se presenta en la figura 1.27.

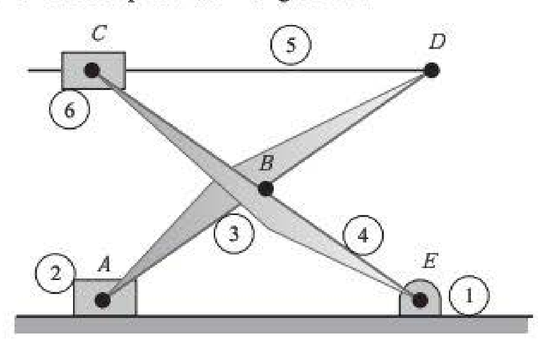


FIGURA 1.27 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.7.

5. ***Calcule la movilidad***

   Para calcular la movilidad, se sabe que hay seis eslabones en el mecanismo. También hay cinco uniones de perno y dos uniones de corredera. Por consiguiente,

$$n = 6, \quad j_p = (5 \text{ pernos} + 2 \text{ correderas}) = 7, \quad j_h = 0$$

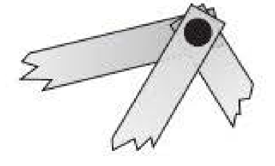
y

$$M = 3(n-1) - 2j_p - j_h = 3(6-1) - 2(7) - 0 = 15 - 14 = 1$$

La mesa levadiza tiene movimiento restringido con un grado de libertad. Un eslabón móvil, el mango que gira el tornillo, posicionará exactamente todos los demás eslabones del dispositivo, elevando o bajando la mesa.

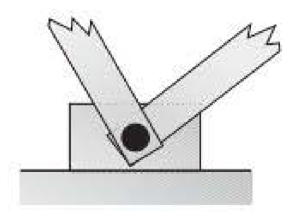
1.9 CASOS ESPECIALES DE LA ECUACIÓN DE MOVILIDAD

La movilidad es una propiedad extremadamente importante de un mecanismo. Entre otras cuestiones, brinda información acerca del número de actuadores requeridos para operar un mecanismo. Sin embargo, para obtener los resultados correctos, se debe tener mucho cuidado al usar la ecuación de Gruebler. A continuación se presentan algunas condiciones especiales.





a) Tres eslabones giratorios



b) Dos eslabones giratorios y uno de corredera

FIGURA 1.28 Tres eslabones conectados a una sola unión de perno.

1.9.1 Uniones coincidentes

Algunos mecanismos tienen tres eslabones conectados a una sola unión de perno, como se indica en la figura 1.28, lo cual causa algo de confusión en el modelado cinemático. Físicamente, se utiliza un perno para conectar los tres eslabones. Sin embargo, por definición, una unión de perno conecta dos eslabones.

En el análisis cinemático, esta configuración se debe modelar matemáticamente como dos uniones separadas. Una unión

conectará los eslabones primero y segundo. La segunda unión conectará entonces el segundo y el tercer eslabones. Por consiguiente, cuando hay tres eslabones juntos en un perno común, la unión se tiene que modelar con dos pernos. Este escenario se ilustra en el problema de ejemplo 1.8.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.8

La figura 1.29 muestra una prensa mecánica que sirve para ejercer grandes fuerzas e insertar una parte pequeña en una más grande. Con el extremo del mango como punto de interés, elabore un diagrama cinemático y calcule, además, los grados de libertad.

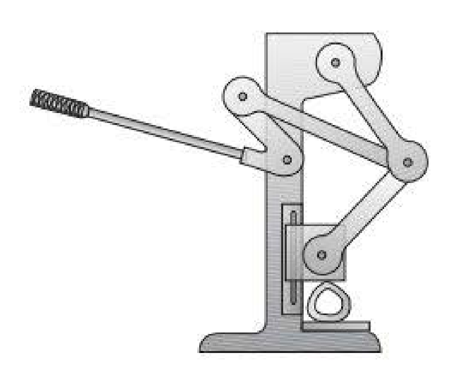


FIGURA 1.29 Prensa mecánica del problema de ejemplo 1.8.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la bancada***

La base de la parte inferior para la prensa mecánica está colocada sobre un banco de trabajo y permanece estacionaria durante la operación. Por lo tanto, esta base de la parte inferior se designa como bancada. El movimiento de los demás eslabones se determina en relación con la base inferior. La bancada se identifica con el eslabón 1.

2. ***Identifique los demás eslabones***

Una observación cuidadosa revela otras cinco partes móviles:

Eslabón 2: Mango
Eslabón 3: Brazo que conecta el mango con los otros brazos
Eslabón 4: Brazo que conecta la base con los otros brazos
Eslabón 5: Cabeza de la prensa
Eslabón 6: Brazo que conecta la cabeza con los otros brazos

3. ***Identifique las uniones***

Se usan uniones de perno para conectar todas las partes. Una conecta el mango con la base y se identifica como unión *A*. Otra conecta el eslabón 3 con el mango y se identifica como unión *B*. Otra conecta el eslabón 4 con la base y se identifica como unión *C*. Otra conecta el eslabón 6 con la cabeza de la prensa y se identifica como unión *D*.

Se utiliza un perno para conectar los tres brazos (eslabones 3, 4 y 6) juntos. Como tres eslabones separados están unidos en un punto común, estos se deben modelar como dos uniones separadas, identificadas como *E* y *F*.

Una unión de corredera conecta la cabeza de la prensa con la base. Esta unión se identifica como *G*.

4. ***Identifique los puntos de interés***

Se desea conocer el movimiento en el extremo del mango y se identifica como el punto de interés *X*.

5. ***Elabore el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático se muestra en la figura 1.30.

6. ***Calcule la movilidad***

Para calcular la movilidad, se sabe que hay seis eslabones en el mecanismo, seis uniones de perno y una unión de corredera. Por lo tanto,

$$n = 6, j_p = (6 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 7, j_h = 0$$

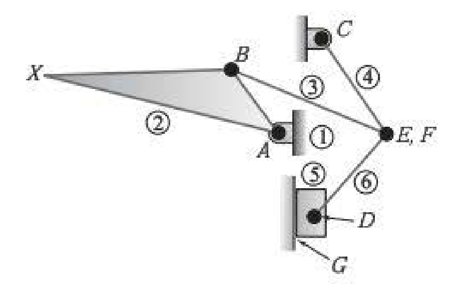


FIGURA 1.30 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.8.

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(6 - 1) - 2(7) - 0 = 15 - 14 = 1$$

El mecanismo de la prensa mecánica está restringido por un grado de libertad. Con tan solo el movimiento de un eslabón, el mango, se posicionan con precisión todos los demás eslabones de la prensa, deslizando la cabeza de esta sobre la pieza de trabajo.

1.9.2 Excepciones de la ecuación de Gruebler

Es necesario mencionar otra situación de movilidad especial. Como la ecuación de Gruebler no toma en cuenta la geometría de los eslabones, en raras ocasiones esto causa resultados erróneos. En la figura 1.31 se muestra un ejemplo de ello.

Observe que el eslabonamiento tiene cinco eslabones y seis uniones de perno. Al aplicar la ecuación de Gruebler, el eslabonamiento tiene cero grados de libertad. Por supuesto, lo anterior sugiere que el mecanismo está bloqueado. Sin embargo, si todos los eslabones que pivotan fueran del mismo tamaño, y la distancia entre las uniones sobre la estructura y el acoplador fueran idénticos, este mecanismo sería capaz de moverse con un grado de libertad. El eslabón central es redundante, mientras que como su longitud es idéntica a la de los otros dos eslabones sujetos a la estructura, no altera la acción del eslabonamiento.

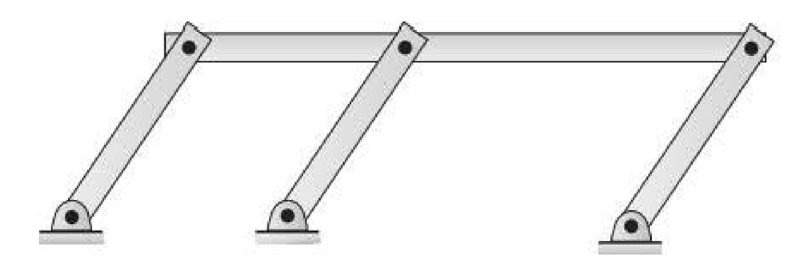


FIGURA 1.31 Mecanismo que transgrede la ecuación de Gruebler.

Hay varios ejemplos de mecanismos que transgreden la ecuación de Gruebler debido a su geometría única. Un diseñador debería estar consciente de que la ecuación de movilidad, en ocasiones, provoca inconsistencias.

1.9.3 Grados de libertad inactivos

En algunos mecanismos, los eslabones presentan movimientos que no influyen en la relación de entrada y salida del mecanismo. Estos *grados de libertad inactivos* muestran una situación donde la ecuación de Gruebler da resultados erróneos. Un ejemplo es una leva con un seguidor de rodillo como el que se presenta en la figura 1.32. La ecuación de Gruebler especifica dos grados de libertad (4 eslabones, 3 pernos, 1 unión de orden superior). Con un giro de la leva, el eslabón de pivote oscila, mientras el seguidor de rodillo gira alrededor de su centro. Sin embargo, únicamente el movimiento del eslabón de pivote sirve como salida del mecanismo. El giro del rodillo es de un grado de libertad inactivo y no busca afectar el movimiento de salida del mecanismo. Es una característica de diseño que reduce la fricción y el desgaste sobre la superficie de la leva. Mientras que la ecuación de Gruebler especifica que un mecanismo de leva con seguidor de rodillo tiene una movilidad de dos, el diseñador generalmente está interesado solo en un grado de libertad. Varios mecanismos contienen grados de libertad inactiva.

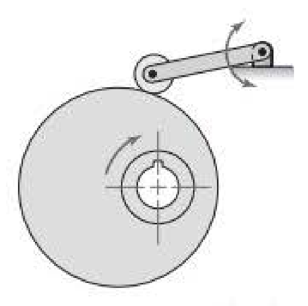


FIGURA 1.32 Leva con seguidor de rodillo.

1.10 EL MECANISMO DE CUATRO BARRAS

El eslabonamiento más simple y más común es el eslabonamiento de cuatro barras. Es una combinación de cuatro eslabones, uno designado como la bancada y conectado por cuatro uniones de perno. Como se le encuentra con mucha frecuencia, una revisión adicional no está de más.

La figura 1.33a muestra el mecanismo de un sistema de limpiador para el cristal trasero de un automóvil. El diagrama cinemático se presenta en la figura 1.33b. Observe que es un mecanismo de cuatro barras, ya que se integra con cuatro eslabones conectados por cuatro uniones de perno y un eslabón está impedido para moverse.

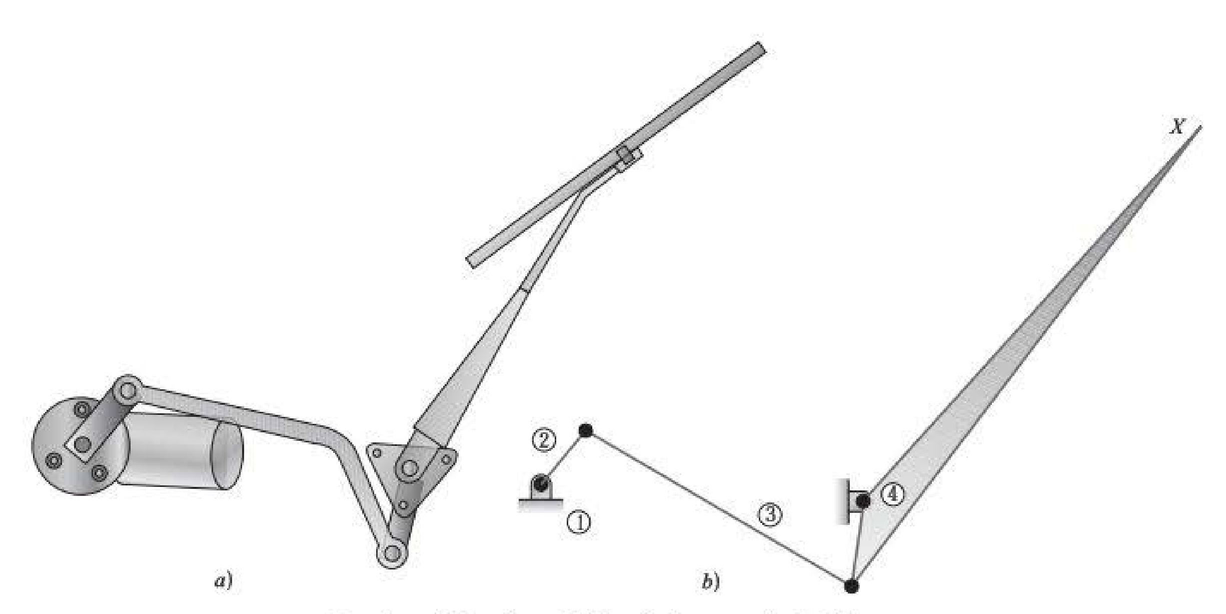


FIGURA 1.33 Mecanismo del limpiador para el cristal trasero.

La movilidad de un mecanismo de cuatro barras es como sigue:

$$n = 4, j_p = 4 \text{ pernos}, j_h = 0$$

y

$$M = 3(n-1) - 2j_p - j_h = 3(4-1) - 2(4) - 0 = 1$$

Como el mecanismo de cuatro barras tiene un grado de libertad, está restringido a un solo actuador o es totalmente operado por este. El sistema del limpiador de la figura 1.33 es activado por un motor eléctrico de corriente continua.

Por supuesto, el eslabón impedido para moverse se elige como la bancada. Por lo general, el eslabón pivote conectado al impulsor o a la fuente de potencia se conoce como *eslabón de entrada*. El otro eslabón pivote, sujeto a la bancada, se designa como el *eslabón de salida* o *seguidor*. El *acoplador* o *brazo conector* "acopla" el movimiento del eslabón de entrada con el del eslabón de salida.

1.10.1 Criterio de Grashof

La siguiente nomenclatura se utiliza para describir la longitud de los cuatro eslabones.

s = longitud del eslabón más corto
l = longitud del eslabón más largo
p = longitud de uno de los eslabones de longitud intermedia
q = longitud del otro eslabón de longitud intermedia

El teorema de Grashof establece que un mecanismo de cuatro barras tiene al menos un eslabón giratorio si:

$$s + l \leq p + q$$

A la inversa, los tres eslabones que no están fijos solamente oscilarán si:

$$s + l > p + q$$

Los mecanismos de cuatro barras caen en una de las cinco categorías listadas en la tabla 1.2.

TABLA 1.2 Categorías de los mecanismos de cuatro barras

Caso	Criterios	Eslabón más corto	Categoría
1	$s + l < p + q$	Triple balancín	Doble manivela
2	$s + l < p + q$	Lado	Manivela-balancín
3	$s + l < p + q$	Acoplador	Doble balancín
4	$s + l = p + q$	Cualquiera	Punto de cambio
5	$s + l > p + q$	Cualquiera	Triple balancín

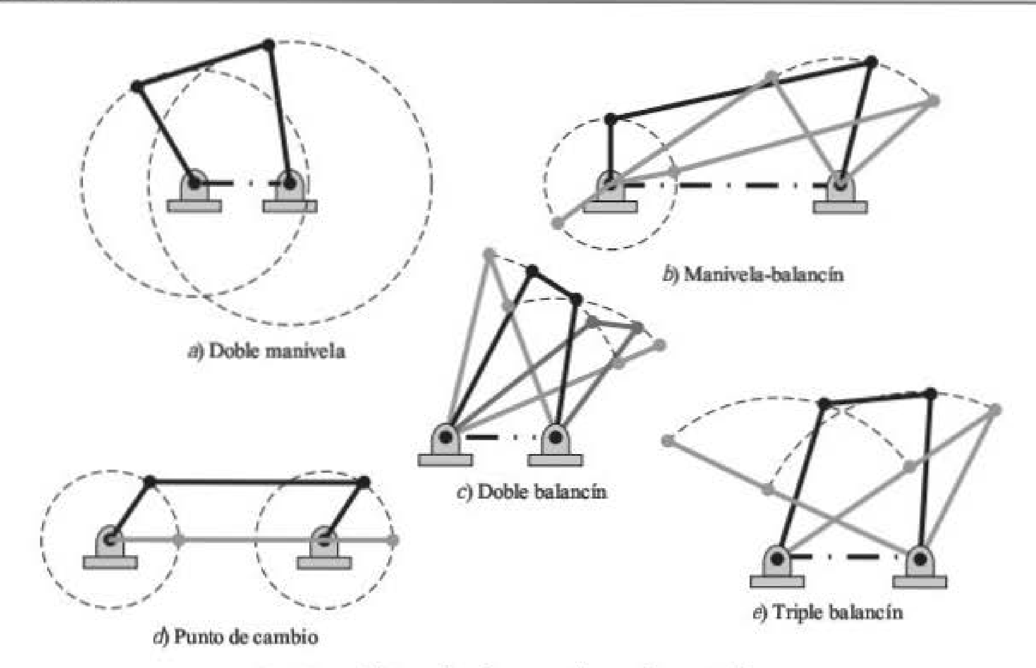


FIGURA 1.34 Categorías de mecanismos de cuatro barras.

Las diferentes categorías se muestran en la figura 1.34 y se describen en las siguientes secciones.

1.10.2 Doble manivela

En la figura 1.34a se ilustra una doble manivela o manivela-manivela. Como se explica en los criterios del caso 1 de la tabla 1.2, tiene el eslabón más corto del mecanismo de cuatro barras configurado como la bancada. Si uno de los eslabones pivote gira continuamente, el otro eslabón pivote también girará continuamente, de modo que los dos eslabones pivote, 2 y 4, pueden girar una revolución completa. El mecanismo de doble manivela también se conoce como mecanismo de eslabón de arrastre.

1.10.3 Manivela-balancín

En la figura 1.34b se ilustra un mecanismo de manivela-balancín. Como se especifica en los criterios del caso 2 de la tabla 1.2, tiene el eslabón más corto del mecanismo de cuatro barras adyacente a la bancada. Si este eslabón más corto gira continuamente, el eslabón de salida oscilará entre unos límites. Así, el eslabón más corto se conoce como *manivela*, y el eslabón de salida se conoce como *balancín*. El sistema del limpiador de la figura 1.33 se identifica como mecanismo de manivela-balancín. Conforme un motor hace girar continuamente el eslabón de entrada, el eslabón de salida oscila o "se balancea". El brazo y la hoja del limpiador están sujetos firmemente al eslabón de salida y el limpiador oscila sobre el parabrisas.

1.10.4 Doble balancín

En la figura 1.34c se presenta un doble balancín o balancín-balancín. Como se especifica en los criterios del caso 3 de la tabla 1.2, el eslabón más corto, del mecanismo de cuatro barras, está opuesto al configurado como la bancada. En esta configuración, ningún eslabón conectado a la bancada podrá completar una revolución. Por lo tanto, tanto el eslabón de entrada como el de salida están restringidos a oscilar entre ciertos límites, por lo que se conocen como balancines. No obstante, el acoplador sí completa una revolución.

1.10.5 Mecanismo de punto de cambio

En la figura 1.34d se muestra un mecanismo de punto de cambio. Como se especifica en los criterios del caso 4 de la tabla 1.2, la suma de dos lados es la misma que la suma de los otros dos. Con esta igualdad, el mecanismo de punto de cambio se posiciona, de modo que todos los eslabones se vuelvan colineales. El tipo más familiar del mecanismo de punto de cambio es el eslabonamiento que forma un paralelogramo. La bancada y el acoplador son de la misma longitud, de modo que son los eslabones pivote. Por consiguiente, los cuatro eslabones se traslaparán entre sí. En la configuración colineal, el movimiento se vuelve indeterminado. El movimiento puede permanecer en una configuración de paralelogramo o volverse una configuración contraria a un paralelogramo (o de mariposa). Por tal razón, el punto de cambio se conoce como una configuración de singularidad.

1.10.6 Triple balancín

En la figura 1.34e se muestra un mecanismo de triple balancín. Siguiendo los criterios del caso 5 de la tabla 1.2, el triple balancín no tiene eslabones que logren completar una revolución completa, de modo que los tres eslabones móviles se balancean.

PROBLEMA DE EJEMPLO 1.9

En la figura 1.35 se observa el ensamble del tren de aterrizaje de un avión pequeño. Clasifique el movimiento de este mecanismo de cuatro barras con base en la configuración de los eslabones.

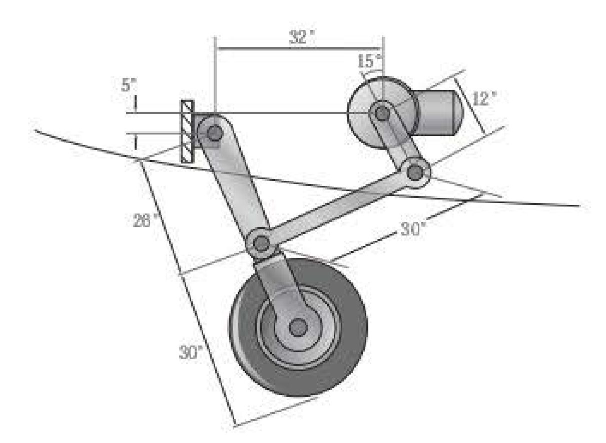


FIGURA 1.35 Ensamble del tren de aterrizaje del problema de ejemplo 1.9.

SOLUCIÓN: 1. ***Identifique los eslabones con base en la longitud***

En un análisis centrado en el tren de aterrizaje, el movimiento del ensamble de la rueda se determinaría en relación con el cuerpo del avión. Por lo tanto, el cuerpo de la aeronave se designa como la bancada. La figura 1.36 ilustra el diagrama cinemático del ensamble de la rueda, con la numeración e identificación de los eslabones. La punta de la rueda se designó como el punto de interés *X*.

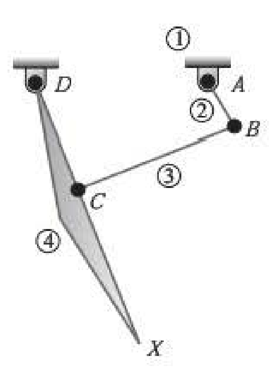


FIGURA 1.36 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 1.9.

Las longitudes de los eslabones son:

$$s = 12 \text{ in}; l = 32 \text{ in}; p = 30 \text{ in}; q = 26 \text{ in}$$

2. ***Compare criterios***

El eslabón más corto es el adyacente a la bancada. De acuerdo con el criterio de la tabla 1.2, tal mecanismo puede ser una manivela-balancín, un punto de cambio o un balancín triple. Se deben repasar los criterios de las diferentes categorías de los mecanismos de cuatro barras.

3. ***Verifique los criterios de manivela-balancín (caso 2)***

Los criterios son:

$$s + l < p + q$$
$$(12 + 32) < (30 + 26)$$
$$44 < 56 \quad \rightarrow \quad \{\text{sí}\}$$

Como los criterios de manivela-balancín son válidos, el ensamble del tren de aterrizaje es un mecanismo de manivela-balancín.

1.11 MECANISMO DE MANIVELA-CORREDERA

Otro mecanismo común es el de manivela-corredera, el cual consiste también en una combinación de cuatro eslabones, con uno designado como la bancada. Este mecanismo, sin embargo, está conectado por tres uniones de perno y una unión de corredera.

En la figura 1.37a se presenta un mecanismo que impulsa una bomba de agua manual. En la figura 1.37b se muestra el diagrama cinemático correspondiente.

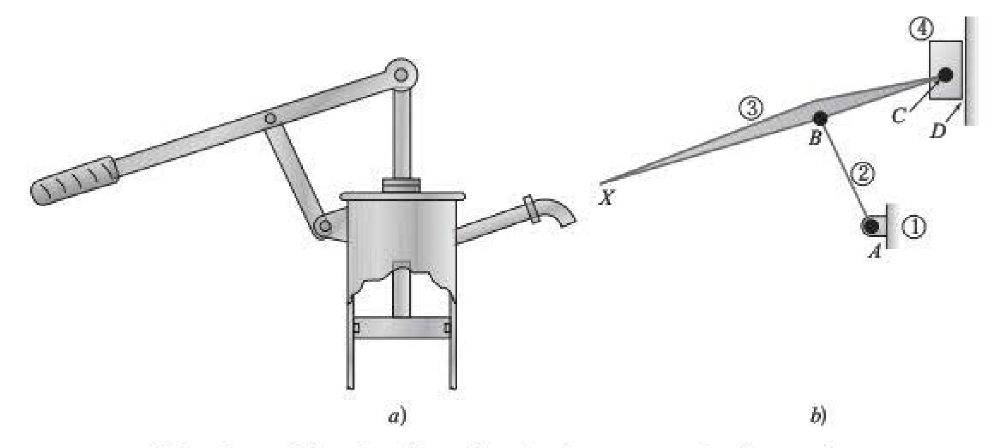


FIGURA 1.37 Mecanismo de bombeo de una bomba de agua manual: *a*) mecanismo y *b*) diagrama cinemático.

La movilidad del mecanismo manivela-corredera se representa como sigue:

$$n = 4, j_p = (3 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 4, j_h = 0$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h = 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1.$$

Como el mecanismo de manivela-corredera tiene un grado de libertad, está restringido para operar completamente con un impulsor. La bomba de la figura 1.37 se activa en forma manual empujando el mango (eslabón 3).

En general, el eslabón pivote conectado a la bancada se conoce como *manivela*. Este eslabón no siempre logra efectuar una revolución completa. El eslabón que mueve se conoce como *corredera*. Este eslabón es el pistón-varilla de la figura 1.37. El acoplador o biela "acopla" el movimiento de la manivela y la corredera.

1.12 MECANISMOS PARA PROPÓSITOS ESPECIALES

1.12.1 Mecanismos de línea recta

Los mecanismos de línea recta hacen que un punto tenga trayectoria en línea recta sin que esté guiado por una superficie plana. Históricamente, las uniones prismáticas de calidad que permiten el movimiento suave, recto, sin cambios bruscos, han sido difíciles de fabricar. Se han ideado diversos mecanismos que generan movimiento en línea recta (o casi en línea recta) con uniones y actuadores giratorios. La figura 1.38a presenta un eslabonamiento de Watt; la figura 1.38b, un eslabonamiento de Peaucellier-Lipkin.

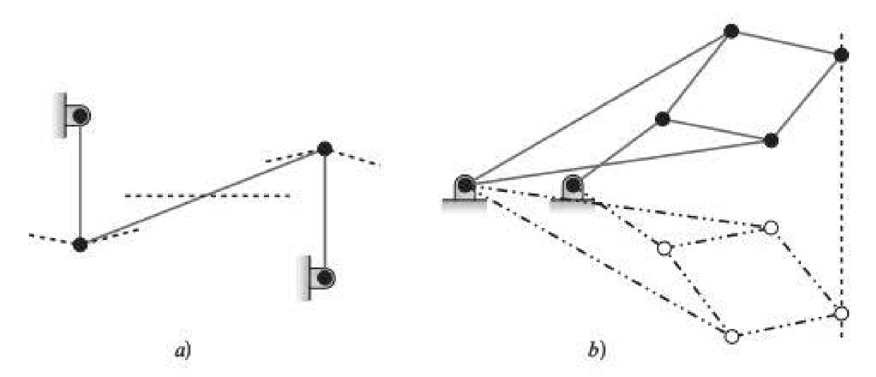


FIGURA 1.38 Mecanismos de línea recta.

1.12.2 Mecanismos de paralelogramo

Los mecanismos están formados con frecuencia por eslabones que integran paralelogramos para mover un objeto sin alterar su paso. Dichos mecanismos crean movimiento paralelo para aplicaciones como las básculas, el timón de planeadores y las persianas para ventanas. En la figura 1.39a se muestran dos tipos de eslabonamientos de paralelogramo con un eslabonamiento de tijera; la figura 1.39b, un eslabonamiento del transportador de una imprenta.

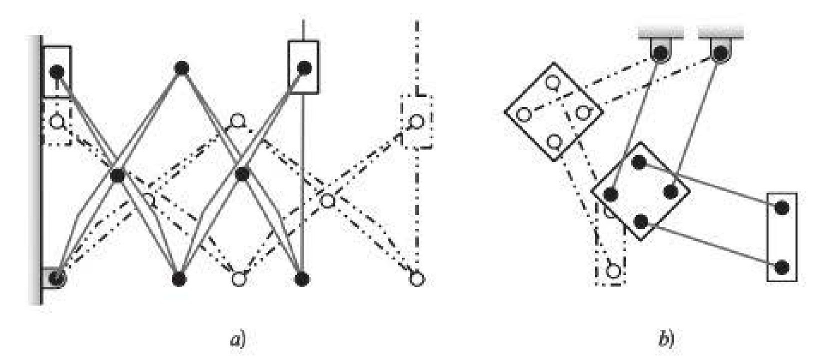


FIGURA 1.39 Mecanismos de paralelogramo.

1.12.3 Mecanismos de retorno rápido

Los mecanismos de retorno rápido tienen un avance más rápido en una dirección que en la otra, cuando son impulsados a velocidad constante con un actuador giratorio. Se utilizan comúnmente en máquinas-herramienta que requieren una carrera de corte lento y una de retorno rápido. En la figura 1.40 se observan dos mecanismos diferentes de retorno rápido. La figura 1.40a muestra un eslabonamiento de manivela-corredera descentrado; y la figura 1.40b, un eslabonamiento de manivela-cepillo limador.

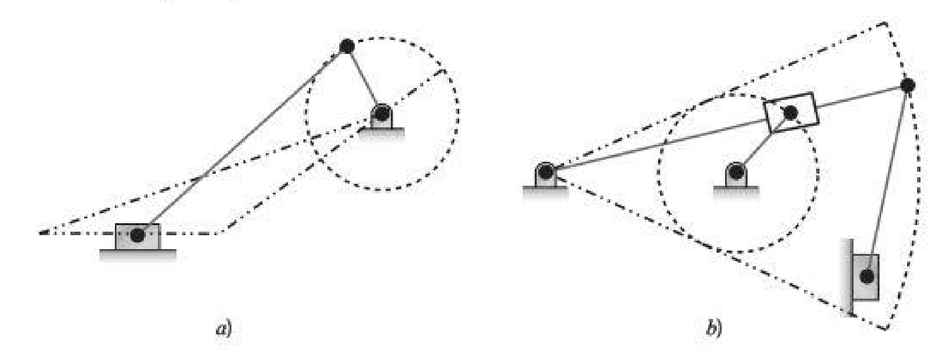
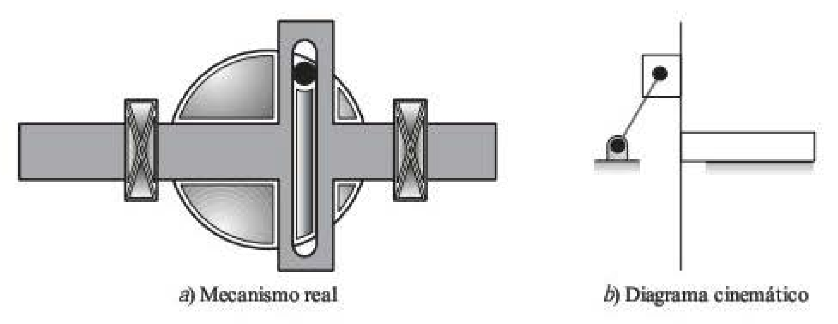


FIGURA 1.40 Mecanismos de retorno rápido.

1.12.4 Mecanismo de yugo escocés

Un mecanismo de yugo escocés es un mecanismo común que convierte el movimiento de rotación en un movimiento lineal deslizante, o viceversa. Como se indica en la figura 1.41, el perno de un eslabón giratorio está insertado en la ranura de un yugo corredizo. Con respecto al movimiento de entrada o salida, el yugo escocés es similar a la manivela-corredera, pero el movimiento deslizante lineal es una senoidal pura. En comparación con la manivela-corredera, el yugo escocés tiene la ventaja de menor tamaño y menos partes móviles, pero suele experimentar un desgaste rápido en la ranura.



a) Mecanismo real b) Diagrama cinemático

FIGURA 1.41 Mecanismo de yugo escocés.

1.13 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE MECANISMOS

La mayoría de los análisis de mecanismos implica geometría. Con frecuencia se utilizan métodos gráficos para que el movimiento de los mecanismos se logre visualizar con claridad. Las soluciones gráficas incluyen el dibujo de líneas "a escala" en ángulos específicos. Un ejemplo es el dibujo de un diagrama cinemático. La solución gráfica requiere la preparación de un dibujo que muestre todos los eslabones a escala proporcional con el mecanismo real. La orientación de los eslabones también se debe mostrar con los mismos ángulos del mecanismo real.

El método gráfico tiene la ventaja de facilitar la visualización y la solución del problema. Sin embargo, la exactitud sería difícil de lograr en comparación con los resultados de las técnicas analíticas. Durante muchas décadas, el análisis de mecanismos se realizó usando básicamente métodos gráficos. A pesar de su popularidad, muchas técnicas gráficas fueron desechadas por su falta de precisión. Sin embargo, el desarrollo de sistemas de diseño asistido por computadora (CAD) permitió que el enfoque gráfico se aplicara con precisión. Este texto intenta ilustrar los métodos más comunes que se utilizan en el análisis práctico de mecanismos. Cada uno de estos métodos se describe brevemente en las secciones siguientes.

1.13.1 Técnicas tradicionales de representación gráfica

Durante las últimas décadas, todos los análisis gráficos se realizaban usando técnicas de dibujo tradicionales. Se usaba equipo gráfico para dibujar las líneas a escala necesaria en ángulos específicos. El equipo utilizado para efectuar tales análisis incluía escuadras, reglas, compases, transportadores y escalímetros. Como se mencionó, este método era criticado con frecuencia por ser impreciso. Sin embargo, con atención adecuada a los detalles, se logran obtener soluciones precisas.

La rápida adopción del software de CAD en los últimos años fue lo que limitó el uso de las técnicas gráficas tradicionales. Aun cuando en la industria no tienen gran aplicación, muchos creen que las técnicas gráficas tradicionales se pueden enseñar todavía a los estudiantes para ilustrar los conceptos subyacentes en el análisis gráfico de mecanismos. Desde luego, tales conceptos son idénticos a los que se usan en el análisis gráfico con un sistema de CAD. Mediante las técnicas de dibujo tradicionales, el estudiante se concentra más en las teorías cinemáticas, en vez de "atorarse" aprendiendo los comandos de CAD.

1.13.2 Sistemas de CAD

Como se mencionó, el análisis gráfico se realiza usando procedimientos de dibujo tradicionales o un sistema de CAD, como se hace normalmente en la industria. Para el análisis de mecanismos, es posible utilizar cualquiera de los diversos sistemas de CAD disponibles comercialmente. El sistema de CAD bidimensional más común es AutoCAD. Si bien los comandos difieren entre uno y otro sistemas, todos los sistemas de CAD tienen la capacidad de dibujar con alta precisión las líneas con las longitudes y los ángulos designados. Esta es exactamente la característica requerida por el análisis gráfico de mecanismos. Además del aumento en la exactitud, otra ventaja de CAD es que las líneas no necesitan estar a escala para ajustarse sobre una pieza de papel de dibujo. En la computadora, las líneas se trazan sobre un papel "virtual" de tamaño infinito.

Asimismo, el modo de dibujo restringido en sistemas de modelado tridimensional, como Inventor, SolidWorks y Pro-Engineer, suelen ser extremadamente útiles en el análisis cinemático plano. Las restricciones geométricas, como la longitud, la perpendicularidad y el paralelismo, se deben cumplir al realizar el análisis cinemático. Tales restricciones se ejecutan de manera automática en el modo de dibujo de modelado en tres dimensiones.

Este texto no pretende estudiar exhaustivamente los comandos del sistema específico utilizado para dibujar las líneas, pero varios problemas de ejemplo se resuelven con un sistema de CAD. La meta principal de este libro es introducir y brindar el entendimiento de los conceptos del análisis de mecanismos. Tal objetivo se puede lograr sin tomar en cuenta el sistema de CAD específico que se utilice. Por ello, el estudiante no se debería preocupar por el sistema de CAD usado para llevar a cabo el análisis gráfico. Como en este caso, el estudiante no se debe preocupar si se usan gráficas manuales o de computadora para aprender el análisis de mecanismos.

1.13.3 Técnicas analíticas

Se pueden usar también los métodos analíticos para obtener resultados exactos. Las técnicas analíticas avanzadas involucran con frecuencia funciones matemáticas complejas, las cuales están más allá del alcance de este libro y del análisis rutinario de mecanismos. Asimismo, la importancia de los cálculos con frecuencia es difícil de visualizar.

Las técnicas analíticas incorporadas en esta obra son consistentes con las teorías geométricas, trigonométricas y del análisis gráfico de mecanismos que logra soluciones precisas, en tanto que las teorías gráficas permiten que se visualicen las soluciones. Este método tiene la desventaja de cálculos laboriosos para los mecanismos más complejos. Aun así, una gran parte de este texto está dedicada a las técnicas analíticas.

1.13.4 Métodos por computadora

Conforme se requieren soluciones analíticas más precisas para varias posiciones de un mecanismo, el número de cálculos se podría volver inmanejable. En tales casos, se recomienda el uso de una solución por computadora, las cuales también son valiosas cuando se deben analizar varias iteraciones en el diseño.

El método computacional para el análisis de mecanismos tiene varias formas:

- Las *hojas de cálculo* son muy comunes en la solución de problemas rutinarios de mecanismos. Una característica importante de las hojas de cálculo es que al cambiar los datos que se introducen en una celda, los demás resultados se actualizan automáticamente. Esto permite que las iteraciones en el diseño se realicen con facilidad. Conforme los problemas se vuelven más complejos, suele dificultarse su manejo con una hoja de cálculo. No obstante, a lo largo del texto se usan hojas de cálculo para resolver problemas.
- Se dispone de *programas de análisis dinámico comerciales*, como Working Model, ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems) o Dynamic Designer. Es posible crear modelos dinámicos de sistemas a partir de los menús de los componentes generales. Las versiones restringidas de los sistemas de modelado en tres dimensiones son programas de análisis dinámico. Hay paquetes completos de software más adecuados cuando el análisis cinemático y el dinámico forman una parte significativa del trabajo por realizar. El capítulo 2 está dedicado a programas de análisis dinámico.
- Es posible crear *programas de cómputo escritos por el usuario* en lenguajes de alto nivel como Matlab, Mathematica, VisualBasic o C++. El lenguaje de programación seleccionado debe tener acceso directo a funciones trigonométricas y a funciones trigonométricas inversas. Debido al

tiempo y al esfuerzo que se requieren para desarrollar programas especiales, estos son más efectivos cuando se necesita resolver un problema complejo que no se enfrenta cotidianamente. En el capítulo 8 se incluyen algoritmos simples para un análisis cinemático elemental.

PROBLEMAS

Problemas de elaboración de diagramas cinemáticos

1–1. En la figura P1.1 se muestra un mecanismo que sirve para abrir la puerta de un horno de tratamiento térmico. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo. El extremo del mango se debe definir como un punto de interés.

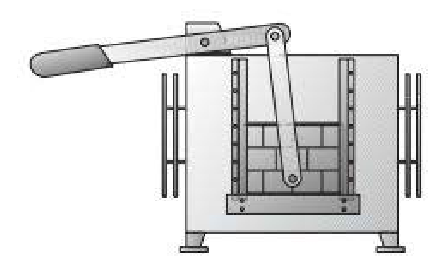


FIGURA P1.1 Problemas 1 y 26.

1–2. En la figura P1.2 se muestra una cortadora de pernos. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo, seleccionando el mango inferior como la bancada. Se deben identificar como puntos de interés el extremo del mango superior y la superficie cortante de las mordazas.

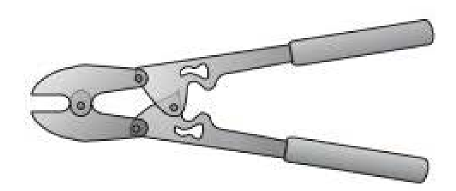


FIGURA P1.2 Problemas 2 y 27.

1–3. En la figura P1.3 se ilustra una silla plegable que se usa generalmente en los estadios. Elabore el diagrama cinemático del mecanismo plegadizo.

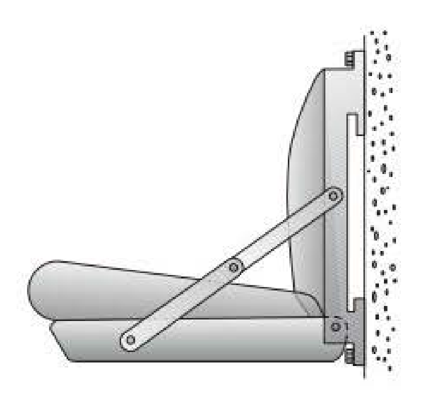


FIGURA P1.3 Problemas 3 y 28.

1–4. En la figura P1.4 se presenta una bomba de pedal que se utiliza para inflar neumáticos de bicicleta, juguetes, etcétera. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo de la bomba. El pedal se debe identificar como un punto de interés.

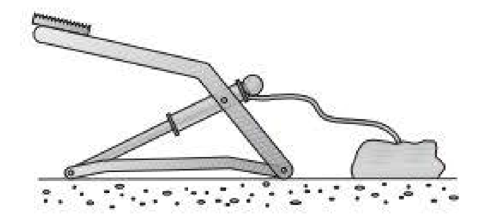


FIGURA P1.4 Problemas 4 y 29.

1–5. En la figura P1.5 se ilustran un par de tenazas. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

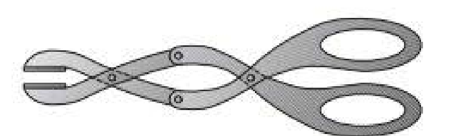


FIGURA P1.5 Problemas 5 y 30.

1–6. En la figura P1.6 se presenta otra configuración de un par de tenazas. Elabore el diagrama cinemático del mecanismo.

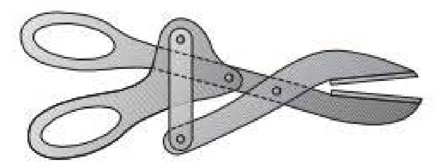


FIGURA P1.6 Problemas 6 y 31.

1–7. En la figura P1.7 se ilustra el mecanismo de una ventana. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

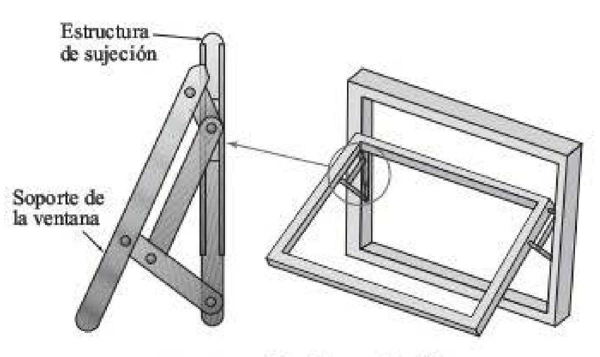


FIGURA P1.7 Problemas 7 y 32.

1–8. En la figura P1.8 se muestra otro mecanismo de una ventana. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

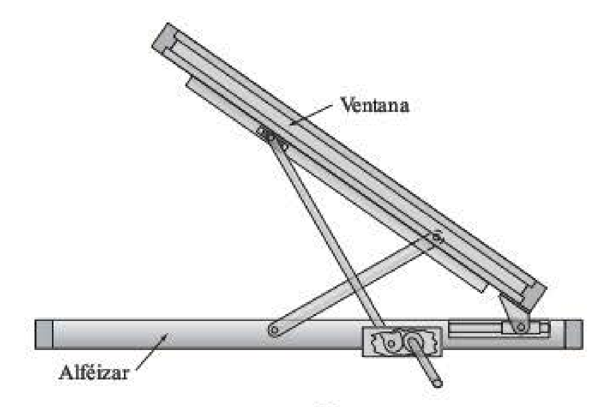


FIGURA P1.8 Problemas 8 y 33.

1–9. En la figura P1.9 se muestra una sujetadora de abrazadera que sirve para sostener una pieza de trabajo cuando se maquina. Dibuje un diagrama cinemático del mecanismo.

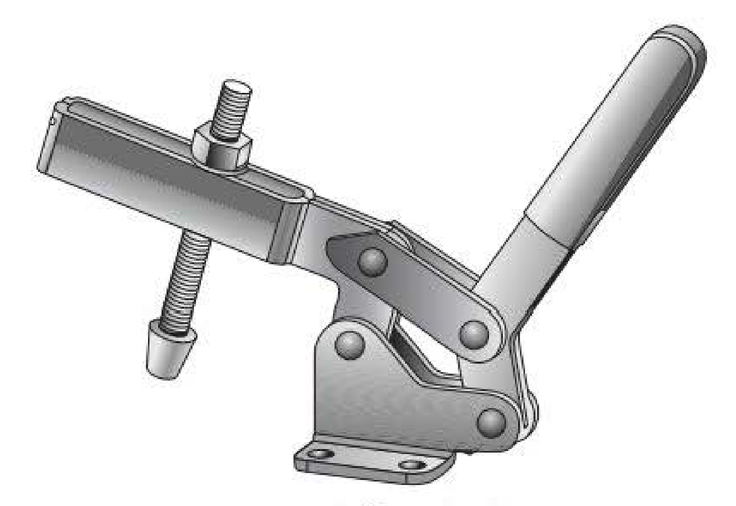


FIGURA P1.9 Problemas 9 y 34.

1–10. En la figura P1.10 se ilustra una excavadora de juguete que es común en muchos areneros municipales. Dibuje un diagrama cinemático del mecanismo.

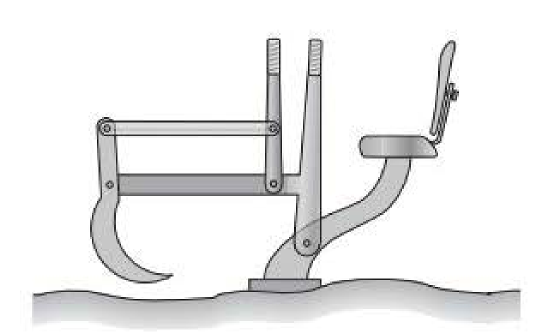


FIGURA P1.10 Problemas 10 y 35.

1–11. En la figura P1.11 se muestra una sierra reciprocante. Dibuje un diagrama cinemático del mecanismo que genera el movimiento reciprocante.

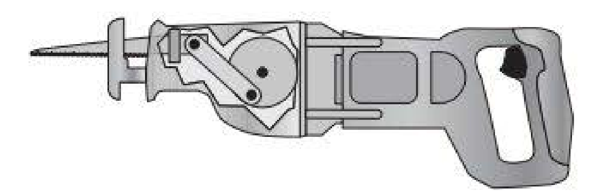


FIGURA P1.11 Problemas 11 y 36.

1–12. En la figura P1.12 se muestra un pequeño montacargas frontal. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

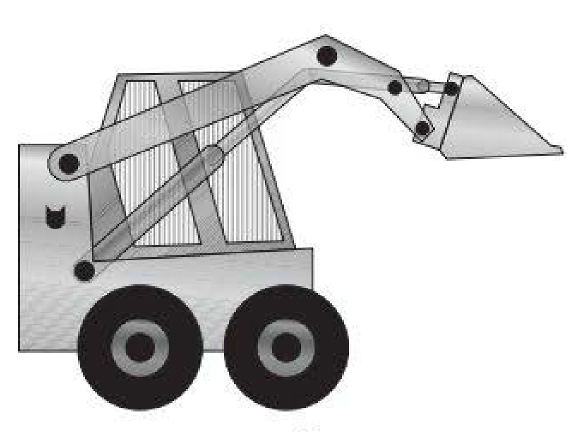


FIGURA P1.12 Problemas 12 y 37.

1–13. En la figura P1.13 se ilustra un esquema del transportador de un horno de microondas usado para ayudar a la gente en silla de ruedas. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

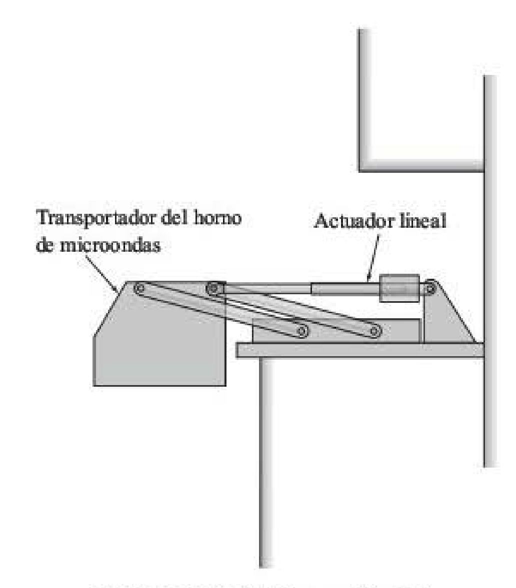


FIGURA P1.13 Problemas 13 y 38.

1–14. En la figura P1.14 se presenta el dibujo de un camión usado al entregar suministros para los pasajeros de aviones. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

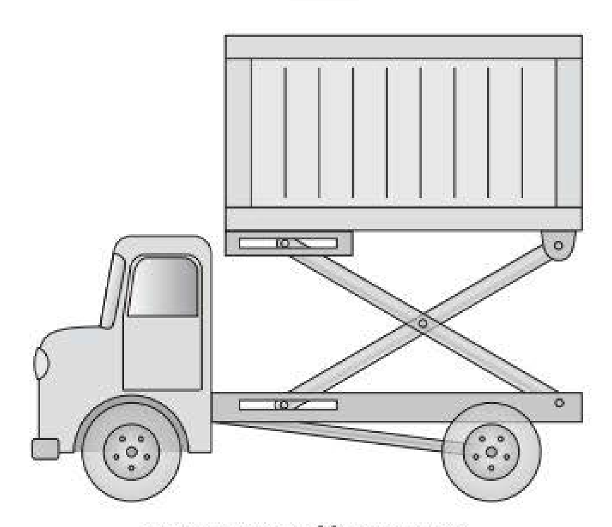


FIGURA P1.14 Problemas 14 y 39.

1–15. En la figura P1.15 se muestra el esquema de un dispositivo para mover paquetes de un banco de ensamble a una línea transportadora. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

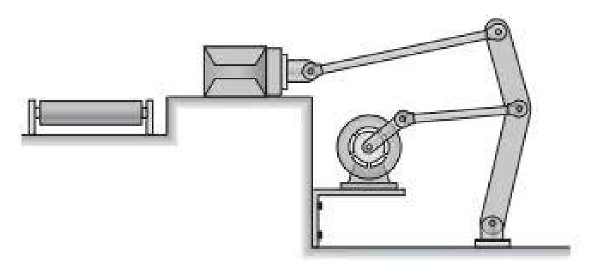


FIGURA P1.15 Problemas 15 y 40.

1–16. En la figura P1.16 se ilustra el esquema de una plataforma levadiza. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

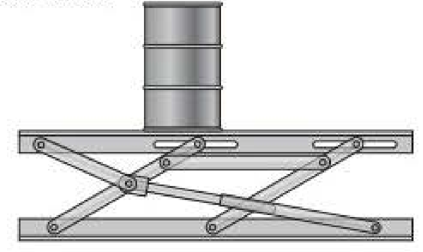


FIGURA P1.16 Problemas 16 y 41.

1–17. En la figura P1.17 se muestra el esquema de una plataforma levadiza. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

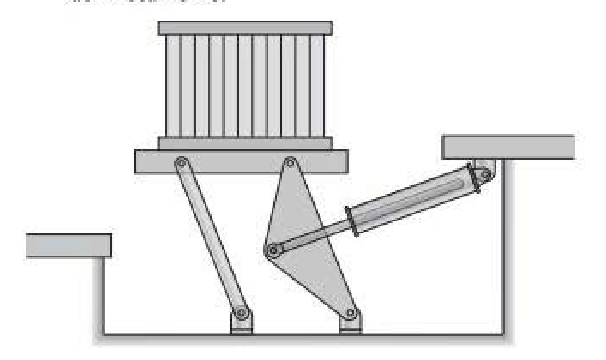


FIGURA P1.17 Problemas 17 y 42.

1–18. En la figura P1.18 se presenta el diagrama de un trascabo. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

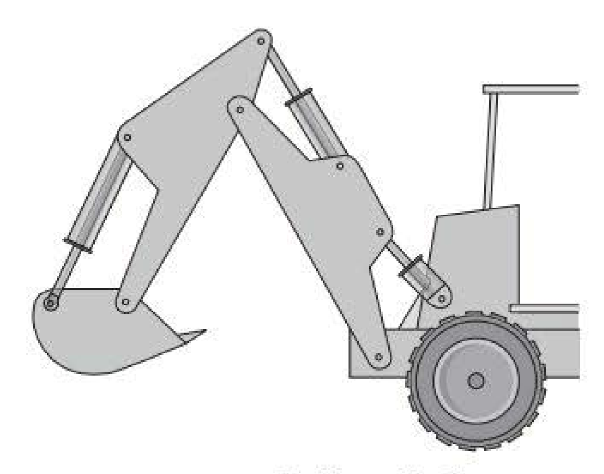


FIGURA P1.18 Problemas 18 y 43.

1–19. En la figura P1.19 se muestra el esquema de un montacargas frontal. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

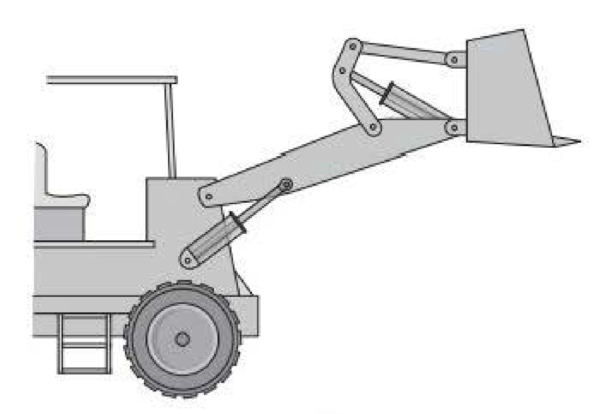


FIGURA P1.19 Problemas 19 y 44.

1–20. En la figura P1.20 se ilustra el esquema de una plataforma de altura ajustable que sirve para cargar y descargar camiones de carga. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

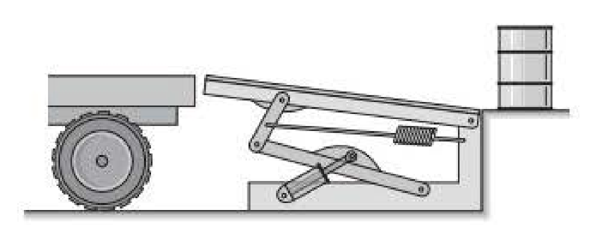


FIGURA P1.20 Problemas 20 y 45.

1–21. En la figura P1.21 se muestra el esquema de un transportador de electrodomésticos para cocina. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

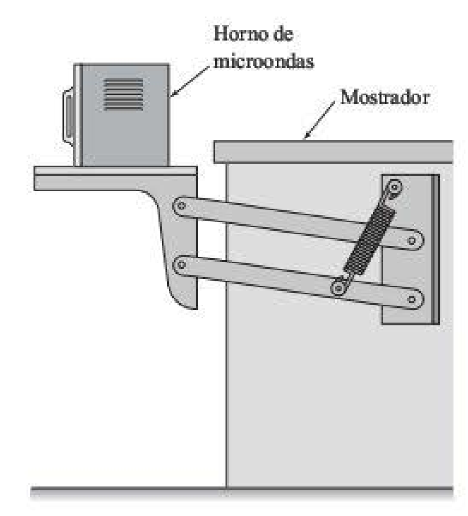


FIGURA P1.21 Problemas 21 y 46.

1–22. En la figura P1.22 se muestra el esquema de un elevador para la ventana de un automóvil. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

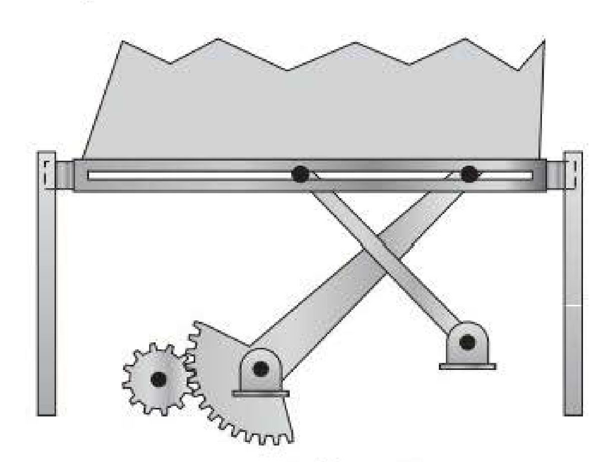


FIGURA P1.22 Problemas 22 y 47.

1–23. En la figura P1.23 se muestra el esquema de un dispositivo para cerrar las solapas superiores de cajas. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

1–24. En la figura P1.24 se muestra el esquema de una máquina de coser. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

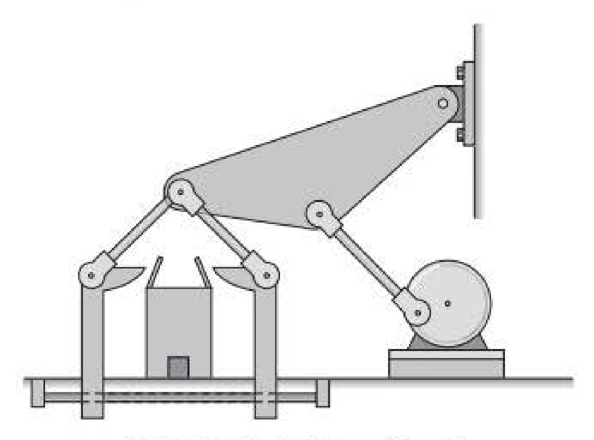


FIGURA P1.23 Problemas 23 y 48.

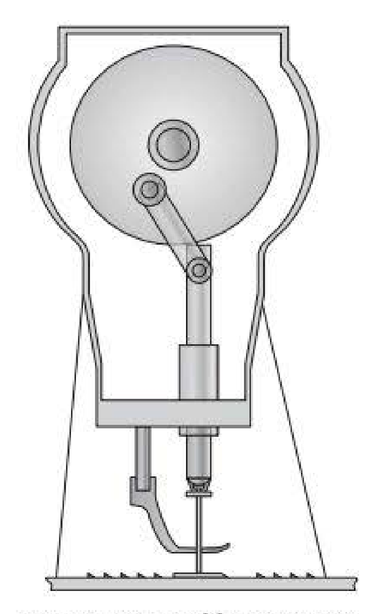


FIGURA P1.24 Problemas 24 y 49.

1–25. En la figura P1.25 se muestra el esquema de un componente del dispositivo de pruebas de desgaste. Dibuje el diagrama cinemático del mecanismo.

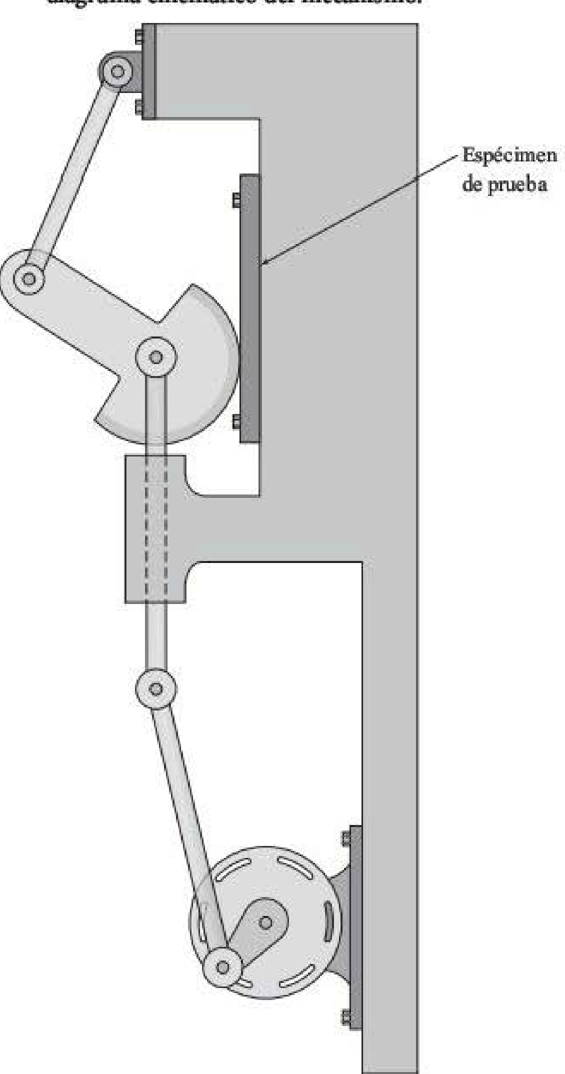


FIGURA P1.25 Problemas 25 y 50.

Problemas de cálculo de movilidad

Especifique el número de eslabones y de uniones y, luego, calcule la movilidad del mecanismo mostrado en la figura.

1–26. Utilice la figura P1.1
1–27. Utilice la figura P1.2
1–28. Utilice la figura P1.3
1–29. Utilice la figura P1.4
1–30. Utilice la figura P1.5
1–31. Utilice la figura P1.6
1–32. Utilice la figura P1.7
1–33. Utilice la figura P1.8
1–34. Utilice la figura P1.9
1–35. Utilice la figura P1.10
1–36. Utilice la figura P1.11
1–37. Utilice la figura P1.12
1–38. Utilice la figura P1.13
1–39. Utilice la figura P1.14
1–40. Utilice la figura P1.15
1–41. Utilice la figura P1.16
1–42. Utilice la figura P1.17
1–43. Utilice la figura P1.18
1–44. Utilice la figura P1.19
1–45. Utilice la figura P1.20
1–46. Utilice la figura P1.21
1–47. Utilice la figura P1.22
1–48. Utilice la figura P1.23
1–49. Utilice la figura P1.24
1–50. Utilice la figura P1.25

Problemas de clasificación de mecanismos de cuatro barras

1–51. En la figura P1.51 se ilustra un mecanismo para rociar agua sobre los vehículos en un servicio de lavado automático de automóviles. Clasifique el mecanismo de cuatro barras con base en su posible movimiento, cuando las longitudes de los eslabones son $a = 12$ in, $b = 1.5$ in, $c = 14$ in y $d = 4$ in.

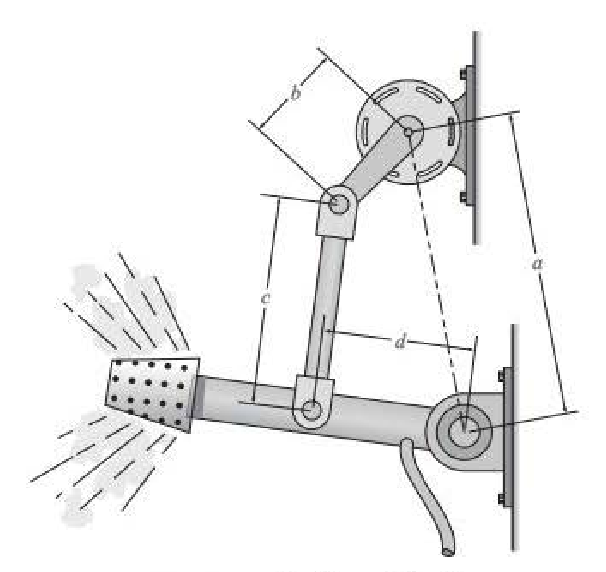


FIGURA P1.51 Problemas 51 a 54.

1–52. Clasifique el mecanismo de cuatro barras del rociador de agua de la figura P1.51, con base en su posible movimiento, cuando las longitudes de los eslabones son $a = 12$ in, $b = 5$ in, $c = 12$ in y $d = 4$ in.

1–53. Clasifique el mecanismo de cuatro barras del rociador de agua de la figura P1.51, con base en su posible movimiento, cuando las longitudes de los eslabones son $a = 12$ in, $b = 3$ in, $c = 8$ in y $d = 4$ in.

1–54. Clasifique el mecanismo de cuatro barras del rociador de agua de la figura P1.51, con base en su posible movimiento, cuando las longitudes de los eslabones son $a = 12$ in, $b = 3$ in, $c = 12$ in y $d = 5$ in.

ESTUDIOS DE CASO

1–1. El mecanismo que se muestra en la figura C1.1 se ha tomado del dispositivo alimentador de una máquina automática ensambladora de cojinetes de bolas. El motor eléctrico está sujeto al eslabón *A* como se indica. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo. Luego conteste las siguientes preguntas para conocer más acerca de la operación del mecanismo.

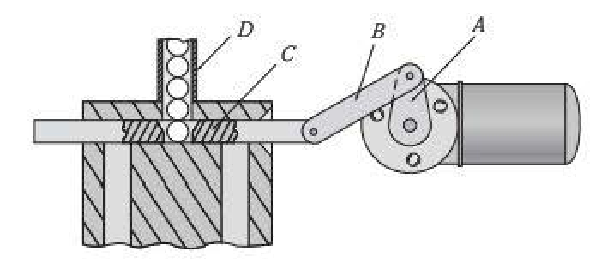


FIGURA E1.1 (Cortesía de Industrial Press, Inc.).

1. Conforme el eslabón *A* gira 90° en el sentido horario (de las manecillas del reloj), ¿qué pasará con el eslabón *C*?
2. ¿Qué sucede con la esfera atrapada en el deslizador *C* cuando está en esa posición?
3. Conforme el eslabón *A* continúa girando otros 90° en el sentido horario, ¿qué acción ocurre?
4. ¿Cuál es el objetivo de este dispositivo?
5. ¿Por qué hay chaflanes en la entrada del rodadero *C*?
6. ¿Por qué cree que se necesita este dispositivo?

1–2. La figura E1.2 ilustra un mecanismo que es común en el tanque de agua de un retrete. Observe que la válvula *C* está hueca y llena con aire atrapado. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para conocer más acerca de la operación del mecanismo.

1. Conforme el mango *A* gira en el sentido antihorario, ¿cómo se mueve la tapa *C*?
2. Cuándo la válvula *C* se eleva, ¿qué efecto se produce?
3. Cuando la válvula *C* está levantada, tiende a permanecer en una posición hacia arriba por un tiempo. ¿Qué causa la tendencia de mantener levantada la válvula?
4. ¿Cuándo termina de producirse esta tendencia (de mantener levantada la válvula *C*)?

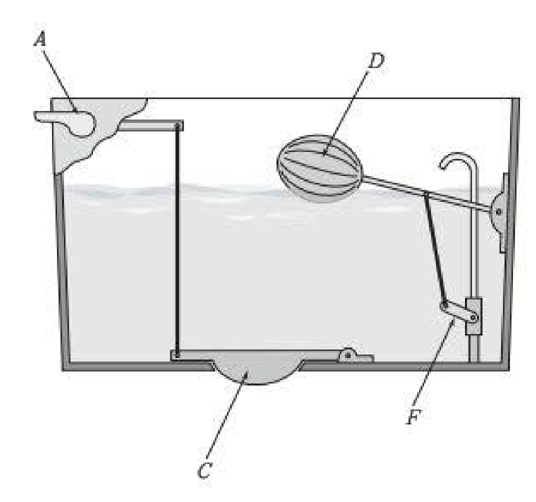


FIGURA E1.2 (Cortesía de Industrial Press, Inc.).

5. ¿Qué efecto hará que se mueva el flotador *D*?
6. Conforme el flotador *D* se mueve en sentido antihorario, ¿qué pasa con el eslabón *F*?
7. ¿Qué controla el eslabón *F*?
8. ¿Cuál es la operación completa de este mecanismo?
9. ¿Por qué se necesitan este mecanismo y el almacenamiento de agua en el tanque?

1–3. La figura E1.3 muestra un mecanismo que guía las varillas nuevas de acero hacia un dispositivo que las enrolla en carretes. Las varillas están calientes cuando se fabrican, por lo que se utiliza agua para ayudar al proceso de enfriamiento. Las varillas pueden tener varios miles de pies de longitud, y se deslizan a una rapidez de hasta 25 millas por hora a través del canal *S*.

Una vez que el carrete está lleno, se remueve con la varilla enredada. Para obtener alta eficiencia, las varillas se siguen muy de cerca unas con otras. Resulta imposible remover el carrete en un intervalo de tiempo corto; por lo tanto, es deseable usar dos carretes alternadamente. Este mecanismo se ha diseñado para alimentar las varillas a los carretes.

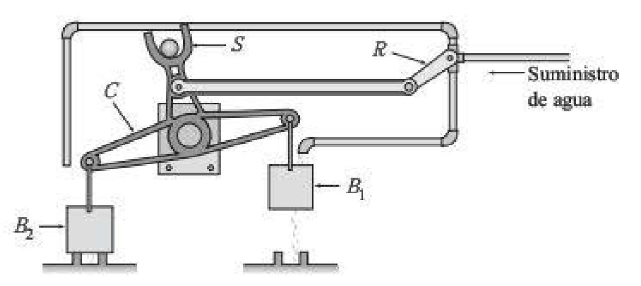


FIGURA E1.3 (Cortesía de Industrial Press, Inc.).

Los cubos B_1 y B_2 tienen orificios en el fondo. El flujo de agua del suministro es mayor que el volumen de agua que se escapa por los orificios. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de la operación del mecanismo.

1. En la configuración mostrada, ¿qué sucede con el nivel de agua en el cubo B_1?
2. En la configuración mostrada, ¿qué sucede con el nivel de agua en el cubo B_2?
3. ¿Qué pasaría con el brazo balancín *C* si el cubo B_2 se forzara hacia arriba?
4. ¿Qué pasaría con el brazo balancín *R* si el cubo B_2 se forzara hacia arriba?
5. ¿Qué controla el brazo balancín *R*?
6. ¿Cómo es el movimiento continuo de este dispositivo?
7. ¿Cómo permite este dispositivo que se usen dos carretes separados en la situación descrita?
8. ¿Por qué supone que se utiliza agua como fuente de energía para la operación de este mecanismo?

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE MECANISMOS EN COMPUTADORA USANDO EL SOFTWARE WORKING MODEL®

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Entender el uso del software comercial para el análisis de mecanismos.**
2. **Utilizar Working Model® para construir modelos cinemáticos de mecanismos.**
3. **Usar Working Model® para animar el movimiento de mecanismos.**
4. **Utilizar Working Model® para determinar los valores cinemáticos de un mecanismo.**

2.1 INTRODUCCIÓN

El rápido desarrollo de las computadoras y del software ha modificado la forma en que se realizan muchas tareas de ingeniería. Para el estudio de los mecanismos se han desarrollado paquetes de software que permiten a un diseñador construir modelos virtuales de un mecanismo. Los modelos virtuales muestran al diseñador la simulación total de una máquina. La simulación facilita a los ingenieros crear y probar prototipos del producto en sus computadoras de escritorio. Los errores de diseño se aíslan y eliminan rápidamente, reduciendo así los gastos en la elaboración de un prototipo y acelerando, a la vez, el ciclo de desarrollo del producto.

Los paquetes de software resuelven ecuaciones cinemáticas y dinámicas, determinan los valores del movimiento y de las fuerzas en el mecanismo durante la operación. Además del análisis numérico, el software anima un modelo en computadora del mecanismo, lo cual permite visualizar el diseño en acción.

Este capítulo sirve fundamentalmente como guía en la simulación de máquinas y mecanismos con el software Working Model®. Aun cuando los valores cinemáticos generados durante el análisis quizá no se entiendan por completo, la visualización del mecanismo suele ser muy entendible. El material presentado en varios de los capítulos siguientes permitirá al lector entender las soluciones numéricas del software dinámico. El dominio de este tipo de software de análisis de mecanismos, junto con un conocimiento sólido del análisis cinemático y dinámico, ofrece una base sólida para el diseño de máquinas.

2.2 SIMULACIÓN POR COMPUTADORA DE MECANISMOS

Además de Working Model® también están disponibles otros programas de análisis dinámico, como ADAMS® (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems), Dynamic Designer®, LMS Virtual.Lab y Analytix®. Todos permiten la creación de un mecanismo, a través de menús o iconos, de los componentes generales. Los componentes generales incluyen aquellos que se presentaron en el capítulo 1, como eslabones simples y complejos, uniones de pernos, uniones de corredera y uniones de engranes. El mecanismo se opera seleccionando del menú los componentes del actuador, tales como motores o cilindros.

En el diseño de máquinas, una de las causas de la adopción generalizada del modelado tridimensional es que prepara el escenario para muchos usos auxiliares: los planos de ejecución se pueden crear más o menos automáticamente, se generan presentaciones que se asemejan estrechamente a la máquina real y los prototipos se elaboran con facilidad. Muchos productos que funcionan con el software de modelado tridimensional están disponibles para analizar la integridad estructural de los componentes de la máquina. Asimismo, el estudio del movimiento y las fuerzas en mecanismos y ensambles móviles se está volviendo casi un efecto colateral del modelado tridimensional. La figura 2.1 ilustra el diseño de un modelo tridimensional analizado con Dynamic Designer dentro del Autodesk Inventor® Environment.

Sin importar el software que se utilice, la estrategia general para realizar el análisis dinámico se resume como sigue:

1. Definir un conjunto de cuerpos rígidos (tamaños, pesos y propiedades inerciales), los cuales se construyen con el paquete de diseño de modelado tridimensional.
2. Determinar las restricciones sobre los cuerpos rígidos (conectando los cuerpos rígidos con uniones).
3. Especificar el movimiento de entrada (definir las propiedades del motor impulsor, cilindro, etcétera) o las fuerzas de entrada.
4. Correr el análisis.
5. Repasar el movimiento de los eslabones y las fuerzas en el mecanismo.

Desde luego, los comandos específicos variarán entre los diferentes paquetes. Las secciones siguientes del capítulo se enfocan en los detalles del análisis de mecanismos con Working Model 2D®. Como con cualquier software, el conocimiento se adquiere practicando y ejecutando otros análisis, además de los ejemplos, de modo que se invita al lector a explorar el software "inventando" diversas máquinas virtuales.

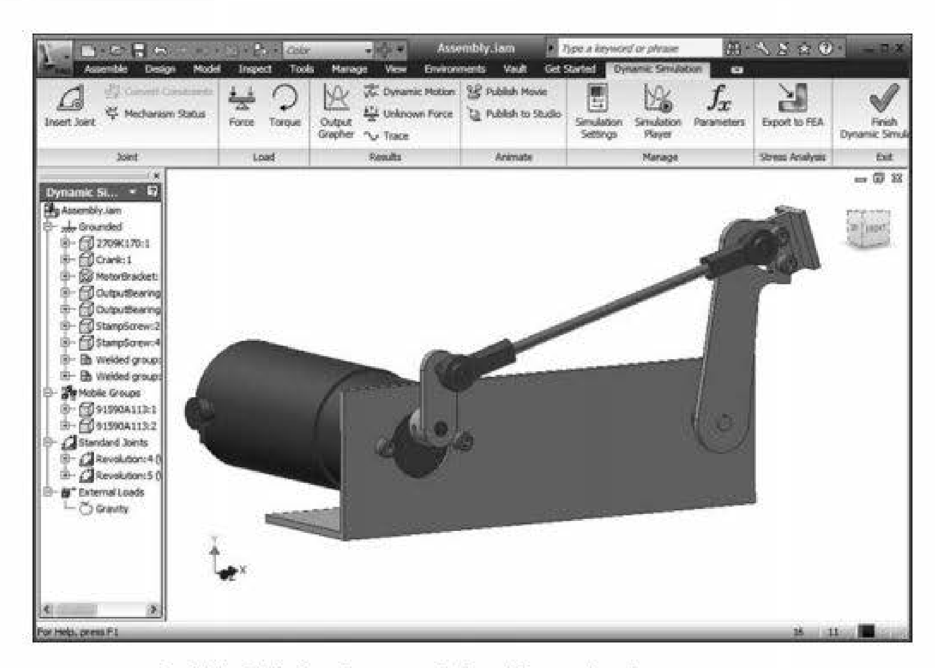


FIGURA 2.1 Análisis dinámico de un modelo tridimensional.

2.3 ADQUISICIÓN DEL SOFTWARE WORKING MODEL

Working Model 2D fue creado por Design Simulation Technologies, que también lo distribuye. Se pueden comprar en línea copias del software, con descuentos significativos para estudiantes, en el sitio http://www.workingmodel.com o en http://www.designsimulation.com. Hay una versión descargable de demostración gratis de Working Model 2D, la cual facilita a los estudiantes la creación de "prototipos virtuales" totalmente funcionales de diseños de mecanismos complejos. Sin embargo, algunas funcionalidades están desactivadas; las más notables son las funciones Save y Print. Fuera de ello, esta versión ofrece una excelente introducción a la construcción de modelos de mecanismos por computadora. Para mayor información contacte a Design Simulation Technologies, Inc., en 43311 Joy Road, #237, Canton, MI 48187, (714) 446-6935.

Conforme se actualiza Working Model 2D, los menús e iconos se vuelven ligeramente diferentes de los que se muestran en los ejemplos de este texto. No obstante, con un poco de intuición, el estudiante puede adaptarse y realizar con éxito la simulación de mecanismos.

2.4 USO DE WORKING MODEL PARA MODELAR UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS

Como se mencionó, Working Model es un software popular de simulación de movimiento disponible comercialmente. En una computadora personal, crea rápidamente un modelo que representa un sistema mecánico y aplica un análisis dinámico. En esta sección se utiliza Working Model para construir el modelo de un mecanismo de cuatro barras y correr una simulación [ref. 16]. Se intenta que funja como guía, es decir, debería funcionar en la realidad como lo hace Working Model. Se invita al lector a practicar con el software realizando análisis adicionales.

Paso 1: Abrir Working Model

1. Haga clic sobre el icono del software Working Model para iniciar el programa.
2. Cree un nuevo documento de Working Model seleccionando "New" del menú "File".
   Working Model despliega una interfase del usuario. Aparecen las barras de herramientas que sirven para crear eslabones, uniones y actuadores de mecanismos a los lados de la pantalla. En la parte inferior están los controles que se utilizan para correr y observar las simulaciones.
3. Especifique las unidades que se emplearán en la simulación. Seleccione "Numbers and Units" en el menú "View". Cambie "Unit System" a inglés (libras).
   Las unidades para mediciones lineales serán pulgadas (in), los ángulos se medirán en grados (deg) y las fuerzas se especificarán en libras (lb).

Paso 2: Crear los eslabones

Este paso da como resultado los tres eslabones móviles en el mecanismo de cuatro barras. El fondo de la pantalla sirve como el cuarto eslabón, el fijo.

1. Construya el mecanismo creando los tres eslabones que no están fijos. Haga doble clic en la herramienta rectángulo que está en la barra de herramientas.
   Se resalta la herramienta indicando que se puede usar varias veces.
2. Con la herramienta rectángulo, bosqueje tres cuerpos como se indica en la figura 2.2.
   Los rectángulos se dibujan posicionando el ratón en la primera esquina, dando clic una vez y moviendo luego el ratón a la esquina opuesta, donde se da otro clic. Los rectángulos se definen paramétricamente, en tanto que su tamaño exacto se especifica más adelante.
3. Abra la ventana de "Properties" y la ventana "Geometry" en el menú "Window".

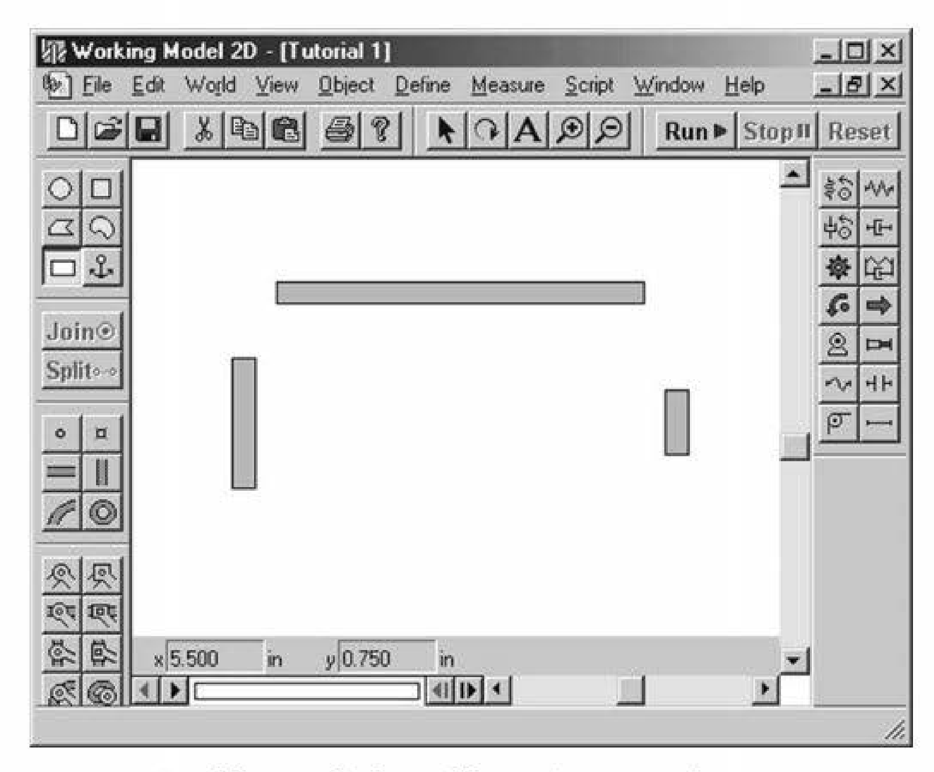


FIGURA 2.2 Tres eslabones graficados con la herramienta rectángulo.

Esto despliega información acerca de los eslabones y permite editar la información.

4. Use la ventana "Properties" para cambiar el centro del eslabón horizontal a $x = 0, y = 0, \phi = 0$.
La ubicación del rectángulo debería cambiar de acuerdo con los datos introducidos.
5. Utilice la ventana "Geometry" para cambiar el ancho del rectángulo horizontal a 8.5 in y la altura a 0.5 in.
Cambiará la forma del rectángulo.
6. De la misma manera, use las ventanas "Properties" y "Geometry" para ubicar el centro del eslabón vertical grande en $x = -5, y = -3$ y que tenga un ancho de 0.5 y una altura de 3. Cambie también el eslabón vertical pequeño para centrarlo en $x = 5, y = -3$, con un ancho de 0.5 y una altura de 1.5.
Otra vez, la forma y la ubicación del rectángulo deberían cambiar de acuerdo con los datos que se introdujeron.
7. Cierre las ventanas de "Properties" y "Geometry".
8. Se puede usar el icono zoom (lupa) para ver adecuadamente los eslabones.

Paso 3: Ubicar los puntos de interés sobre los eslabones

Este paso enseña el uso de la herramienta "Object Snap" para ubicar los puntos de interés con precisión. La opción de "Object Snap" resalta las posiciones que se utilizan comúnmente, como el centro de un lado, por ejemplo, con una "X". Cuando se ubica un punto con "Object Snap", la posición del punto se define automáticamente con ecuaciones paramétricas. Estas ecuaciones garantizan que el punto mantenga su posición relativa aun después de modificar el tamaño del eslabón o de efectuar otros ajustes.

1. Haga doble clic en la herramienta punto. El icono es un círculo pequeño.
La herramienta punto se resalta, lo cual indica que se puede usar varias veces, sin necesidad de seleccionarla cada vez que se bosqueje un nuevo punto.
2. Mueva el cursor sobre uno de los eslabones.
Observe que aparece una "X" cerca del apuntador cuando se centra en un lado, una esquina o el centro de un rectángulo. A esta funcionalidad se le llama "Object Snap" y resalta las partes que se usan comúnmente en un eslabón.
3. Coloque el cursor sobre la parte superior de uno de los eslabones verticales. Cuando aparezca una "X" cerca del apuntador (figura 2.3), haga clic en el botón del ratón.
4. Coloque los puntos adicionales, como se indica en la figura 2.3.
Asegúrese de que cada uno de estos puntos se ubique en un "punto de ajuste", con la evidencia de la "X", que debe aparecer en el apuntador.
5. Seleccione la herramienta apuntador. El icono es una flecha que apunta hacia arriba a la izquierda.
6. Haga doble clic sobre uno de los puntos que se establecieron en los pasos 3 y 4 para abrir la ventana "Properties".
7. Observe que los puntos "se ajustaron" a la mitad del ancho del cuerpo desde los tres bordes. Lo anterior dará como resultado una longitud efectiva en el eslabón de 8.0, 2.5 y 1.0 in.

Paso 4: Unir los puntos para crear uniones de perno

Este paso une los puntos para crear uniones de perno. Una unión de perno actúa como una bisagra entre dos cuerpos. SmartEditor evita la rotura de las uniones durante una operación de arrastre.

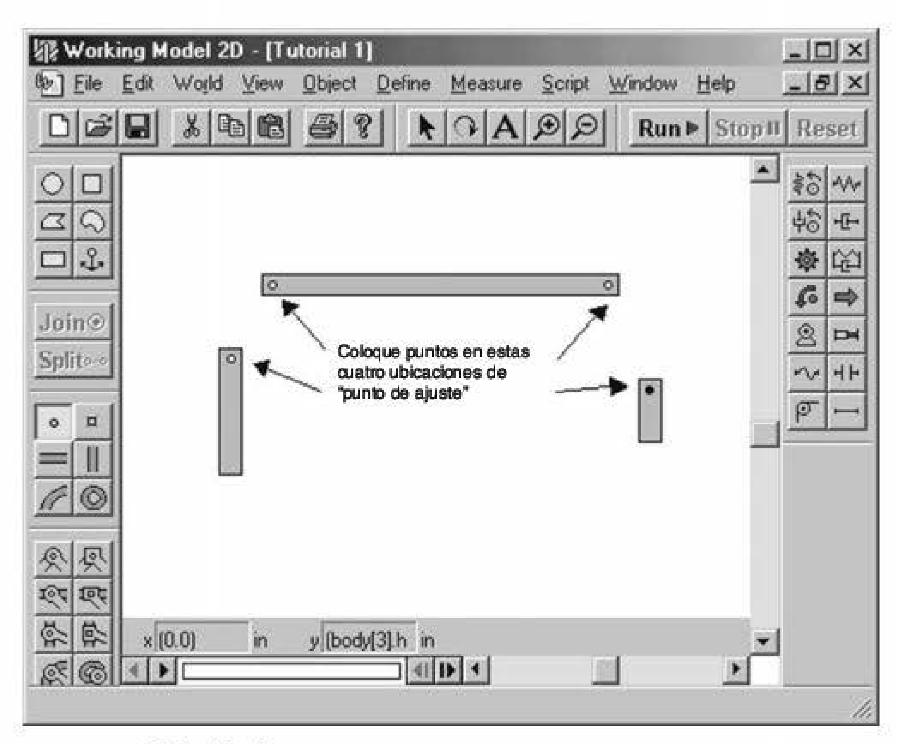


FIGURA 2.3 Ubicación de puntos.

1. Seleccione la herramienta ancla.
2. Haga clic en el eslabón horizontal para anclarlo (sujetarlo). *Se utiliza una ancla para indicar a SmartEditor que este cuerpo no se debe mover durante la construcción del mecanismo. Después de que se hayan creado las uniones de perno, tiene que borrarse el ancla.*
3. Seleccione la herramienta apuntador.
4. Con la herramienta apuntador activada, haga clic y arrastre el apuntador sobre el fondo de la pantalla, para seleccionar un cuadro que rodee los dos puntos de la izquierda, como se indica en la figura 2.4. Suelte el botón del ratón; ahora los dos puntos deben quedar resaltados (oscurecidos).
Este método de selección de objetos se conoce como "selección por cuadros". Cualquier objeto que esté completamente contenido dentro del cuadro se resalta cuando se suelta el ratón.
5. Haga clic sobre el botón "Join" de la barra de herramientas, fusionando los dos puntos en una unión de perno.

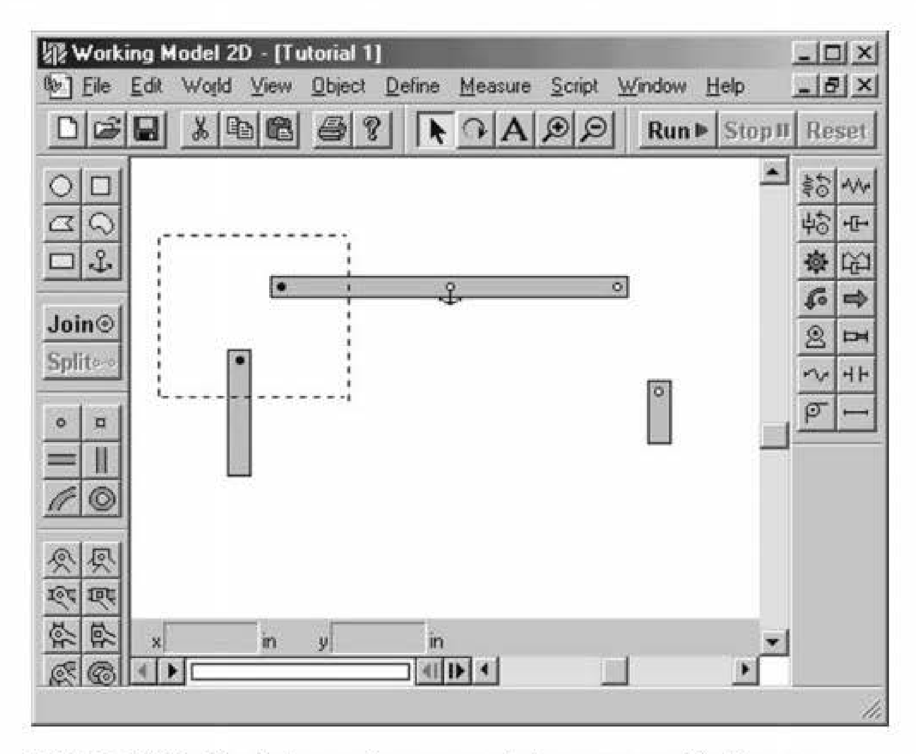


FIGURA 2.4 Selección de dos puntos para conectarlos con una unión de perno.

SmartEditor crea una unión de perno entre los dos puntos seleccionados, moviendo a ese lugar el eslabón que no está anclado. El eslabón que se movió quizá pierda su verticalidad. Este se fija en un momento.

6. Realice los pasos 4 y 5 para los dos puntos de la derecha y, luegoy cree otra unión de perno.
   Otra vez, el eslabón horizontal permanece en la posición original y SmartEditor mueve el eslabón vertical para crear la unión de perno.
7. Seleccione el eslabón vertical de la izquierda haciendo clic sobre él con la herramienta apuntador.
   Aparecen cuatro cuadros negros alrededor del eslabón, lo cual significa que fue seleccionado. Estos cuadros se llaman palancas y se pueden arrastrar para modificar el tamaño de un objeto.
8. Introduzca un "0" en el campo (de rotación) ϕ, usando la barra de coordenadas de la parte inferior de la pantalla.
   Los campos de coordenadas de la parte inferior de la pantalla son útiles para obtener información acerca de los objetos en Working Model. Estos campos también sirven para editar información de los objetos. Al modificar la rotación a 0° se ajusta la barra de regreso a su posición vertical original.
9. Si es necesario, efectúe los pasos 7 y 8 para el eslabón vertical del lado derecho.
10. Seleccione el ancla utilizada para mantener fijo el eslabón horizontal durante la construcción, y presione la tecla "delete" para eliminarlo.
    El ancla ya no es necesaria, por lo que debería borrarse.
11. Seleccione la herramienta "Pin Joint" y forme una unión de perno, usando el punto ajustado, en el extremo inferior del eslabón vertical de la izquierda, como se indica en la figura 2.5. La herramienta "Pin Joint" hace que dos eslabones aparezcan unidos por un círculo.
    La herramienta "Pin Joint" es similar a la herramienta punto utilizada para crear las dos últimas uniones de perno. La opción de unión crea automáticamente dos puntos, los sujeta a los cuerpos debajo del cursor (o el cuerpo y el fondo de la pantalla, como en este caso), y crea una unión perfectamente consistente en un solo paso. Estas uniones de perno conectan el rectángulo con el fondo de la pantalla.
12. Haga doble clic en la junta de perno para abrir la ventana "Properties" y verifique que el perno se haya colocado a la mitad del ancho del cuerpo desde su borde inferior. Lo anterior da como resultado una longitud efectiva del eslabón de 2.5 in.

Paso 5: Agregar un motor al eslabonamiento

Este paso agrega el motor a uno de los eslabones, activando el mecanismo.

1. Haga clic sobre la herramienta motor en la barra de herramientas. Esta herramienta aparece como un círculo con un punto en su centro, el cual descansa sobre una base.
   Se sombrea la herramienta motor, lo cual indica que fue seleccionada. El cursor se parece ahora a un pequeño motor.
2. Coloque el cursor sobre el "punto ajustado" en el extremo inferior del eslabón vertical de la derecha. Haga clic en el ratón.
   Aparece un motor en el eslabonamiento de cuatro barras, como se muestra en la figura 2.5. Tal como en la unión de perno, el motor tiene dos puntos de sujeción. El motor conecta automáticamente los dos cuerpos de la parte superior. Si solo un cuerpo estuviera debajo del motor, uniría el cuerpo con el fondo de la pantalla. Entonces, el motor aplicaría un torque entre los dos cuerpos a los cuales está unido.
3. Haga doble clic sobre el motor para abrir la ventana de "Properties" y verifique que el perno se colocó a la mitad del ancho del cuerpo desde el borde inferior. Esto da como resultado una longitud efectiva del eslabón de 1.0 in.
4. Especifique la velocidad del motor a 360 deg/s. Esto es igual a 60 rpm.
5. Haga clic sobre "Run" en la barra de herramientas.
   El mecanismo de cuatro barras comienza a arrancar lentamente a través de su rango de movimiento.

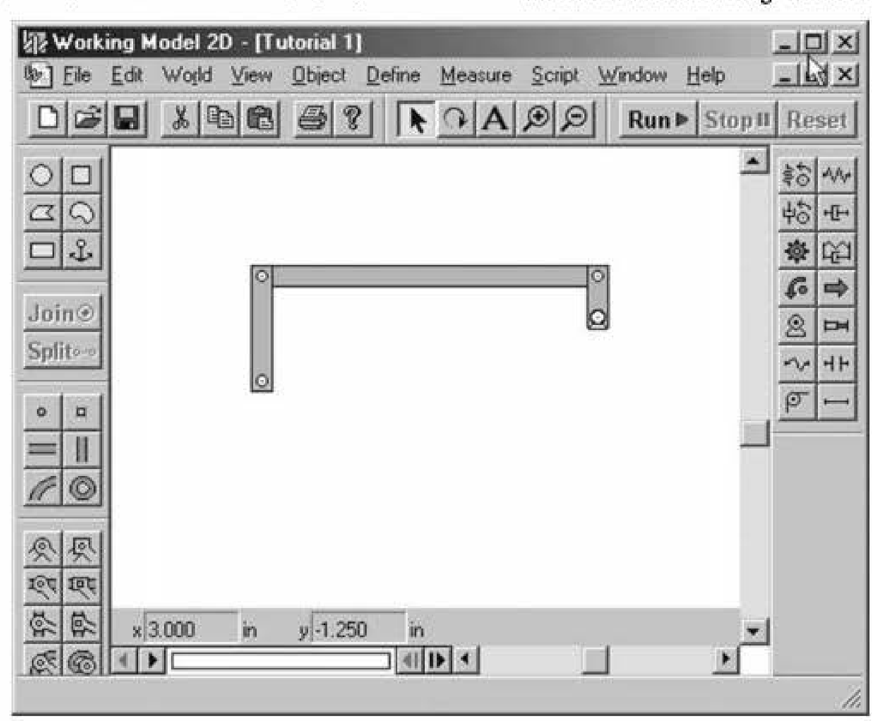


FIGURA 2.5 Incorporación de la unión del perno final y del motor al eslabonamiento.

6. Haga clic sobre "Reset" en la barra de herramientas.
   La simulación se restaurará desde 0.
7. Haga doble clic sobre el motor para abrir la ventana "Properties".
   Lo anterior también se logra al seleccionar el motor y elegir "Properties" en el menú "Window" para abrir la ventana "Properties".
8. Incremente la velocidad del motor a 600 deg/s tecleando este valor en la ventana "Properties".
   Los usuarios pueden definir un motor para aplicar cierto torque para moverlo a una posición de giro determinada, o bien, para que gire a una velocidad o una aceleración específicas. Los motores tienen sistemas de control integrados que calculan automáticamente el torque necesario para la rotación, la velocidad y la aceleración definidas.
9. Haga clic en "Run" sobre la barra de herramientas.
   El eslabón de cuatro barras comienza a moverse nuevamente, esta vez a una velocidad mucho mayor.

Paso 6: Redimensionar los eslabones

Este paso utiliza la barra de coordenadas de la parte inferior de la pantalla, para ajustar el tamaño y el ángulo de los eslabones. Esta sección destaca las capacidades paramétricas de Working Model. Observe que cuando se redimensiona un eslabón, todos los puntos permanecen en sus posiciones respectivas y todas las uniones quedan intactas. Como fueron ubicados utilizando "Object Snap", dichos puntos se posicionaron con ecuaciones y se ajustan automáticamente durante los cambios en el diseño.

1. Si no se ha seleccionado, haga clic en la herramienta apuntador.
2. Haga un clic en el eslabón vertical del lado izquierdo para seleccionarlo.
3. Introduzca un número ligeramente mayor en el cuadro "h" (altura) del eslabón seleccionado en la barra de coordenadas, en la parte inferior de la pantalla.
   El eslabón se redimensiona sobre la pantalla. Observe cómo SmartEditor automáticamente redimensiona, reposiciona y reconstruye el modelo con base en las ecuaciones paramétricas introducidas en cada ubicación de una unión.
4. Asimismo, redimensione los otros eslabones y mueva la posición de las uniones. Vigile que SmartEditor reconstruya el modelo.
   Se pueden investigar configuraciones diferentes de un modelo usando las capacidades paramétricas de Working Model.

Paso 7: Medir la posición de un punto

1. Haga clic sobre "Reset" en la barra de herramientas.
   La simulación se detiene y se restaura a partir de 0.
2. Seleccione la herramienta punto en la barra de herramientas. Aparece como un círculo hueco pequeño.
3. Coloque el cursor sobre el eslabón horizontal del mecanismo de cuatro barras y presione el botón del ratón.
   Un punto se coloca en la barra. Se trata solo de un punto y no sujeta la barra al fondo de la pantalla. Únicamente es "un punto de interés".
4. Si el punto no se ha seleccionado (oscurecido) todavía, se selecciona haciendo clic sobre él.
5. Cree una nueva unidad de medida para medir la posición de este punto seleccionando "Position" del menú "Measure".
   Aparece la nueva unidad de medida. Se da de baja la posición en metros para desplegar información digital (numérica). Es posible cambiar el metro digital de una gráfica, haciendo clic una vez sobre la flecha de la esquina superior izquierda.
6. Haga clic sobre "Run" en la barra de herramientas.
   La simulación comienza inmediatamente a correr y la información de medición aparece en el contador, como se indica en la figura 2.6. Los datos del contador se pueden "exportar" a un archivo ASCII, que se copia en un portapapeles y se

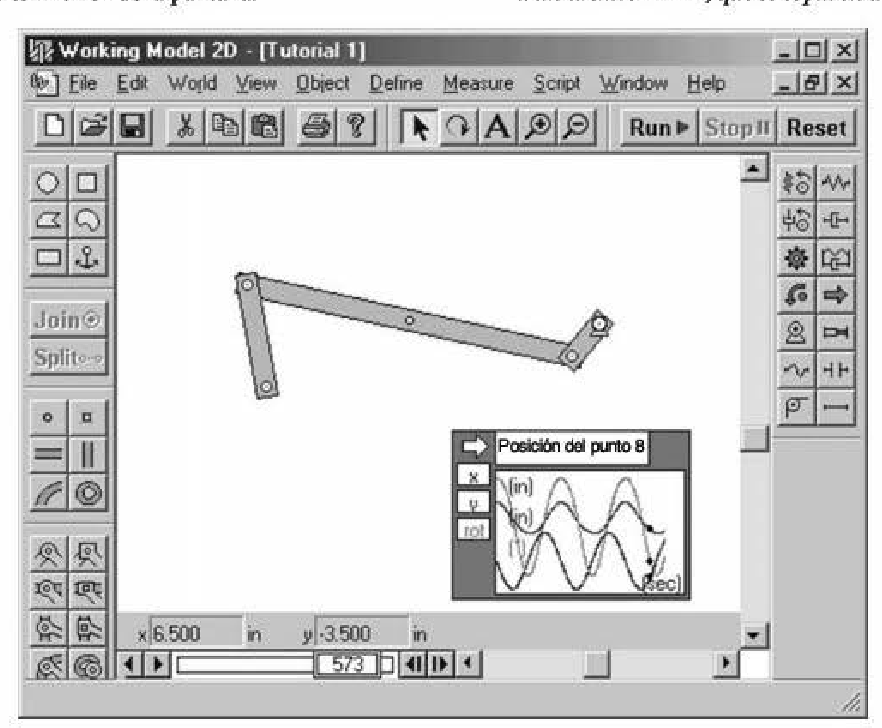


FIGURA 2.6 Una simulación que corre con una unidad de medida.

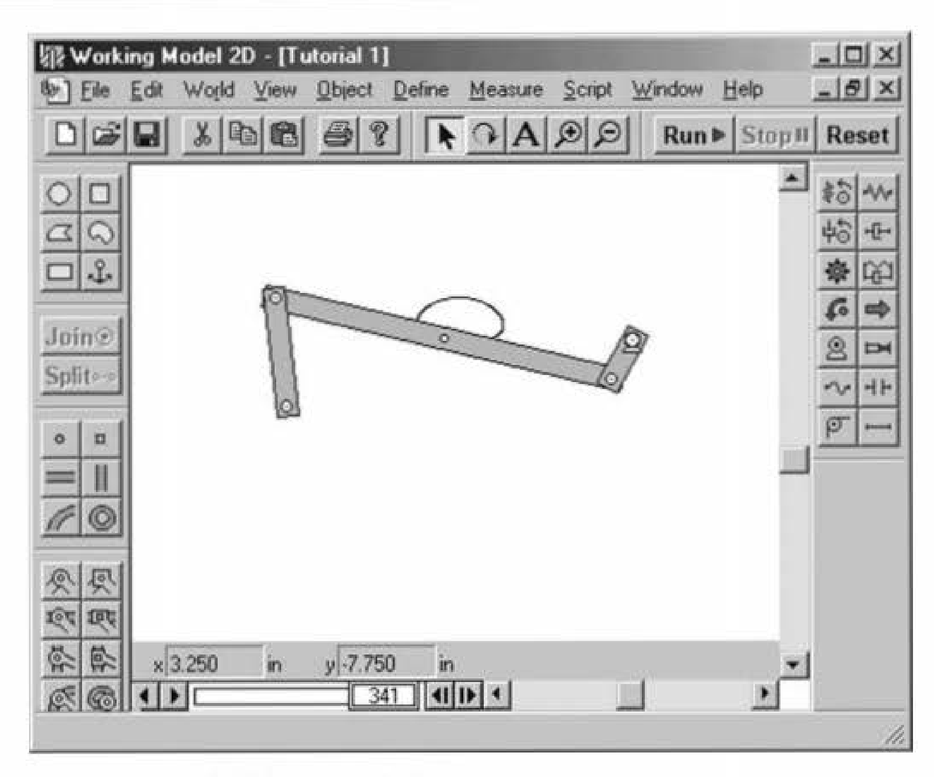


FIGURA 2.7 Trazado de la trayectoria de un punto.

transfiere a un programa de hoja de cálculo para un análisis adicional. En este caso, la hoja de cálculo recibiría cuatro columnas de información: tiempo, X, Y y rotación. Aparecerá una fila por cada paso de integración calculado.

7. Modifique la simulación y vuélvala a correr.
La integración perfecta de Working Model, entre la edición y el procesamiento del sistema dinámico, permite al usuario investigar rápidamente muchas configuraciones de simulaciones diferentes. Por ejemplo, la modificación de la masa de la barra horizontal, usando la ventana "Properties" y corriendo de nuevo la simulación. Es posible modificar las ubicaciones de los pernos y redimensionar los eslabones para, luego, medir las velocidades y las fuerzas. Este mecanismo de cuatro barras puede incluso investigarse con gravedad cero, desactivando la opción de gravedad que se encuentra debajo del menú "World".

Paso 8: Trazar la trayectoria de un punto de interés

Este paso crea un trazo del movimiento de un punto seleccionado.

1. Seleccionar todos los objetos usando el método de selección de la ventana descrito anteriormente.
Todos los elementos aparecen en color negro.
2. Seleccione la opción "Appearance" en el menú de "Window".
3. En la ventana "Appearance", desactive "Track Center of Mass", "Track Connect" y "Track Outline".
Estas funciones se desactivan haciendo clic sobre la marca de verificación adecuada.
4. Haga clic sobre el fondo de la pantalla para deseleccionar todos los objetos.
5. Elija solamente el punto de interés creado en el paso 7.
Tan solo este punto debería aparecer en color negro.
6. Seleccione la opción "Appearance" en el menú "Window".
7. En la ventana "Appearance", active "Track Connect". Asegúrese de que sólo se seleccione un punto.
Esta función se activa haciendo clic sobre la marca de verificación adecuada.

Corra la simulación. La pantalla se debe parecer a la figura 2.7.

Paso 9: Practicar lo que se haya aprendido

Esta demostración indica cómo crear y correr una simulación simple en Working Model. Se invita al estudiante a practicar con la simulación o a crear un mecanismo nuevo. Working Model tiene una gama increíble de funciones, que permiten el desarrollo de modelos para analizar los dispositivos mecánicos más complejos.

2.5 USO DE WORKING MODEL PARA MODELAR UN MECANISMO DE MANIVELA-CORREDERA

Esta sección sirve como guía para crear un mecanismo de manivela-corredera. Se debería aplicar durante el uso real de Working Model. Nuevamente se invita al estudiante a practicar con el software realizando otros análisis.

Paso 1: Abrir Working Model como en el paso 1 de la sección anterior

Paso 2: Crear los eslabones

Este paso crea los tres eslabones móviles del mecanismo de manivela-corredera. Otra vez, el fondo de la pantalla sirve como el cuarto eslabón fijo.

1. Cree un nuevo documento de Working Model, seleccionando la opción "New" del menú "File".
2. Especificar las unidades que se usarán en la simulación. Seleccione "Numbers and Units" en el menú "View". Cambie "Unit System" a "SI" (grados [degrees]).
   Las unidades lineales estarán en metros, los ángulos se medirán en grados y las fuerzas en newtons.
3. Construya el mecanismo creando los tres eslabones que no son fijos. Haga doble clic en la herramienta rectángulo de la barra de herramientas.
   La herramienta se resalta, lo cual indica que se puede usar varias veces.
4. Con la herramienta rectángulo, bosqueje tres cuerpos como los que se muestran en la figura 2.8.
   Posicione el ratón en la primera esquina, haga clic una vez y, luego, mueva el ratón a la ubicación de la esquina opuesta y haga clic otra vez. Los rectángulos están definidos paramétricamente; sus tamaños exactos se especifican más adelante.

Paso 3: Usar la unión de ranura para unir el eslabón corredera con el fondo de la pantalla

1. Seleccione el icono de la unión "keyed slot". El icono aparece como un rectángulo montado sobre una ranura horizontal.
2. Mueva el cursor sobre el punto de ajuste en el centro del eslabón de corredera rectangular. Haga clic en el botón del ratón. La pantalla debería ser similar a la figura 2.9.
3. Seleccione la herramienta apuntador.
4. Haga doble clic en la ranura.
   Esto abre la ventana "Properties" de la ranura.
5. Cambie el ángulo a –45°.
   Cambia la inclinación de la ranura.

Arrastre los otros eslabones hasta que la pantalla se parezca a la figura 2.10.

Paso 4: Conectar los demás eslabones para formar las uniones de perno

Este paso crea puntos y los une para formar uniones de perno. Una unión de perno actúa como bisagra entre dos cuerpos.

1. Seleccione la herramienta ancla.
2. Haga clic sobre el eslabón vertical para anclar el eslabón.
   Una ancla indica a SmartEditor que no mueva este cuerpo durante la construcción. Después de crear las uniones de perno, el ancla se borrará.
3. Haga doble clic en la herramienta punto. El icono es un pequeño círculo.
   Se resalta la herramienta punto, lo cual indica que se puede usar varias veces, sin necesidad de volverla a seleccionar antes de que se esboce cada punto nuevo.
4. Coloque el cursor sobre la parte superior de uno de los eslabones verticales. Cuando aparezca una "X" cerca del apuntador (figura 2.11), haga clic en el botón del ratón.
5. Coloque puntos en los extremos del eslabón horizontal, como se muestra en la figura 2.11.
   Asegúrese de que cada uno de estos puntos se colocó en un "punto de ajuste", como indica la "X" que aparece en el apuntador.
6. Coloque otro punto en el centro del rectángulo de la corredera.
   Este punto se usa para crear una unión de perno con el acoplador.

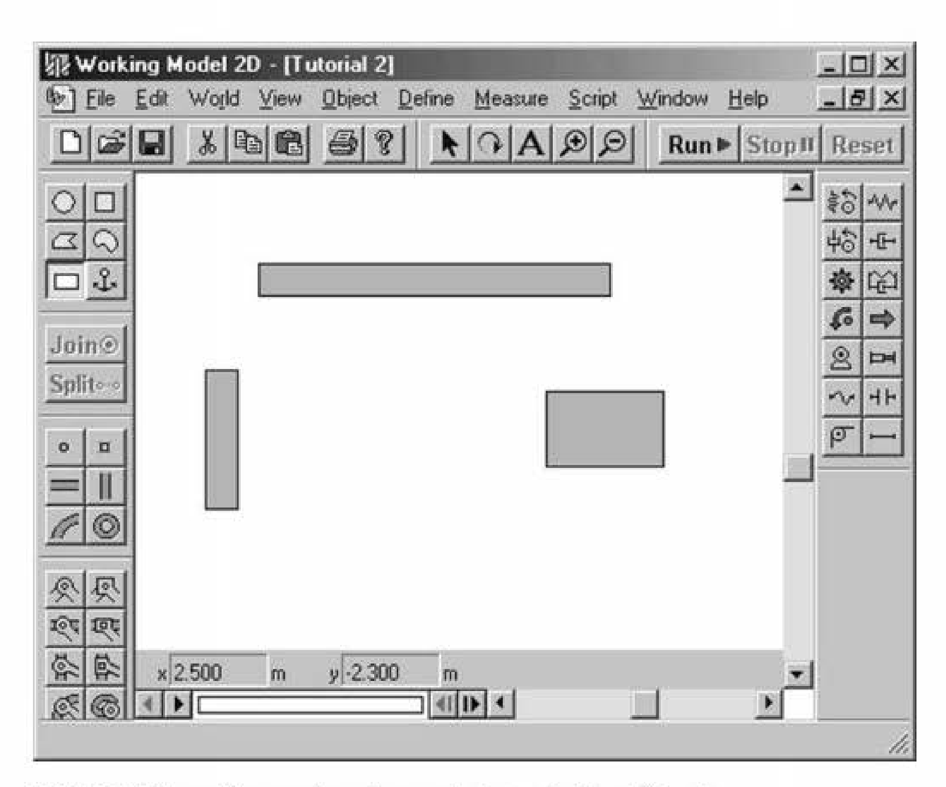


FIGURA 2.8 Tres eslabones esbozados con la herramienta rectángulo.

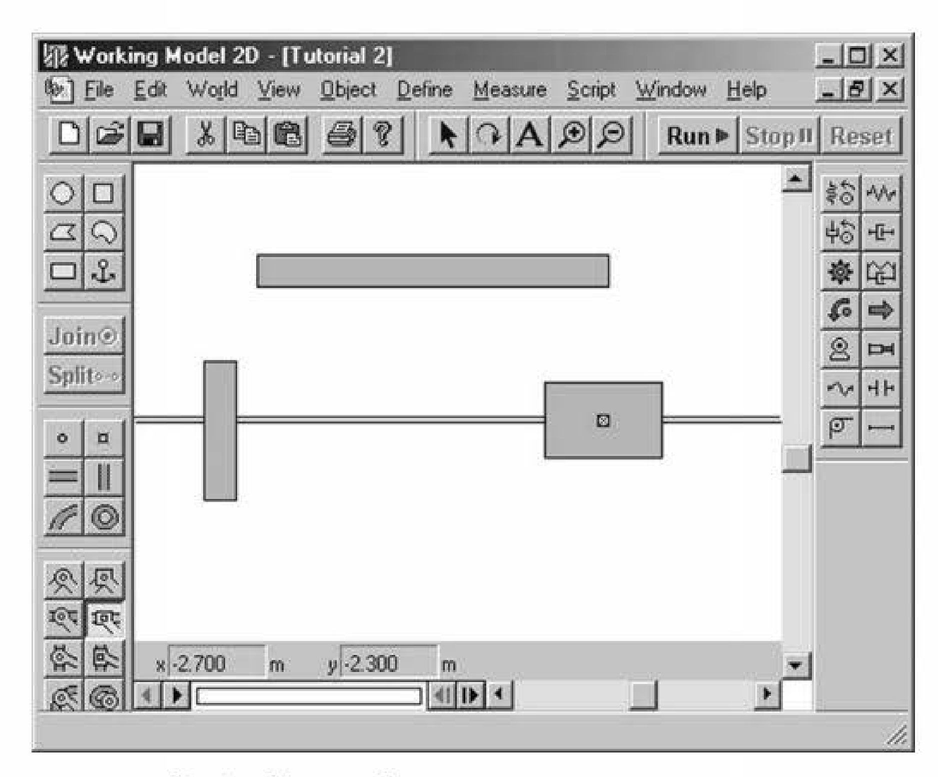


FIGURA 2.9 Ubicación del punto y la ranura.

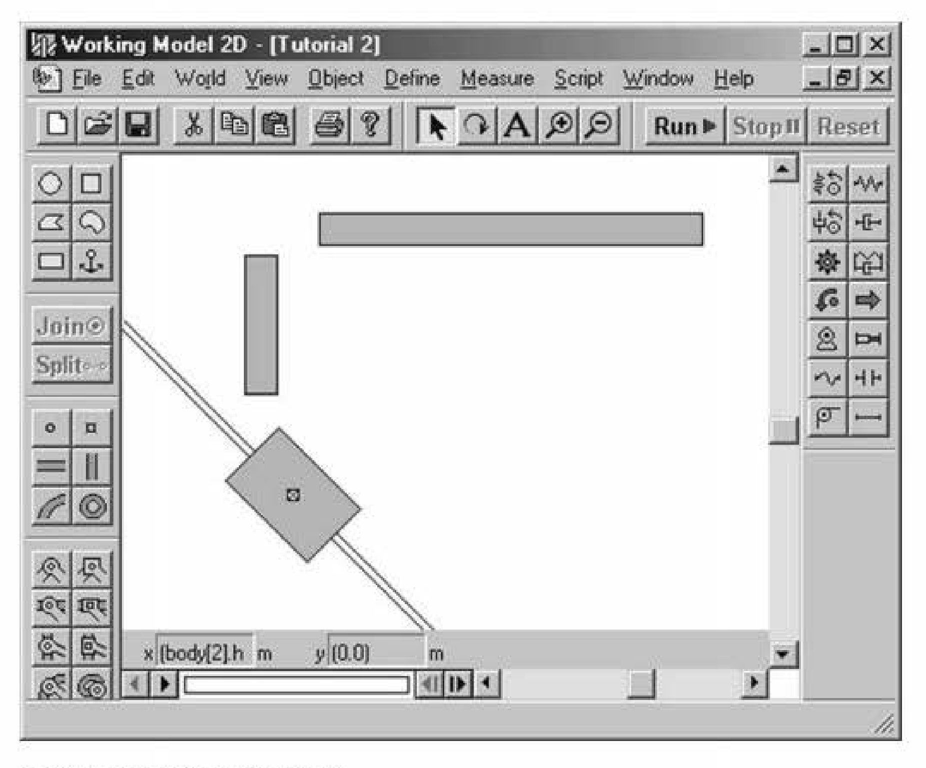


FIGURA 2.10 Unión de corredera.

7. Seleccione la herramienta apuntador.
8. Con la herramienta apuntador seleccionada, haga clic sobre un punto que se conectará con una unión de perno. Luego, manteniendo oprimida la tecla Shift, haga clic en el segundo punto, lo cual formará una unión de perno. Observe que los dos puntos ahora deben estar resaltados (oscurecidos).
9. Haga clic en el botón "Join" de la barra de herramientas, fusionando los dos puntos en una unión de perno. *SmartEditor crea una unión de perno entre los dos puntos elegidos al mover el eslabón sin anclaje a su lugar. El eslabón que se mueve quizá ya no sea vertical. Éste permanecerá fijo en un momento.*

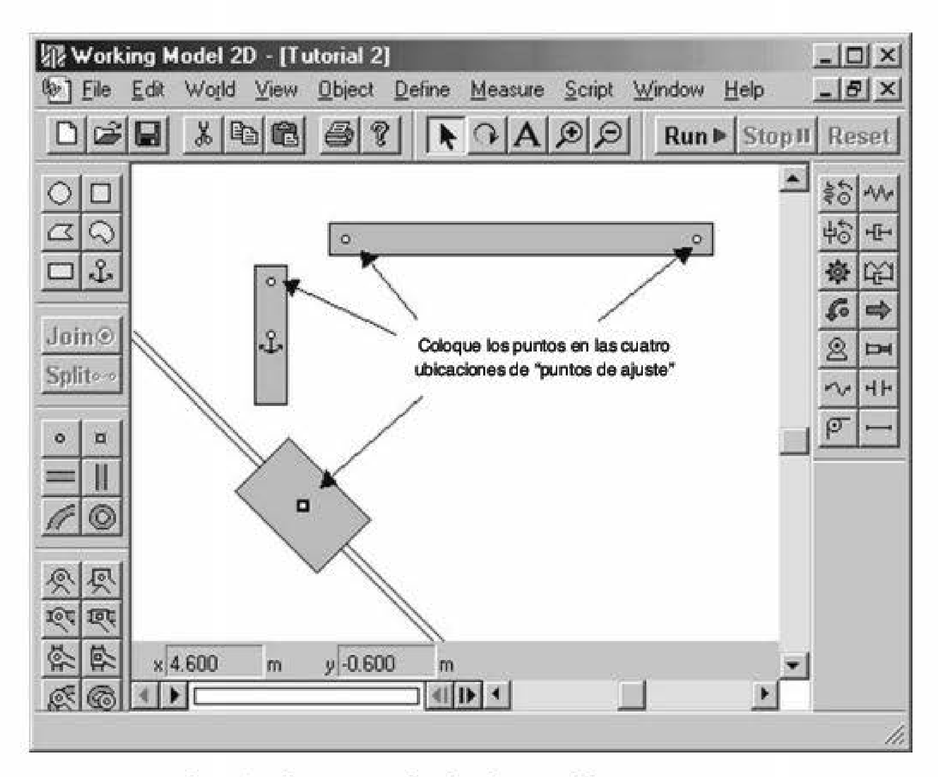


FIGURA 2.11 Colocación de puntos sobre los demás eslabones.

10. Ejecute los pasos 8 y 9 para los otros dos puntos que crearán otra unión de perno. La pantalla deberá ser como la figura 2.12.

    Otra vez, el eslabón vertical permanece en su posición original y SmartEditor mueve el eslabón vertical para crear la unión de perno.

11. Haga clic en el eslabón vertical.

    Aparecen cuatro cuadros negros alrededor del eslabón, lo cual indica que fue seleccionado.

12. Seleccione la opción "Move to front" en el menú "Object"

    Esto coloca el eslabón vertical enfrente del eslabón de conexión, haciendo visible el ancla.

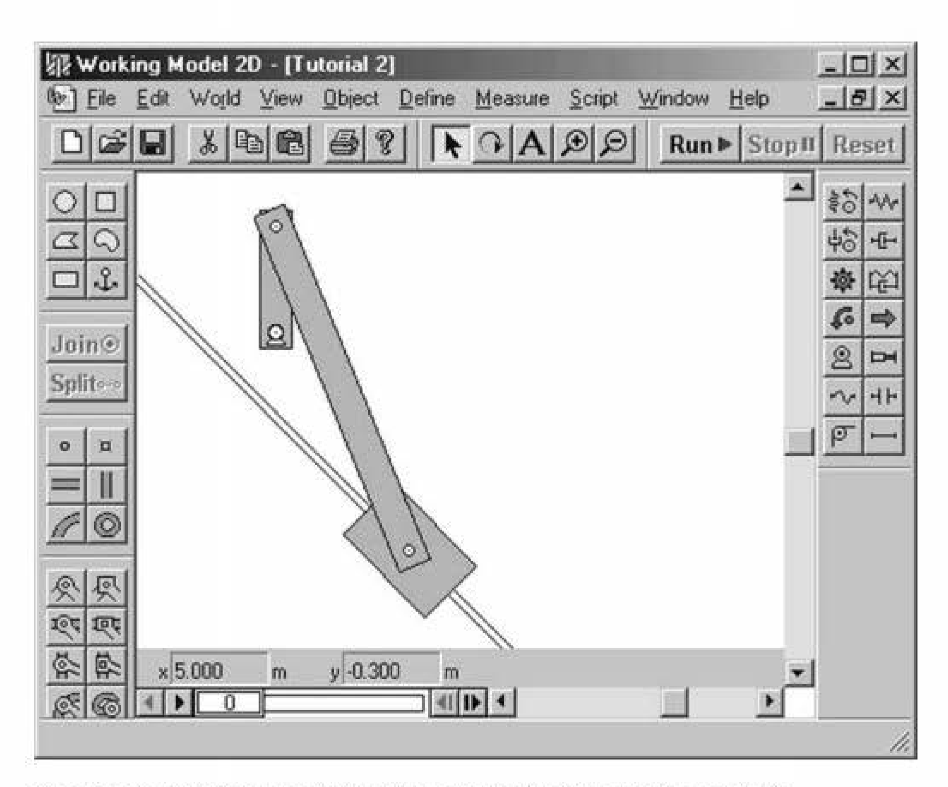


FIGURA 2.12 Adición de las uniones de perno y el motor al eslabonamiento.

13. Seleccione el ancla, la cual se usa para mantener el eslabón vertical fijo durante la construcción y, luego, presione la tecla "delete" para borrarlo.
El ancla ya no se necesita, por lo que se debe eliminar.

Paso 5: Agregar un motor al eslabonamiento

Este paso agrega el motor a uno de los eslabones para impulsar el eslabonamiento.

1. Haga clic sobre la herramienta motor en la barra de herramientas. Esta opción aparece como un círculo, con un punto en el centro, que descansa sobre una base.
La herramienta motor se oscurece, lo cual indica que fue seleccionado. El cursor debería verse ahora como un pequeño motor.
2. Coloque el cursor en el "punto de ajuste" del eslabón vertical. Haga clic en el ratón.
Aparece un motor en el eslabonamiento de manivela-corredera, como se muestra en la figura 2.12. Como en la unión de perno, un motor tiene dos puntos de sujeción. El motor conecta automáticamente los dos cuerpos superiores. Si tan solo permanece un cuerpo debajo del motor, el motor unirá el cuerpo con el fondo de la pantalla. Luego, el motor aplica un torque entre los dos cuerpos a los cuales está sujeto.
3. Haga clic en "Run" de la barra de herramientas.
El eslabonamiento de manivela-corredera comienza a arrancar lentamente a través de su rango de movimiento.
4. Haga clic en "Reset" de la barra de herramientas.
La simulación se restaura a partir de 0.
5. Haga doble clic sobre el motor para abrir la ventana "Properties".
Lo anterior también se hace seleccionando el motor y eligiendo "Properties" del menú de "Window" para abrir la ventana "Properties".
6. Incremente la velocidad del motor a –300 deg/s tecleando este valor en la ventana "Properties".
Los usuarios suelen definir un motor para aplicar un torque, hacer un movimiento de giro determinado, o girar a una velocidad o una aceleración específicas. Los motores tienen integrados sistemas de control de rotación, velocidad y aceleración, que calculan automáticamente el torque necesario. En este demo, se usa la velocidad del motor.
7. Haga clic en "Run" de la barra de herramientas.
El eslabonamiento de manivela-corredera comienza, una vez más, a moverse, esta vez a una velocidad mucho mayor.

Paso 6: Practicar lo que se aprendió

Se invita al estudiante a practicar con esta simulación o a crear un mecanismo nuevo. Working Model tiene una gama increíble de funcionalidades que permite la creación de modelos para analizar los dispositivos mecánicos más complejos.

PROBLEMAS

Use el software Working Model para generar el modelo de un mecanismo de cuatro barras. Use los valores siguientes:

2–1. bancada = 9 in; manivela = 1 in; acoplador = 10 in; seguidor = 3.5 in; velocidad de la manivela = 200 rad/s

2–2. bancada = 100 mm; manivela = 12 mm; acoplador = 95 mm; seguidor = 24 mm; velocidad de la manivela = 30 rad/s

2–3. bancada = 2 ft; manivela = 0.5 ft; acoplador = 2.1 ft; seguidor = 0.75 ft; velocidad de la manivela = 25 rpm

Use el software Working Model para generar el modelo de un mecanismo de manivela-corredera. Utilice los valores siguientes:

2–4. descentrado = 0 in; manivela = 1.45 in; acoplador = 4.5 in; velocidad de la manivela = 200 rad/s

2–5. descentrado = 0 mm; manivela = 95 mm; acoplador = 350 mm; velocidad de la manivela = 200 rad/s

2–6. descentrado = 50 mm; manivela = 95 mm; acoplador = 350 mm; velocidad de la manivela = 200 rad/s

2–7. La figura P2.7 ilustra un mecanismo que opera el tren de aterrizaje de un avión pequeño. Use el software Working Model para generar un modelo de este mecanismo. El motor opera en el sentido horario a una velocidad constante de 20 rpm.

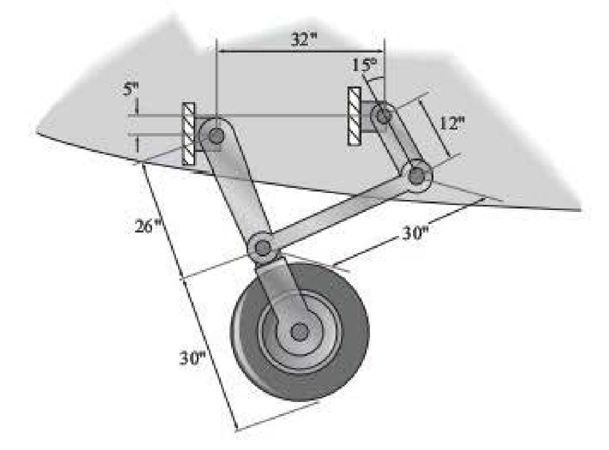


FIGURA P2.7 Problema 7.

2–8. La figura P2.8 muestra un mecanismo que opera un caballito de entretenimiento para niños que funciona con monedas. Utilice el software Working Model para

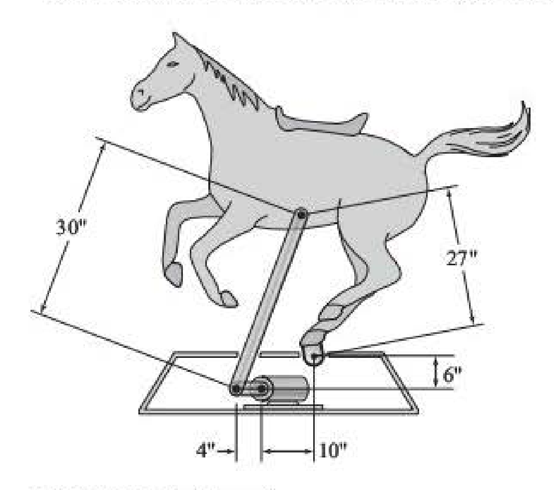


FIGURA P2.8 Problema 8.

generar un modelo de este eslabonamiento. El motor opera en sentido antihorario a una velocidad constante de 60 rpm.

2–9. La figura P2.9 presenta un mecanismo de transferencia que levanta paquetes de una banda transportadora a otra. Use el software Working Model para generar un modelo de este mecanismo. El motor opera en sentido antihorario a una velocidad constante de 20 rpm.

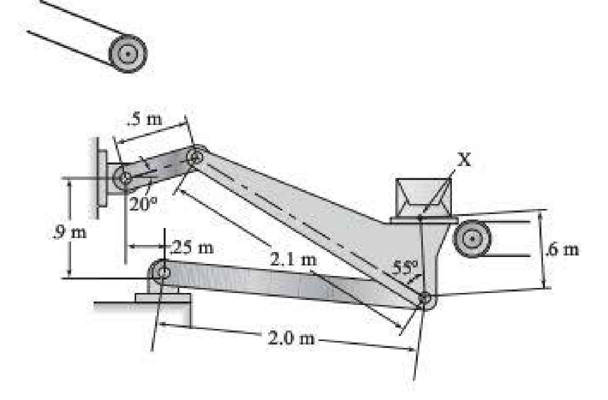


FIGURA P2.9 Problema 9.

2–10. La figura P2.10 muestra otro mecanismo de transferencia que empuja paquetes de una banda transportadora a otra. Use el software Working Model para generar un modelo de este mecanismo. El motor opera en el sentido horario a una velocidad constante de 40 rpm.

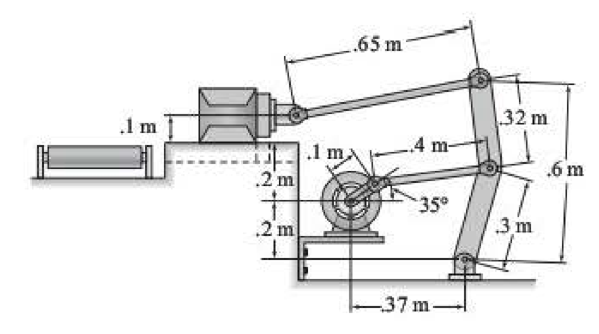


FIGURA P2.10 Problema 10.

2–11. La figura P2.11 ilustra otro mecanismo de transferencia que baja paquetes de una banda transportadora a otra. Utilice el software Working Model para generar un modelo de este eslabonamiento. El cilindro se extiende a una velocidad constante de 1 ft/min.

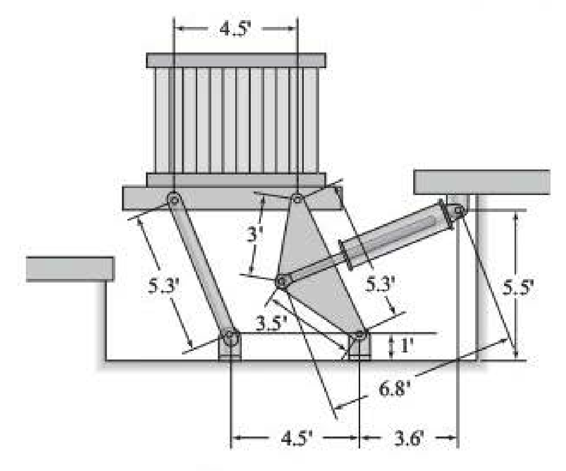


FIGURA P2.11 Problema 11.

2–12. La figura P2.12 muestra un mecanismo que aplica rótulos a los paquetes. Use el software Working Model para generar un modelo de este eslabonamiento. El motor opera en sentido antihorario a una velocidad constante de 300 rpm.

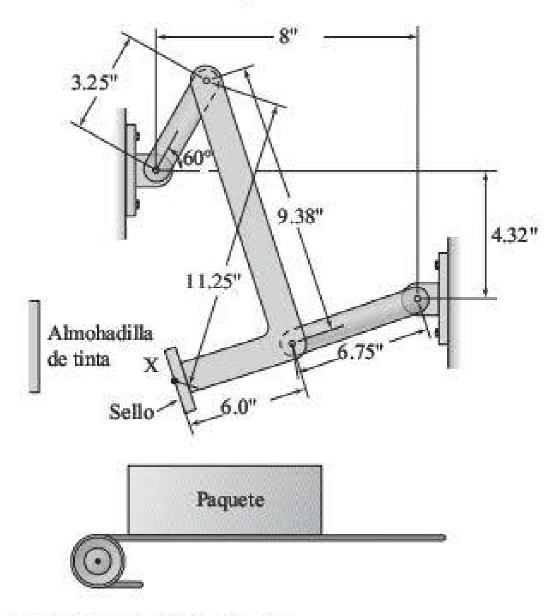


FIGURA P2.12 Problema 12.

ESTUDIOS DE CASO

2–1. En la figura E2.1 se presenta la vista superior de un mecanismo en una operación de maquinado. Examine cuidadosamente la configuración de sus componentes; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de la operación del mecanismo.

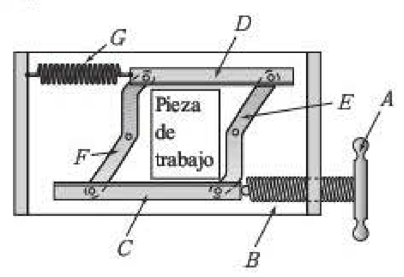


FIGURA E2.1 Mecanismo del estudio de caso 2.1.

1. Conforme gira el mango *A*, al mover la varilla roscada *B* a la izquierda, describa el movimiento de la mordaza *C*.
2. Conforme gira el mango *A*, al mover la varilla roscada *B* a la izquierda, describe el movimiento de la mordaza *D*.
3. ¿Cuál es el objetivo de este mecanismo?
4. ¿Qué acción provocaría que el eslabón *D* se moviera hacia arriba?
5. ¿Cuál es el objetivo del resorte *G*?
6. Analice el motivo para la extraña forma de los eslabones *E* y *F*.
7. ¿Qué nombre pondría a este dispositivo?
8. Describa las causas del uso de un extremo redondo de la varilla roscada *B*.

VECTORES

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Diferenciar entre una cantidad escalar y un vector.**
2. **Aplicar los principios trigonométricos adecuados a un triángulo rectángulo.**
3. **Aplicar los principios trigonométricos adecuados a un triángulo general.**
4. **Determinar la resultante de dos vectores, con el uso tanto del método gráfico como del método analítico.**
5. **Separar cantidades vectoriales en sus componentes en las direcciones verticales y horizontales.**
6. **Restar dos vectores, con el uso tanto del método gráfico como del método analítico.**
7. **Utilizar ecuaciones vectoriales.**
8. **Emplear una ecuación vectorial para determinar la magnitud de dos vectores.**

3.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de mecanismos implica el uso de cantidades vectoriales. Las principales características del funcionamiento de un mecanismo son desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza, que son vectores. Antes de trabajar con mecanismos, se requiere una introducción íntegra a los vectores y a la aplicación de los mismos. En este capítulo se presentan las técnicas de solución, tanto gráfica como analítica. Los estudiantes que ya tomaron un curso de mecánica pueden omitir este capítulo o usarlo como referencia para repasar el manejo de vectores.

3.2 ESCALARES Y VECTORES

En el análisis de mecanismos se deben distinguir dos tipos de cantidades. Un *escalar* es una cantidad que está cabalmente definida cuando se conoce únicamente su magnitud. Por ejemplo, al decir "una docena de rosquillas", uno describe la cantidad de estas que hay en una caja. Como el número "12" establece correctamente el número de rosquillas en la caja, la cantidad es de magnitud escalar. Ejemplos adicionales de cantidades escalares son los siguientes: una tabla tiene 8 ft de largo, una clase dura 50 minutos y la temperatura es de 78°F (la longitud, el tiempo y la temperatura son cantidades escalares).

En contraste, un *vector* no se define por completo tan solo con la magnitud. También hay que indicar la dirección de la cantidad. Afirmar que una pelota de golf viajó 200 yardas no describe cabalmente su trayectoria. Al no expresar la dirección del recorrido se oculta el hecho de que la pelota cayó en un lago. Por consiguiente, se debe incluir la dirección para describir completamente tal cantidad. Ejemplos de vectores definidos en forma adecuada son "el paquete que se jala hacia la derecha con una fuerza de 5 lb", o bien, "el tren que viaja hacia el norte a una velocidad de 50 mph". El desplazamiento, la fuerza y la velocidad son cantidades vectoriales.

Los vectores se diferencian de las cantidades escalares porque se denotan con negritas (**v**). La notación común que se utiliza para representar gráficamente un vector es un segmento lineal con una punta de flecha en un extremo. En el método del análisis gráfico, la longitud del segmento lineal se traza en proporción a la magnitud de la cantidad que describe el vector. La dirección se define con la punta de flecha y la inclinación de la línea con respecto a un eje de referencia. La dirección siempre se mide de la raíz a la punta del vector. La figura 3.1 muestra un vector de velocidad completamente definido.

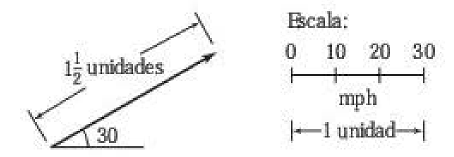


FIGURA 3.1 Un vector de velocidad de 45 mph.

3.3 ANÁLISIS VECTORIAL GRÁFICO

La mayoría del trabajo involucrado en el estudio de mecanismos y el análisis de vectores tiene que ver con la geometría. En estos análisis se emplean frecuentemente métodos gráficos, ya que de esta manera se visualiza con claridad el movimiento de un mecanismo. En los mecanismos más complejos, los cálculos analíticos con vectores también se vuelven más laboriosos.

El método de análisis gráfico implica el dibujo de líneas a escala en ángulos específicos. Para obtener resultados consistentes con las técnicas analíticas, la exactitud habrá de ser el objetivo principal. Durante muchas décadas, la exactitud en el análisis de mecanismos se obtenía concentrando la atención en la precisión y en el equipo de dibujo adecuado. Aun siendo populares, se desdeñaron muchas técnicas gráficas por imprecisas. Sin embargo, el desarrollo del diseño asistido por computadora (CAD), con sus construcciones geométricas exactas, ha permitido que las técnicas gráficas se apliquen con precisión.

3.4 TÉCNICAS DE DIBUJO REQUERIDAS PARA EL ANÁLISIS VECTORIAL GRÁFICO

Los métodos gráficos de análisis vectorial y de mecanismos son idénticos, ya sea que se utilice equipo de dibujo o un software de CAD. Aun cuando quizá sea obsoleta en el análisis industrial, la representación gráfica se usa con éxito para aprender y entender las técnicas.

Cuando se trabaja con equipo de dibujo, se requieren líneas delgadas y arcos finos para obtener resultados exactos. Se necesita un trazo preciso para determinar con exactitud los puntos de intersección. Por lo tanto, se debe tener cuidado de mantener en buen estado el equipo de dibujo.

La medición exacta es tan importante como la calidad de las líneas. La longitud de las líneas debe dibujarse a una escala precisa, en tanto que las mediciones lineales deberían ser tan exactas como sea posible. Por ello, se recomienda utilizar un escalímetro con las pulgadas (in) divididas en 50 partes. Las mediciones angulares tienen que ser igualmente precisas.

Por último, la elección acertada de la escala de dibujo es también un factor muy importante. En general, cuanto más grande sea la construcción más exactos serán los resultados de la medición. Una precisión de 0.05 in causa menos error cuando la línea es de 10 in de largo que cuando es de 1 in. El tamaño del dibujo está limitado por el hecho de que las construcciones muy grandes requieren equipo especial. Sin embargo, hay que intentar crear dibujos tan grandes como sea posible.

Se debe consultar un texto de dibujo para los detalles de las técnicas generales de dibujo y de las construcciones geométricas.

3.5 CONOCIMIENTO REQUERIDO DE CAD PARA EL ANÁLISIS VECTORIAL GRÁFICO

Como vimos, los métodos gráficos de análisis de mecanismos y de vectores son idénticos, ya sea que se utilice equipo de dibujo o un software de CAD. Este último ofrece mayor precisión. Por fortuna, tan solo se requiere un nivel básico de habilidades del CAD para realizar adecuadamente un análisis vectorial gráfico completo, de modo que es preferible el uso de un sistema de CAD, pues no necesita una gran inversión en la "curva de aprendizaje".

Como ya se mencionó, el método gráfico de análisis vectorial implica el dibujo de líneas con longitudes precisas y a ángulos específicos. La siguiente lista describe las destrezas en el CAD que se requieren para el análisis vectorial. El usuario debería ser capaz de:

- Dibujar líneas con una longitud específica y un ángulo determinado;
- Insertar líneas, perpendiculares a las líneas existentes;
- Prolongar líneas existentes hasta la intersección con otra línea;
- Recortar líneas en la intersección con otra línea;
- Dibujar arcos con centro en un punto específico y un radio determinado;
- Ubicar la intersección de dos arcos;
- Medir la longitud de las líneas existentes;
- Medir el ángulo incluido entre dos líneas.

Desde luego, las habilidades adicionales facilitan un análisis más eficiente. No obstante, la familiaridad con los comandos de CAD que realizan las acciones mencionadas es suficiente para lograr con precisión el análisis vectorial.

3.6 CONOCIMIENTOS DE TRIGONOMETRÍA REQUERIDOS PARA EL ANÁLISIS VECTORIAL

En el caso analítico de vectores se requieren conocimientos básicos de trigonometría. Tal disciplina estudia las propiedades de los triángulos. El primer tipo de triángulo que se estudiará es el triángulo rectángulo.

3.6.1 Triángulo rectángulo

Al efectuar un análisis vectorial, el uso de las funciones trigonométricas básicas es de vital importancia. Las funciones trigonométricas básicas se aplican solamente para los triángulos rectángulos. La figura 3.2 muestra un triángulo rectángulo con sus lados identificados como a, b y c; y sus ángulos interiores, como A, B y C. Observe que el ángulo C es un ángulo recto de 90°. Por tal razón, el triángulo se conoce como triángulo rectángulo.

Las relaciones trigonométricas básicas son:

$$\text{seno}\angle A = \text{sen}\angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad (3.1)$$

$$\text{coseno}\angle A = \cos\angle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad (3.2)$$

$$\text{tangente}\angle A = \tan\angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} \quad (3.3)$$

Tales definiciones se aplican al ángulo B de igual manera:

$$\text{sen}\angle B = \frac{b}{c}$$

$$\cos\angle B = \frac{a}{c}$$

$$\tan\angle B = \frac{b}{a}$$

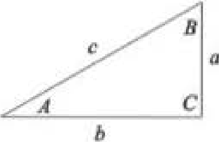


FIGURA 3.2 Triángulo rectángulo.

El teorema de Pitágoras establece la relación entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Para el triángulo de la figura 3.2, se define como

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \textbf{(3.4)}$$

Finalmente, la suma de todos los ángulos de un triángulo es igual a 180°. Si se sabe que el ángulo C es de 90°, la suma de los otros dos ángulos es

$$\angle A + \angle B = 90° \quad \textbf{(3.5)}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.1

La figura 3.3 ilustra una pala cargadora con el cilindro BC en posición vertical. Utilice trigonometría para determinar la longitud requerida del cilindro para orientar el brazo AB en la configuración mostrada.

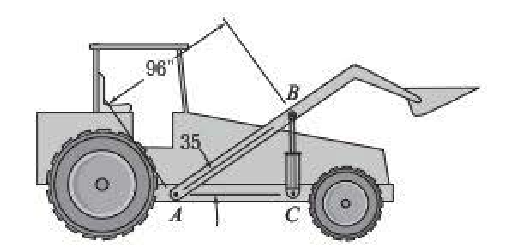


FIGURA 3.3 Pala cargadora del problema de ejemplo 3.1.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine la longitud* BC**

Concéntrese en el triángulo formado por los puntos A, B y C de la figura 3.3. El lado BC del triángulo se calcula con la ecuación (3.1).

$$\text{sen}\angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 35° = \frac{BC}{(96 \text{ in})}$$

al despejar:

$$BC = (96 \text{ in}) \text{ sen } 35° = 55.06 \text{ in}$$

2. ***Determine la longitud* AC**

Aun cuando no se requiere, observe que la distancia entre A y C se calcula de manera parecida con la ecuación (3.2), de modo que

$$\cos\angle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos 35° = \frac{AC}{(96 \text{ in})}$$

despejando:

$$AC = (96 \text{ in}) \cos 35° = 78.64 \text{ in}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.2

La figura 3.4 presenta un camión remolcador con el brazo de la grúa de 8 ft, inclinado un ángulo de 25°. Utilice trigonometría para determinar la distancia horizontal que cubre el brazo de la grúa.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine la proyección horizontal del brazo de la grúa***

La proyección horizontal del brazo se determina con la ecuación (3.2):

$$\cos 25° = \frac{\text{proyección horizontal}}{(8 \text{ ft})}$$

$$\text{proyección horizontal} = (8 \text{ ft})\cos 25° = 7.25 \text{ ft}$$

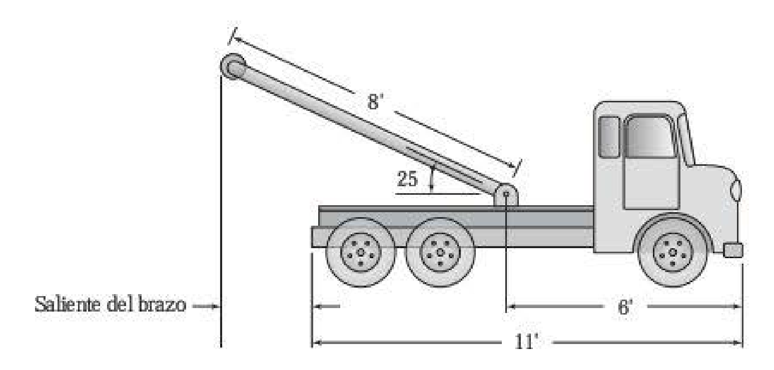


FIGURA 3.4 Camión de arrastre del problema de ejemplo 3.2.

2. ***Determine la proyección horizontal del camión y el brazo***

La distancia horizontal del extremo frontal del camión al extremo del brazo es

$$6 \text{ ft} + 7.25 \text{ ft} = 13.25 \text{ ft}$$

3. ***Determine la saliente del brazo***

Como la longitud total del camión es de 11 ft, la distancia horizontal que se extiende el brazo del camión es

$$13.25 \text{ ft} - 11 \text{ ft} = 2.25 \text{ ft}$$

3.6.2 Triángulo oblicuo

El análisis previo se limitó a los triángulos rectángulos. Sin embargo, en el estudio de los mecanismos también es importante el enfoque de triángulos en general (oblicuos). La figura 3.5 muestra un triángulo cualquiera. De nuevo, a, b y c denotan la longitud de los lados y $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ representan los ángulos interiores.

Para este caso general, no son aplicables las funciones trigonométricas básicas descritas en la sección anterior. Para analizar un triángulo general, hay que tomar en cuenta la ley de los senos y la ley de los cosenos.

La *ley de los senos* se expresa como

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C} \tag{3.6}$$

La *ley de los cosenos* se expresa como

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad \cos\angle C \tag{3.7}$$

Por otro lado, la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es de 180°. En términos de la figura 3.4, la ecuación sería

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \tag{3.8}$$

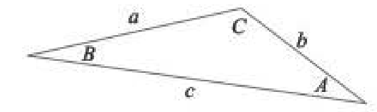


FIGURA 3.5 Un triángulo oblicuo.

Los problemas que implican la solución de un triángulo cualquiera caen en uno de cuatro casos:

Caso 1: Cuando se conocen un lado (a) y dos ángulos ($\angle A$ y $\angle B$).

Para resolver un problema de esta índole, se utiliza la ecuación (3.8) para calcular el tercer ángulo:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$$

Se replantea la ley de los senos para calcular los lados restantes.

$$b = a\left\{\frac{\operatorname{sen}\angle B}{\operatorname{sen}\angle A}\right\}$$

$$c = a\left\{\frac{\operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}\angle A}\right\}$$

Caso 2: Cuando se conocen dos lados (a y b) y el ángulo opuesto a uno de los lados ($\angle A$).

Para resolver un problema del caso 2, se utiliza la ley de los senos para calcular el segundo ángulo. La ecuación (3.6) se replantea como

$$\angle B = \operatorname{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)\operatorname{sen}\angle A\right\}$$

Con la ecuación (3.8) se calcula el tercer ángulo:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$$

Se utiliza la ley de los cosenos para calcular el tercer lado. La ecuación (3.7) se replantea como:

$$c = \sqrt{\{a^2 + b^2 - 2ab \ \cos\angle C\}}$$

Caso 3: Cuando se conocen dos lados (*a* y *b*) y el ángulo incluido ($\angle C$).

Para resolver un problema del caso 3, se utiliza la ley de los cosenos para calcular el tercer lado:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C}$$

Con la ley de los senos se calcula el segundo ángulo. La ecuación (3.6) se replantea como

$$\angle A = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)\text{sen}\angle C\right\}$$

Se usa la ecuación (3.8) para calcular el tercer ángulo:

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$$

Caso 4: Cuando se conocen los tres lados.

Para resolver un problema del caso 4, se utiliza la ley de los cosenos para calcular un ángulo. La ecuación (3.7) se replantea como

$$\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Con la ley de los senos se calcula un segundo ángulo. La ecuación (3.6) se replantea como

$$\angle A = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)\text{sen}\angle C\right\}$$

Con la ecuación (3.8) se calcula el tercer ángulo:

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$$

Una vez que se familiarice con la solución de problemas que implican triángulos generales, ya no será necesaria la identificación de los casos específicos.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.3

La figura 3.6 muestra una pala cargadora. Use trigonometría para determinar la longitud requerida del cilindro con la finalidad de orientar el brazo *AB* en la configuración mostrada.

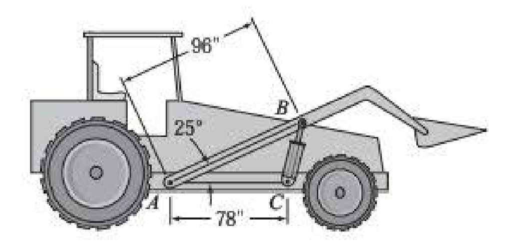


FIGURA 3.6 Pala cargadora del problema de ejemplo 3.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine la longitud* BC**

Si se examina el triángulo creado por los puntos *A*, *B* y *C*, es evidente que se trata de un problema del caso 3. El tercer lado se calcula con la ley de los cosenos:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos\angle BAC}$$

$$= \sqrt{(78\,\text{in})^2 + (96\,\text{in})^2 - 2(78\,\text{in})(96\,\text{in})\cos 25^\circ}$$

$$= 41.55\,\text{in}$$

Como no se requirió el cálculo de los otros ángulos, el procedimiento descrito para los problemas del caso 3 quedará inconcluso.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.4

La figura 3.7 muestra el mecanismo impulsor del sistema de un motor de gasolina. Use trigonometría para determinar el ángulo de la manivela que se indica en la figura.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine el ángulo* BAC**

Al examinar el triángulo formado por los puntos *A*, *B* y *C*, es evidente que se trata de un problema del caso 4. El ángulo *BAC* se calcula redefiniendo las variables en la ley de los cosenos:

$$\angle BAC = \cos^{-1}\left\{\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2(AC)(AB)}\right\}$$

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{(5.3\,\text{in})^2 + (1\,\text{in})^2 - (5\,\text{in})^2}{2(5.3\,\text{in})(1\,\text{in})}\right\} = 67.3^\circ$$

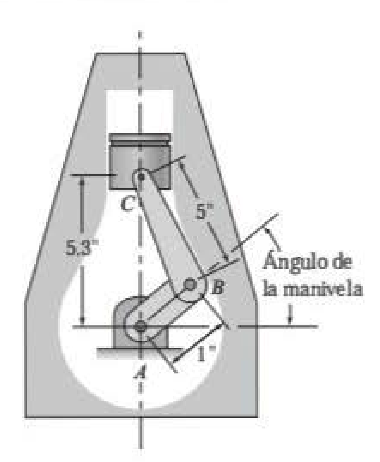


FIGURA 3.7 Mecanismo del motor de gasolina del problema de ejemplo 3.4.

2. ***Determine el ángulo de la manivela***

El ángulo *BAC* está definido entre el lado *AC* (el lado vertical) y la pierna *AB*. Como el ángulo de la manivela se define a partir del eje horizontal, se determina de la siguiente manera:

$$\text{Ángulo de la manivela} = 90° - 67.3° = 22.7°$$

3. ***Determine los demás ángulos interiores***

Aun cuando no se solicitó en este problema, el ángulo *ACB* se determina mediante

$$\angle ACB = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{AB}{BC}\right)\text{sen}\angle BAC\right\}$$

$$= \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{1\text{ in}}{5\text{ in}}\right)\text{sen } 67.3°\right\} = 10.6°$$

Por último, se calcula el ángulo *ABC*:

$$\angle ABC = 180° - 67.3° - 10.6° = 102.1°$$

3.7 MANEJO DE VECTORES

En el análisis de mecanismos, las cantidades vectoriales (como el desplazamiento o la velocidad) se emplean de diferentes maneras. Al igual que las magnitudes escalares, los vectores se suman y se restan. Sin embargo, a diferencia de las magnitudes escalares, no son simples operaciones algebraicas. Puesto que al definir el vector también se requiere, se debe considerar la dirección, además de las operaciones matemáticas. La suma y la resta de vectores se estudian por separado en las siguientes secciones.

La suma de vectores es igual a la determinación del efecto combinado, o neto, de dos cantidades que actúan juntas. Por ejemplo, al jugar una ronda de golf, el primer tiro viaja 200 yardas, pero se desvía a la derecha. Luego, un segundo tiro recorre 120 yardas y queda a la izquierda del hoyo. Un tercer tiro de 70 yardas coloca al golfista sobre el *green*. Cuando este golfista ve la hoja de resultados, se da cuenta que el hoyo está rotulado con una distancia de 310 yardas; no obstante, la pelota viajó 390 yardas (200 + 120 + 70 yardas).

Como se ha señalado constantemente, la dirección de un vector es tan importante como su magnitud. En la suma de vectores, 1 + 1 no siempre es igual a 2; esto depende de la dirección de los vectores individuales.

3.8 SUMA GRÁFICA DE VECTORES (+ >)

La suma gráfica es una operación que determina el efecto neto de los vectores. El método gráfico de la suma de vectores incluye el dibujo a escala de los vectores y su orientación correcta. Luego, esos vectores se reubican conservando tanto la escala como la orientación. La cola del primer vector se toma como el origen (punto *O*). El segundo vector se reubica de modo que su cola quede en la punta del primer vector. El proceso se repite para todos los vectores restantes. La técnica se conoce como el método de *punta con cola* en la suma de vectores. Este nombre se explica por sí mismo cuando se observa un polígono de vectores completo. La punta de un vector se conecta con la cola del siguiente.

El efecto combinado es un vector que se extiende desde la cola del primer vector de la serie hasta la punta del último vector de la serie. Se tiene una expresión matemática que representa el efecto combinado de los vectores:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} +> \mathbf{B} +> \mathbf{C} +> \mathbf{D} +> \ldots$$

El vector **R** es la notación común que se utiliza para representar la resultante de una serie de vectores. *Resultante* es el término que describe el efecto combinado de los vectores. Observe asimismo que el símbolo +> sirve para identificar la suma de vectores y para diferenciarla de la suma algebraica [ref. 5].

Note que los vectores cumplen con la ley conmutativa de la suma, es decir, el orden en que se suman los vectores no altera el resultado. Por lo tanto,

$$R = (A +> B +> C) = (C +> B +> A) = (B +> A +> C) = \ldots$$

El proceso de combinar los vectores se puede llevar a cabo gráficamente con técnicas de dibujo manuales o un software de CAD. Independientemente del método que se utilice, los conceptos subyacentes son idénticos. Los problemas de ejemplo siguientes ilustran tal concepto.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.5

Determine gráficamente el efecto combinado de los vectores de velocidad **A** y **B**, que se muestran en la figura 3.8.

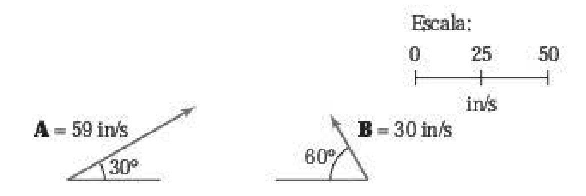


FIGURA 3.8 Vectores del problema de ejemplo 3.5.

SOLUCIÓN:

1. ***Construya los diagramas de vectores***

   Para determinar la resultante, los vectores se deben colocar de tal manera que la cola de **B** se ubique en la punta de **A**. Para verificar la ley conmutativa, los vectores se dibujaron de nuevo, de modo que la cola de **A** se localice en la punta de **B**. La resultante es el vector dibujado de la cola del primer vector, el origen, a la punta del segundo vector. En la figura 3.9 se presentan los dos diagramas.

2. ***Mida la resultante***

   La longitud del vector **R** es de 66 in/s. Para definir completamente el vector **R** también se requiere la dirección. El ángulo de la horizontal al vector **R** es de 57°. Por lo tanto, la manera correcta de presentar la solución es:

$$\mathbf{R} = 66 \text{ in/s} \angle 57°$$

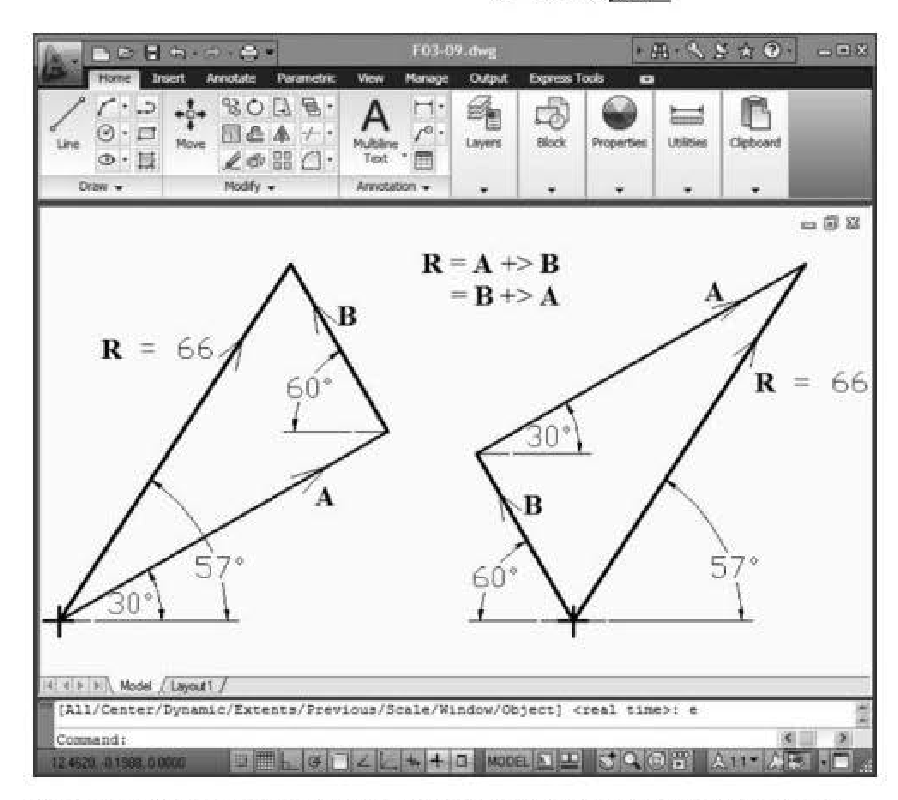


FIGURA 3.9 Efecto combinado de los vectores **A** y **B** del problema de ejemplo 3.5.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.6

Determine gráficamente el efecto combinado de los vectores de fuerza **A**, **B**, **C** y **D** que se muestran en la figura 3.10.

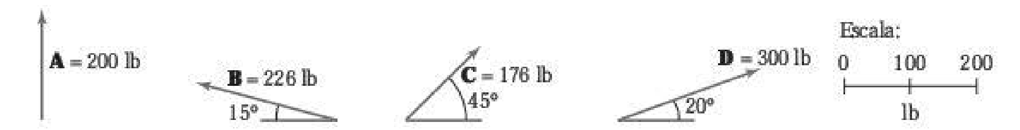


FIGURA 3.10 Vectores del problema de ejemplo 3.6.

SOLUCIÓN:

1. ***Construya diagramas de los vectores***

Para determinar la resultante, se deben colocar los vectores de manera que la cola de **B** se ubique en la punta de **A**. Luego la cola de **C** se coloca sobre la punta de **B**. Finalmente, la cola de **D** se coloca sobre la punta de **C**. De nueva cuenta, el orden de los vectores no es importante, y se utiliza cualquier combinación. Como ilustración, se usa otra combinación arbitraria en este ejemplo. La resultante es el vector dibujado de la cola del primer vector, en el origen, a la punta del cuarto vector. En la figura 3.11 se ilustran los diagramas de los vectores.

2. ***Mida la resultante***

La longitud medida del vector **R** es de 521 in/s. Para definir completamente el vector **R** también se necesita la dirección. El ángulo medido de la horizontal al vector **R** es de 68°. Por consiguiente, la manera correcta de presentar la solución es la siguiente:

$$\mathbf{R} = 521 \text{ in/s} \angle 68°$$

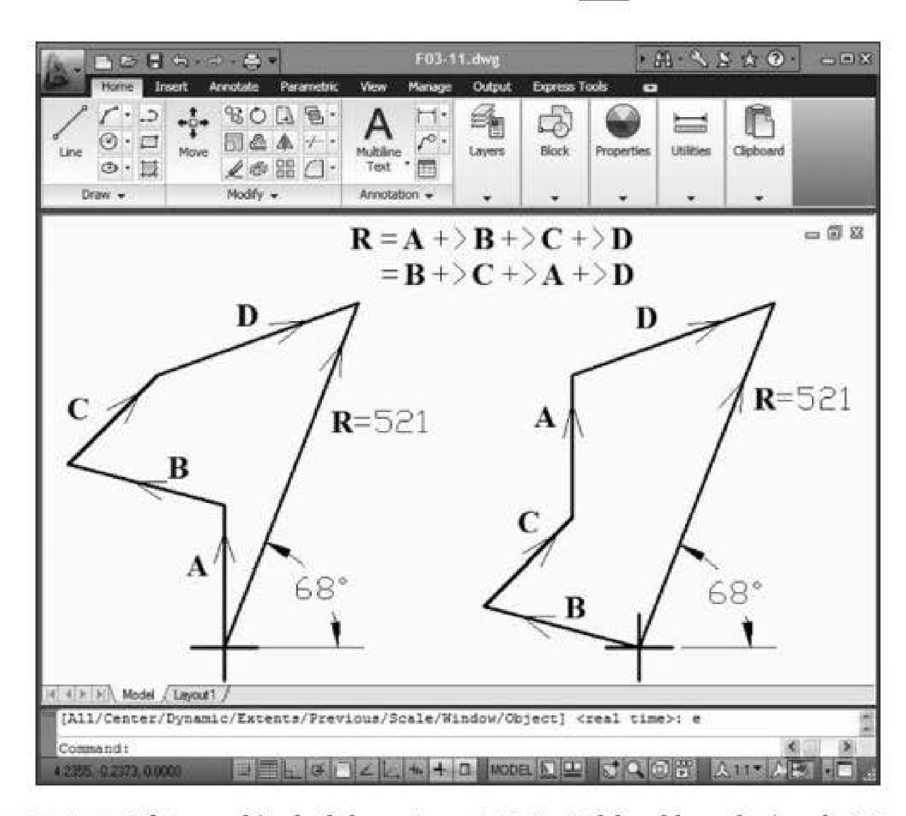


FIGURA 3.11 Efecto combinado de los vectores **A**, **B**, **C** y **D** del problema de ejemplo 3.6.

3.9 SUMA ANALÍTICA DE VECTORES (+>): MÉTODO DEL TRIÁNGULO

Se utilizan dos métodos analíticos para determinar el efecto neto de los vectores. El primer método es mejor cuando tan solo se requiere la resultante de dos vectores. Como con el método gráfico, los dos vectores que se van a combinar se colocan punta-con-cola. La resultante se obtiene conectando la cola del primer vector con la punta del segundo vector, de modo que la resultante forma el tercer lado de un triángulo. Generalmente, este es un triángulo oblicuo, por lo que se aplican las leyes descritas en la sección 3.6.2. La longitud del tercer lado y su ángulo de referencia se determinan aplicando las leyes de los senos y los

cosenos, con la finalidad de definir completamente el vector resultante. Este método se ilustra mediante un problema de ejemplo. Para distinguir con claridad las cantidades, los vectores se representan con negritas (**D**), en tanto que la magnitud del vector se representa con cursivas normales (*D*).

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.7

Determine analíticamente la resultante de los dos vectores de aceleración que se muestran en la figura 3.12.

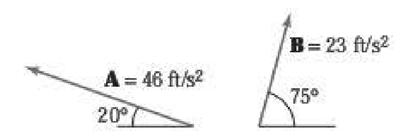


FIGURA 3.12 Vectores del problema de ejemplo 3.7.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore un diagrama vectorial simple***

Los vectores se colocan punta-con-cola, como se indica en la figura 3.13. Observe que tan solo se requiere un diagrama simple porque la resultante se determina analíticamente.

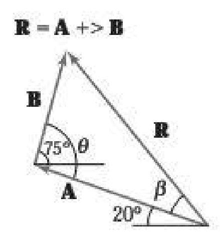


FIGURA 3.13 Efecto combinado de los vectores **A** y **B** del problema de ejemplo 3.7.

2. ***Determine un ángulo interno***

El ángulo entre **A** y la horizontal es de 20°. Si se revisa la figura 3.13, se advierte que el ángulo entre los vectores **A** y **B** es:

$$\theta = 20^\circ + 75^\circ = 95^\circ$$

De modo que el problema para determinar la resultante de los dos vectores es en realidad el caso de un triángulo general, como el que se describe en la sección 3.6.2 (caso 3).

3. ***Determine la magnitud de la resultante***

Al aplicar el procedimiento mostrado para un problema del caso 3, se utiliza la ley de los cosenos para calcular la magnitud de la resultante:

$$\mathrm{R} = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(46\,\text{ft/s}^2)^2 + (23\,\text{ft/s}^2)^2 - 2(46\,\text{ft/s}^2)(23\,\text{ft/s}^2)\{\cos 95^\circ\}} = 53.19\ \text{ft/s}^2$$

4. ***Determine la dirección de la magnitud***

Se usa la ley de los senos para calcular el ángulo entre los vectores **A** y **R**:

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{B}{R}\right)\text{sen}\,\theta\right\}$$

$$= \text{sen}^{-1}\left\{\frac{(23\,\text{ft/s}^2)}{(53.19\,\text{ft/s}^2)\ \text{sen}\ 95^\circ}\right\} = 25.5^\circ$$

5. ***Especifique completamente la resultante***

El ángulo a partir de la horizontal es de 20° + 25.5° = 45.5°. La resultante se escribe correctamente como:

$$\mathbf{R} = 53.19\ \text{ft/s}^2\ \underline{45.5^\circ}\nwarrow$$

o bien,

$$\mathbf{R} = 53.19\ \text{ft/s}^2\ \nearrow\underline{134.5^\circ}$$

3.10 COMPONENTES DE UN VECTOR

El segundo método para determinar analíticamente la resultante de vectores es más adecuado para los problemas donde se combinan más de dos vectores. Este método implica la separación de los vectores en componentes perpendiculares.

La descomposición de un vector es lo inverso de la combinación de vectores. Un vector individual se puede descomponer en dos vectores separados, a lo largo de direcciones convenientes. Las dos componentes vectoriales tienen el mismo efecto que el vector original.

En la mayoría de las aplicaciones se recomienda concentrarse en un conjunto de vectores orientados vertical y horizontalmente, de modo que un problema típico implica determinar las componentes horizontal y vertical de un vector. El problema se resuelve con el método de punta-con-cola, aunque invertido. Para explicar el método, en la figura 3.14 se ilustra un vector cualquiera **A**.

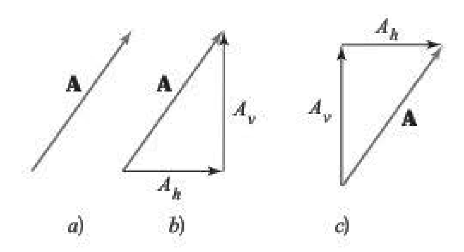


FIGURA 3.14 Componentes de un vector.

Se dibujan dos vectores con la punta de uno en la cola del otro, uno a lo largo de la vertical y el otro a lo largo de la horizontal, que tienen el efecto neto del original. La cola del vector horizontal se coloca en la cola del original y la punta del vector vertical se coloca en la punta del vector original. En la figura 13.4b se muestra esta descomposición del vector en sus componentes horizontal A_h y vertical A_v. Recuerde que el orden de la suma de los vectores no es importante. Por consiguiente, es irrelevante si se dibujan primero el vector horizontal o el vertical. En la figura 3.14c se ilustran las componentes de un vector general en el orden opuesto.

Observe que la magnitud de las componentes se calcula determinando los lados de los triángulos mostrados en la figura 3.14. Estos triángulos siempre son triángulos rectángulos, por lo que se pueden usar los métodos descritos en la sección 3.3. Las direcciones de las componentes se toman de los diagramas de vectores de las figuras 3.14b o 3.14c. La notación estándar consiste en definir como positivos los vectores horizontales dirigidos hacia la derecha. De la misma forma, todos los vectores verticales dirigidos hacia arriba se toman como positivos. Entonces, la dirección de las componentes se determina a partir del signo algebraico asociado con la componente.

Un método alternativo para determinar las componentes rectangulares de un vector es identificar el ángulo del vector con el eje positivo de las x en un sistema convencional de coordenadas cartesianas. Este ángulo se denota como θ. La magnitud de las dos componentes se calcula usando relaciones trigonométricas básicas como

$$A_h = A \cos \theta_x \qquad (3.9)$$

$$A_v = A \operatorname{sen} \theta_x \qquad (3.10)$$

La importancia de este método radica en el hecho de que las direcciones de las componentes son evidentes en el signo que resulta de la función trigonométrica; es decir, un vector que apunta hacia el segundo cuadrante de un sistema convencional de coordenadas cartesianas tiene un ángulo θ_x, entre 90° y 180°. El coseno de un ángulo como este da como resultado un valor negativo; y el seno, un valor positivo. Las ecuaciones (3.9) y (3.10) implican que la componente horizontal es negativa (es decir, hacia la izquierda en un sistema convencional de coordenadas cartesianas), mientras la componente vertical es positiva (es decir, hacia arriba en un sistema convencional de coordenadas cartesianas).

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.8

En la figura 3.15 se presenta una fuerza **F**, de 3.5 kN. Determine las componentes horizontal y vertical de esta fuerza con el método analítico del triángulo.

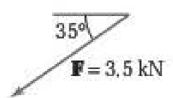


FIGURA 3.15 Vector de fuerza del problema de ejemplo 3.8.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje las componentes del vector***

La componente horizontal del vector se dibuja a partir de la cola del vector **F**. La componente vertical del vector se dibuja a partir del vector horizontal a la punta del vector de fuerza original. En la figura 3.16 se muestran las dos componentes.

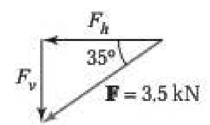


FIGURA 3.16 Componentes de la fuerza del problema de ejemplo 3.8.

2. ***Use el método del triángulo***

Trabajando con el triángulo rectángulo, se escribe una expresión para ambas componentes con el uso de funciones trigonométricas:

$$\text{sen } 35° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F_v}{3.5 \text{ kN}}$$

$$\cos 35° = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F_h}{3.5 \text{ kN}}$$

Ambas expresiones se despejan en términos de la magnitud de las componentes deseadas:

$$\begin{aligned} F_h &= (3.5 \text{kN}) \cos 35° = 2.87 \text{kN} \leftarrow \\ &= -2.87 \text{ kN} \\ \mathbf{F}_v &= (3.5 \text{kN}) \text{ sen } 35° = 2.00 \text{ kN}\downarrow \\ &= -2.00 \text{ kN} \end{aligned}$$

3. ***Use el método del ángulo con el eje x***

Se obtiene una solución alternativa usando las ecuaciones (3.9) y (3.10). El ángulo θ_x del eje x positivo al vector **F** es de 215°. Las componentes se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} F_h &= F \cos\theta_x = (3.5 \text{ kN}) \cos 215° = -2.87 \text{ kN} \\ &= 2.87 \text{kN} \leftarrow \\ F_v &= F \text{ sen}\,\theta_x = (3.5 \text{ kN}) \text{ sen } 215° = -2.0 \text{ kN} \\ &= 2.0 \text{ kN}\downarrow \end{aligned}$$

3.11 SUMA ANALÍTICA DE VECTORES (+>): MÉTODO DE COMPONENTES

Las componentes de un conjunto de vectores sirven para determinar el efecto neto de los vectores. Como se mencionó, este método es mejor cuando se necesita combinar más de dos vectores, además de que implica la descomposición de cada vector individual en sus componentes horizontales y verticales. En general, se usa la convención del signo algebraico para las componentes, como ya se describió.

Luego se suman todas las componentes horizontales para obtener una componente única, la cual representa el efecto horizontal neto del conjunto de vectores. Es importante destacar que las magnitudes de las componentes se pueden sumar sin dificultad porque todas tienen la misma dirección. Estas componentes se tratan como magnitudes escalares. Se usa un signo positivo o uno negativo para denotar el sentido de la componente. Este concepto se resume en la siguiente ecuación:

$$R_h = A_h + B_h + C_h + D_h + \ldots \qquad \textbf{(3.11)}$$

De igual manera, se suman todas las componentes verticales en una sola componente vectorial, la cual representa el efecto vertical neto del conjunto de vectores:

$$R_v = A_v + B_v + C_v + D_v + \ldots \qquad \textbf{(3.12)}$$

Ahora se suman vectorialmente las dos componentes netas para obtener la resultante. Las funciones trigonométricas se utilizan para obtener las ecuaciones siguientes:

$$R = \sqrt{R_h^2 + R_v^2} \qquad \textbf{(3.13)}$$

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{R_v}{R_h}\right) \qquad \textbf{(3.14)}$$

La resultante es el efecto combinado de la serie completa de vectores. El procedimiento anterior se aplica más eficientemente cuando los cálculos se organizan en una tabla, como se muestra en el problema de ejemplo siguiente.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.9

Tres fuerzas actúan sobre un gancho, como se indica en la figura 3.17. Determine el efecto neto de tales fuerzas con el método analítico de componentes.

SOLUCIÓN: 1. ***Use el método del ángulo con el eje x para determinar las componentes de la resultante***

Se determinan las componentes horizontal y vertical de cada fuerza por trigonometría, las cuales se ilustran en la figura 3.18. También se muestran los vectores reorganizados del modo punta-con-cola. Las componentes están organizadas en la tabla 3.1.

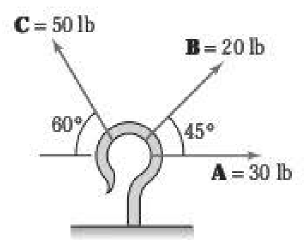


FIGURA 3.17 Fuerzas del problema de ejemplo 3.9.

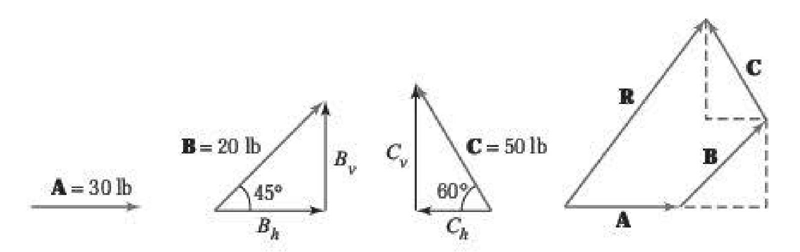


FIGURA 3.18 Componentes de los vectores en el problema de ejemplo 3.9.

TABLA 3.1 Componentes de los vectores para el problema de ejemplo 3.9

Vector	Ángulo de referencia θ_x	Componente *h* (lb) $F_h = F \cos \theta_x$	Componente *v* (lb) $F_v = F \text{ sen } \theta_x$
A	0°	$A_h = (30)\cos 0° = +30$ lb	$A_v = (30)\text{sen } 0° = 0$
B	45°	$B_h = (20)\cos 45° = +14.14$ lb	$B_v = (20)\text{sen } 45° = +14.14$ lb
C	120°	$C_h = (50)\cos 120° = -25$ lb	$C_v = (50)\text{sen } 120° = +43.30$ lb
		$R_h = 19.14$	$R_v = 57.44$

Observe en la figura 3.18 que la suma de las magnitudes de las componentes horizontales sigue la trayectoria de la "distancia" total navegada por los vectores en la dirección horizontal. Lo mismo es válido para la suma de las magnitudes de las componentes verticales. Esta es la lógica detrás del método de componentes en la combinación de vectores. En este problema, las sumas de las componentes individuales horizontal y vertical nos dan las componentes de la resultante como sigue:

$$R_h = 19.14 \text{ lb}$$

y

$$R_v = 57.44 \text{ lb}$$

2. ***Combine las componentes de la resultante***

La resultante es la suma vectorial de los dos vectores perpendiculares, como se muestra en la figura 3.19.

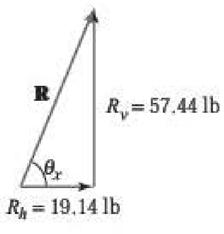


FIGURA 3.19 Vector resultante del problema de ejemplo 3.9.

La magnitud de la resultante se obtiene con la ecuación (2.13):

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_h^2 + R_v^2} \\ &= \sqrt{(19.14 \text{lb})^2 + (57.44 \text{lb})^2} = 60.54 \text{lb} \end{aligned}$$

Se calcula el ángulo de la resultante:

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{R_v}{R_h}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{57.44\text{ lb}}{19.14\text{ lb}}\right) = 71.6^\circ$$

Por lo tanto, la resultante de las tres fuerzas se define formalmente como

$$\mathbf{R} = 60.54\text{ lb} \angle 71.6^\circ$$

3.12 RESTA O SUSTRACCIÓN VECTORIAL (–>)

En algunos casos, se desea conocer la diferencia entre cantidades vectoriales. En tales situaciones, deben restarse los vectores. El símbolo –> representa la sustracción de vectores, la cual es la diferencia de la resta algebraica [ref. 5]. La resta de vectores se realiza de manera similar a la suma. De hecho, la resta suma el vector negativo u opuesto del vector que se va a restar. El negativo de un vector tiene la misma magnitud, pero en dirección contraria. La figura 3.20 ilustra el vector **A** y su negativo –> **A**.

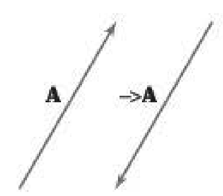


FIGURA 3.20 Vector negativo.

Ya sea que se use el método gráfico o el analítico, habrá que dibujar un diagrama de los vectores para entender el procedimiento. Considere un problema donde el vector **B** se debe restar del vector **A**, como se indica en la figura 3.21a.

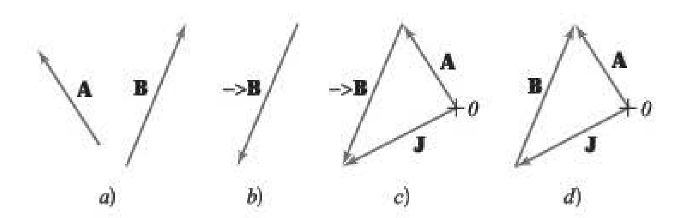


FIGURA 3.21 Resta de vectores.

Esta sustracción se efectúa dibujando primero el negativo del vector **B**, –>**B**. Lo anterior se ilustra en la figura 3.21b. Luego, el vector –>**B** se suma al vector **A**, como se indica en la figura 3.21c. La resta se establece matemáticamente como

J = **A** –> **B** = **A** +> (–>**B**)

Observe que la expresión es idéntica a la resta de cantidades escalares con los métodos algebraicos básicos. Asimismo, se designa como **J** el resultado de la resta vectorial. La notación **R** se reserva normalmente para representar el resultado de una suma de vectores.

La figura 3.21d indica que se obtiene el mismo resultado de la resta vectorial colocando el vector **B** sobre el vector **A**, pero con orientación opuesta de punta a cola. Este método suele ser el preferido, después de adquirir cierta confianza, ya que elimina la necesidad de volver a dibujar el vector negativo. De manera general, los vectores se suman con el formato punta-con-cola, mientras que se restan con el formato punta-con-punta. Se revisará este concepto con más detalle, conforme los métodos individuales de solución se revisen en los siguientes problemas de ejemplo.

3.13 SUSTRACCIÓN GRÁFICA DE VECTORES (–>)

Como se vio, la resta de vectores se parece mucho a la suma de vectores. Para restar vectores gráficamente, se reubican para formar diagramas vectoriales de punta-con-punta. El vector que se restará debe tratarse del modo que se indicó en la sección 3.12.

De nueva cuenta, el proceso de resta de vectores puede realizarse gráficamente con técnicas de dibujo manual, o bien, con un software de CAD. Independientemente del método que se utilice, los conceptos subyacentes son idénticos. Los detalles del proceso se muestran en los ejemplos siguientes.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.10

Determine gráficamente el resultado de la resta del vector de velocidad **B** del vector **A**: **J** = **A** –> **B**, el cual se muestra en la figura 3.22.

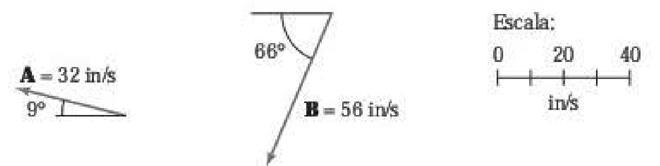


FIGURA 3.22 Vectores del problema de ejemplo 3.10.

SOLUCIÓN: 1. ***Construya el diagrama vectorial***

Para obtener el resultado, los vectores se ubican en la forma punta-con-cola, pero con el vector **B** apuntando hacia el vector **A**. De nueva cuenta, esto ocurre porque el vector **B** se está restando (lo opuesto a la suma). En la figura 3.23 se presenta el diagrama vectorial.

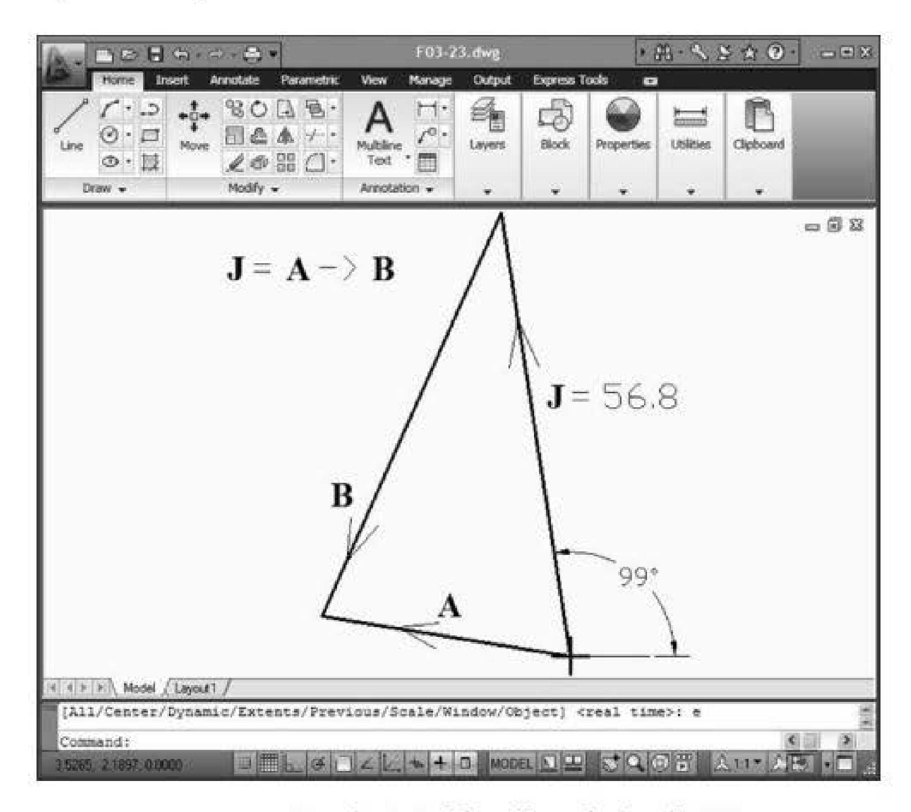


FIGURA 3.23 $\mathbf{J} = \mathbf{A} -> \mathbf{B}$ del problema de ejemplo 3.10.

2. ***Mida el resultado***

La resultante se extiende de la cola de **A**, el origen, a la cola de **B**. La longitud medida del vector **J** es de 56.8 in/s.

También se requiere la dirección para definir completamente el vector **J**. El ángulo de la horizontal al vector **J** es de 99°. Por lo tanto, la manera correcta de presentar la solución es como sigue:

$$\mathbf{J} = 56.8 \text{ in/s } \angle 81^\circ$$

o bien,

$$\mathbf{J} = 56.8 \text{ in/s } 99^\circ$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.11

Determine gráficamente el resultado de $\mathbf{J} = \mathbf{A} -> \mathbf{B} -> \mathbf{C} +> \mathbf{D}$ de los vectores de fuerza que se ilustran en la figura 3.24.

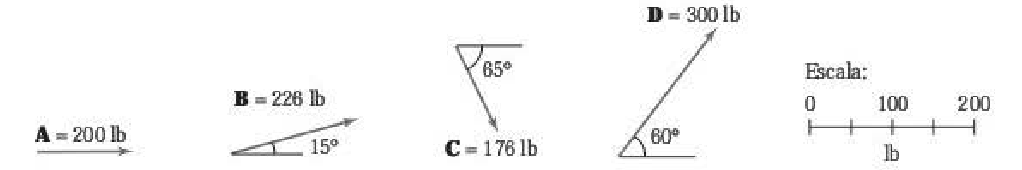


FIGURA 3.24 Vectores del problema de ejemplo 3.11.

SOLUCIÓN: 1. ***Construya el diagrama vectorial***

Para determinar el resultado de **J** = **A** –> **B** –> **C** +> **D**, los vectores deben reubicarse punta-con-cola o punta-con-punta, dependiendo de si se suman o se restan. Es necesario que el vector **B** se dibuje apuntando hacia el vector **A**, porque **B** se está restando. Algo parecido sucede con el vector **C**. Luego, la cola del vector **D** se coloca sobre la cola de **C**, porque **D** se va a sumar a la serie de vectores previamente ensamblados. El diagrama de la solución vectorial se muestra en la figura 3.25.

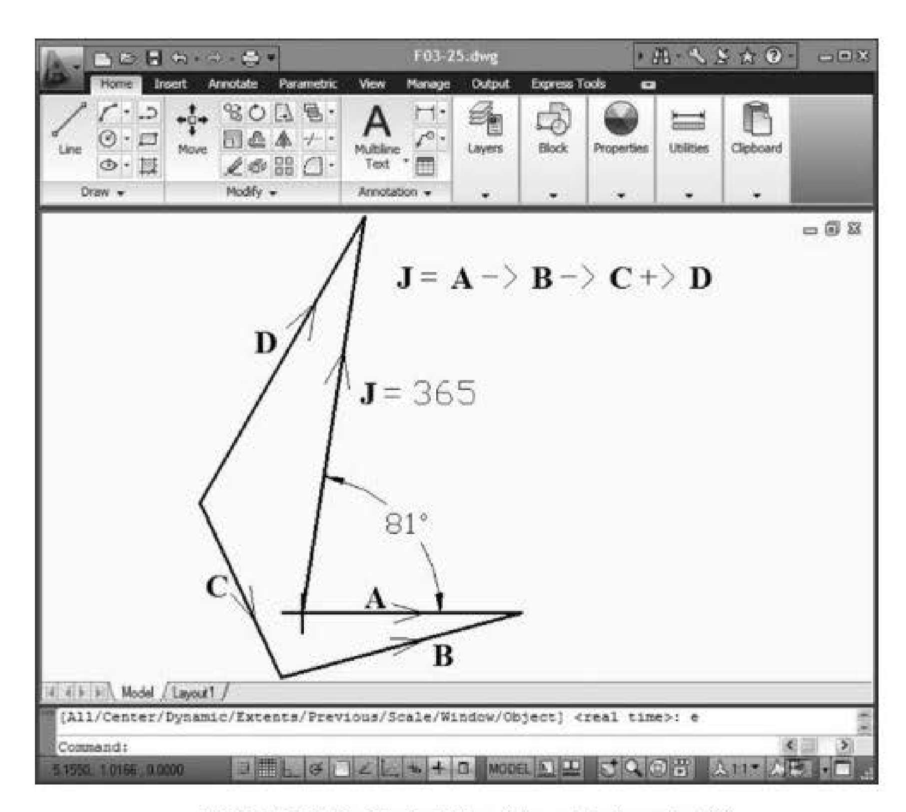


FIGURA 3.25 Resultado del problema de ejemplo 3.11.

En el polígono vectorial de la figura 3.25, se observa que los vectores **B** y **C** aparecen colocados hacia atrás, lo cual ocurre en la resta de vectores.

2. ***Mida el resultado***

La longitud del vector **J** es de 365 lb. El ángulo de la horizontal al vector **J** es de 81°. Por lo tanto, la manera correcta de presentar la solución es como sigue:

$$\mathbf{J} = 365 \text{ lb} \angle 81°$$

3.14 RESTA VECTORIAL ANALÍTICA (–>): MÉTODO DEL TRIÁNGULO

Como en la suma analítica de vectores, el método del triángulo se adapta mejor cuando se manejan solamente dos vectores. Se debería trazar un diagrama vectorial usando la lógica que se describió en la sección anterior. Luego se usan las leyes del triángulo para determinar el resultado de la resta de vectores. Este método general se ilustra a través del siguiente problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.12

Determine analíticamente el resultado de la operación con vectores **J** = **A** −> **B** que se muestra en la figura 3.26.



FIGURA 3.26 Vectores del problema de ejemplo 3.12.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje un diagrama vectorial simple***

Se colocan los vectores en un polígono vectorial, como se indica en la figura 3.27. Nuevamente, el vector **B** se coloca apuntando hacia el vector **A** porque se va a restar. Observe también que se requiere tan solo un diagrama simple porque la resultante se determina analíticamente.

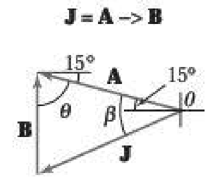


FIGURA 3.27 Resultado del problema de ejemplo 3.12.

2. ***Determine un ángulo interior***

Como el ángulo entre **A** y la horizontal es de 15°, el ángulo entre **A** y la vertical es de 75°. Observe que el ángulo entre la vertical y **A** es el mismo que el ángulo identificado como θ; por lo tanto, $\theta = 75^\circ$.

El problema para determinar la resultante de **A** −> **B** es en realidad el caso de un triángulo general, como el descrito en la sección 3.6.2 (caso 3).

3. ***Determine la magnitud de la resultante***

Al aplicar el procedimiento definido para el problema del caso 3, se usa la ley de los cosenos para calcular la magnitud de la resultante:

$$J = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$
$$= \sqrt{(15\text{ ft/s}^2)^2 + (10\text{ ft/s}^2)^2 - 2(15\text{ ft/s}^2)(10\text{ ft/s}^2)\cos 75^\circ} = 15.73\text{ ft/s}^2$$

4. ***Determine la dirección de la resultante***

Se utiliza la ley de los senos para calcular el ángulo entre los vectores **A** y **J**:

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{B}{J}\right)\text{sen}\,\theta\right\}$$
$$= \text{sen}^{-1}\left\{\frac{10\text{ ft/s}^2}{15.73\text{ ft/s}^2}\text{ sen }75\right\} = 37.9^\circ$$

5. ***Especifique completamente el resultado***

Al examinar la figura 3.27, se observa que el ángulo que hace **J** con la horizontal es de 37.9° − 15° = 22.9°. La solución se escribe correctamente como

$$\mathbf{J} = 15.73\text{ ft/s}^2 \;\; \overline{22.9^\circ\swarrow}$$

3.15 RESTA VECTORIAL ANALÍTICA (–>): MÉTODO DE COMPONENTES

Para determinar el resultado analítico de la resta de una serie de vectores es mejor utilizar el método de componentes, lo cual se hace de la misma forma que en la suma de vectores. Considere el problema general de la resta de vectores definido por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} +> \mathbf{B} -> \mathbf{C} +> \mathbf{D} +> \ldots$$

Se determinan las componentes horizontal y vertical de cada vector (como en la sección 3.10). También se requiere aplicar una convención de signos para denotar el sentido de las componentes. La convención que se utiliza en la sección 3.10 designaba las componentes que apuntaban hacia arriba o hacia la derecha con un signo algebraico positivo.

Puesto que se trata de magnitudes escalares, las componentes individuales se combinan algebraicamente al sumarse o restarse. Para el problema general definido aquí, las componentes vertical y horizontal de la resultante se escriben como:

$$J_h = A_h + B_h - C_h + D_h + \ldots$$
$$J_v = A_v + B_v - C_v + D_v + \ldots$$

Observe que las componentes de **C** se restan de todas las demás componentes, lo cual es consistente con la resta deseada del vector. Entonces, con las ecuaciones (3.13) y (3.14), se combinan vectorialmente las dos componentes resultantes en una sola resultante, que es resultado de la manipulación vectorial de la serie de vectores completa. De nueva cuenta, el procedimiento se puede aplicar más eficientemente cuando los cálculos se organizan en una tabla.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.13

Determine analíticamente el resultado de $\mathbf{J} = \mathbf{A} -> \mathbf{B} +> \mathbf{C} +> \mathbf{D}$ para los vectores de velocidad mostrados en la figura 3.28.

30° **A** = 6 ft/s   15° **B** = 12 ft/s   **C** = 8 ft/s 45°   30° **D** = 10 ft/s

FIGURA 3.28 Fuerzas del problema de ejemplo 3.13.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore un diagrama vectorial sencillo***

Las componentes horizontal y vertical de cada velocidad se determinan aplicando las ecuaciones trigonométricas (3.9) y (3.10), que son las que se muestran en la figura 3.29. También se muestran todos los vectores reubicados en una sola serie: punta-con-cola para la suma y cola-con-punta para la resta.

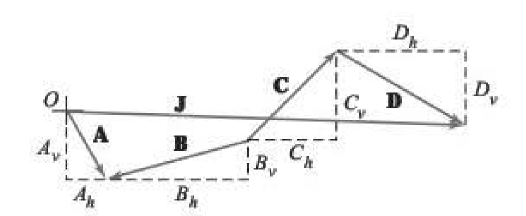


FIGURA 3.29 Resultado del problema de ejemplo 3.13.

2. ***Use el método del ángulo con el eje x para determinar las componentes***

Los valores de las componentes se listan en la tabla 3.2.

TABLA 3.2 Valores de los componentes para el problema de ejmplo 3.13

Vector	Ángulo de referencia θ_x	Componente h (ft/s) $V_h = V \cos\theta_x$	Componente v (ft/s) $V_v = V \operatorname{sen}\theta_x$
A	300°	+3.00	−5.19
B	195°	−11.59	−3.11
C	45°	+5.66	+5.66
D	330°	+8.66	−5.00

3. ***Determine las componentes de la solución***

La manipulación algebraica de las componentes vertical y horizontal proporciona las componentes de la resultante:

$$J_h = A_h - B_h + C_h + D_h$$
$$= (+3.0) - (-11.59) + (+5.66) + (+8.66) = +28.91 \text{ ft/s}$$
$$J_v = A_v - B_v + C_v + D_v$$
$$= (-5.19) - (-3.11) + (+5.66) + (-5.00) = -1.42 \text{ ft/s}$$

4. ***Combine las componentes de la solución***

La magnitud y la dirección de la resultante se determinan sumando vectorialmente las componentes (figura 3.30).

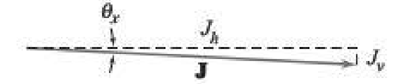


FIGURA 3.30 Vector resultante del problema de ejemplo 3.13.

La magnitud de la solución se determina con la ecuación (3.13):

$$J = \sqrt{J_h^2 + J_v^2}$$
$$= \sqrt{(28.91 \text{ ft/s})^2 + (-1.42 \text{ ft/s})^2} = 28.94 \text{ ft/s}$$

El ángulo de la solución se calcula a partir de la función tangente:

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{J_v}{J_h}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1.42 \text{ ft/s}}{28.91 \text{ ft/s}}\right) = -2.8^\circ$$

Por lo tanto, la solución se establece formalmente como

$$\mathbf{J} = 28.94 \text{ ft/s} \angle 2.8^\circ$$

3.16 ECUACIONES VECTORIALES

Como se vio en la sección 3.8, las operaciones vectoriales se pueden expresar en forma de ecuaciones. La expresión para restar dos vectores, **J** = **A** –> **B**, es en realidad una ecuación vectorial. Las ecuaciones vectoriales se utilizan de forma similar a las ecuaciones algebraicas. Los términos se podrían intercambiar de lado de la igualdad modificando sus signos. Por ejemplo, la ecuación

A +> **B** –> **C** = **D**

se replantea como:

A +> **B** = **C** +> **D**

Se ha visto la importancia de las ecuaciones vectoriales con las operaciones de suma y resta de vectores. En la suma vectorial, los vectores se ubican punta-con-cola, en tanto que la resultante es un vector que se extiende desde el origen del primer vector hasta la punta del vector final. La figura 3.31a ilustra el diagrama vectorial de lo siguiente:

R = **A** +> **B** +> **C**

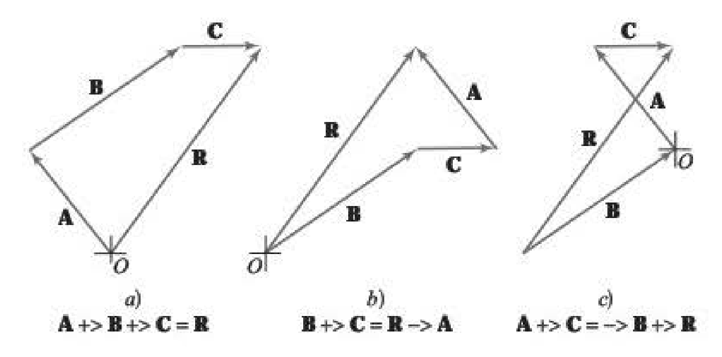


FIGURA 3.31 Ecuaciones vectoriales.

La ecuación se replantea como:

B +> C = R -> A

El diagrama vectorial mostrado en la figura 3.31b ilustra esta forma de la ecuación. Observe que como el vector **A** se resta del vector **R**, el vector **A** debe apuntar hacia **R**. Recuerde que este es el método opuesto al de punta-con-cola, ya que la resta es opuesta a la suma.

Observe que como el diagrama forma un polígono cerrado, la magnitud y la dirección de todos los vectores se mantienen iguales. Esto valida que las ecuaciones vectoriales se utilicen sin alterar su significado. La ecuación puede replantearse una vez más como (figura 3.31c):

-> B +> R = A +> C

Como se ilustró en la figura 3.31, una ecuación vectorial se puede replantear de varias maneras diferentes. Si bien los polígonos vectoriales creados por las ecuaciones tienen formas distintas, los vectores individuales permanecen sin modificación. Con este principio, es posible escribir una ecuación vectorial para describir un diagrama vectorial.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.14

Escriba una ecuación vectorial para el arreglo de los vectores mostrado en la figura 3.32.

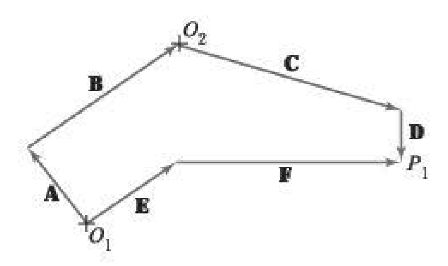


FIGURA 3.32 Diagrama vectorial del problema de ejemplo 3.14.

SOLUCIÓN:

1. ***Escriba una ecuación para seguir las dos trayectorias de O_1 a P_1***

Utilice el punto O_1 como el origen de la ecuación vectorial y siga las trayectorias al punto P_1:

La trayectoria superior establece:	**A +> B +> C +> D**
La trayectoria inferior establece:	**E +> F**

Como inician y terminan en un punto común, ambas trayectorias deben ser vectorialmente iguales. Por consiguiente, la ecuación se escribe como:

O_1P_1 = A +> B +> C +> D = E +> F

2. ***Escriba una ecuación para seguir las dos trayectorias de O_2 a P_1***

Se puede escribir otra ecuación usando el punto O_2 como el origen y siguiendo las trayectorias al punto P_1:

La trayectoria superior establece:	**C +> D**
La trayectoria inferior establece:	**-> B -> A +> E +> F**

de modo que la ecuación se escribe como sigue:

O_2P_1 = C +> D = -> A -> B +> E +> F

Observe que estas son dos formas de la misma ecuación.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.15

Escriba una ecuación vectorial para el arreglo de vectores mostrado en la figura 3.33. Luego, replantee la ecuación para eliminar los términos negativos y elabore el diagrama vectorial correspondiente.

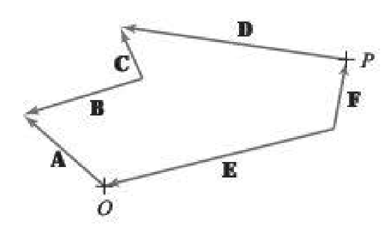


FIGURA 3.33 Diagrama vectorial del problema de ejemplo 3.15.

SOLUCIÓN:

1. ***Escriba una ecuación para seguir las dos trayectorias de O a P***

Utilice el punto *O* como el origen de la ecuación vectorial y siga las trayectorias al punto *P*:

La trayectoria superior establece:	**A** −> **B** +> **C** −> **D**
La trayectoria inferior establece:	−> **E** +> **F**

Por lo tanto, se escribe una ecuación como

OP = **A** −> **B** +> **C** −> **D** = −> **E** +> **F**

2. ***Replantee la ecuación***

Para eliminar los términos negativos, los vectores **B**, **D** y **E** se deben trasladar a sus respectivos lados opuestos de la ecuación. Esto genera la siguiente ecuación:

A +> **C** +> **E** = **B** +> **D** +> **F**

Observe que el orden de la suma no tiene importancia. En la figura 3.34 se muestra un nuevo arreglo de los vectores.

Es necesario adquirir familiaridad con las ecuaciones vectoriales conforme se usan extensivamente en el análisis de mecanismos. Por ejemplo, la obtención de la aceleración en mecanismos simples implica ecuaciones vectoriales con seis o más vectores.

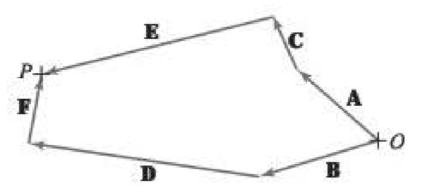


FIGURA 3.34 Diagrama replanteado del problema de ejemplo 3.15.

3.17 APLICACIÓN DE ECUACIONES VECTORIALES

Cada vector de una ecuación representa dos cantidades: una magnitud y una dirección. Por consiguiente, una ecuación vectorial tiene realmente dos restricciones: la combinación de las magnitudes vectoriales y las direcciones debe ser equivalente. Por ello, una ecuación vectorial se utiliza para resolver dos incógnitas. En los problemas de suma y resta estudiados anteriormente, se determinaban la magnitud y la dirección de la resultante.

Una situación común en el análisis de mecanismos implica determinar la magnitud de dos vectores cuando se conoce la dirección de todos los vectores. Como en la suma de vectores, este problema también contiene dos incógnitas, de modo que una ecuación vectorial es suficiente para efectuar el análisis.

3.18 DETERMINACIÓN GRÁFICA DE MAGNITUDES VECTORIALES

En problemas donde hay que determinar la magnitud de dos vectores, la ecuación se debería plantear de modo que uno de los vectores desconocidos sea el último término en cada lado de la ecuación. Para ilustrar este punto, considere el caso en que se deben calcular las magnitudes de los vectores **A** y **B**. La ecuación vectorial es la siguiente:

$$\mathbf{A} +> \mathbf{B} +> \mathbf{C} = \mathbf{D} +> \mathbf{E}$$

la cual se replantea como

$$\mathbf{C} +> \mathbf{B} = \mathbf{D} +> \mathbf{E} \; -> \mathbf{A}$$

Observe que los vectores **A** y **B**, con magnitudes desconocidas, son los últimos términos en ambos lados de la ecuación.

Para resolver gráficamente este problema, se sabe que los vectores en cada lado de la ecuación se colocan punta-con-cola (o punta-con-punta, si los vectores se restan) partiendo de un origen común. Desde luego, ambos lados de la ecuación deben terminar en el mismo punto. Por lo tanto, hay que insertar las líneas en la dirección adecuada en el polígono vectorial. La intersección de las dos líneas representa la igualdad de la ecuación que rige y resuelve el problema. Las líneas se miden con la escala correspondiente para determinar las magnitudes de los vectores desconocidos. También se descubre el sentido del vector desconocido.

Este proceso para determinar las magnitudes vectoriales se puede realizar de manera gráfica; para ello, habrá que usar técnicas manuales de dibujo o un software de CAD. Independientemente del método que se utilice, la estrategia subyacente es idéntica. La estrategia de solución se explica mediante problemas de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.16

Se escribe una ecuación vectorial como

$$\mathbf{A} +> \mathbf{B} +> \mathbf{C} = \mathbf{D} +> \mathbf{E}$$

Se conocen las direcciones de los vectores **A**, **B**, **C**, **D** y **E**, así como las magnitudes de los vectores **B**, **C** y **D** (figura 3.35). Determine gráficamente las magnitudes de los vectores **A** y **E**.

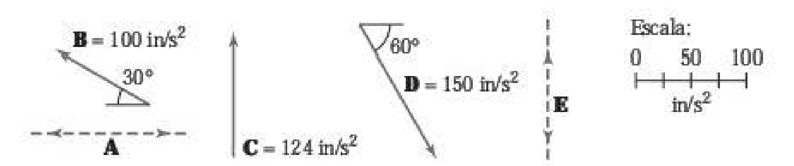


FIGURA 3.35 Vectores del problema de ejemplo 3.16.

SOLUCIÓN:

1. ***Replantee las ecuaciones vectoriales***

   Primero, la ecuación se replantea de modo que las magnitudes desconocidas aparezcan como el último término en cada lado de la ecuación:

$$\mathbf{B} +> \mathbf{C} +> \mathbf{A} = \mathbf{D} +> \mathbf{E}$$

2. ***Coloque en el diagrama todos los vectores completamente conocidos***

   Usando el punto *O* como origen común, se dibujan los vectores **B** y **C** como punta-con-cola. Como se encuentra del otro lado de la ecuación, el vector **D** se debería dibujar a partir del origen (figura 3.36a).

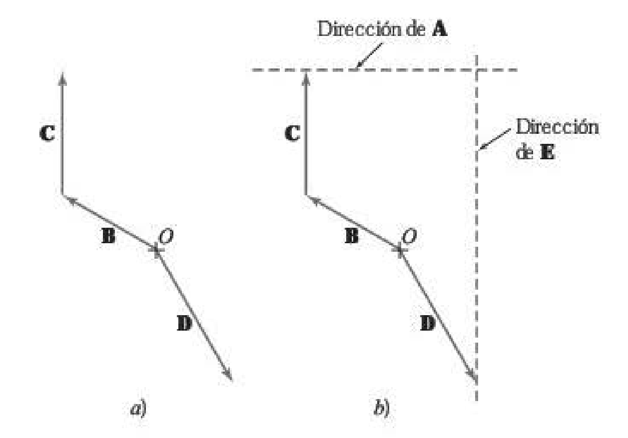


FIGURA 3.36 Diagramas vectoriales del problema de ejemplo 3.16.

c)

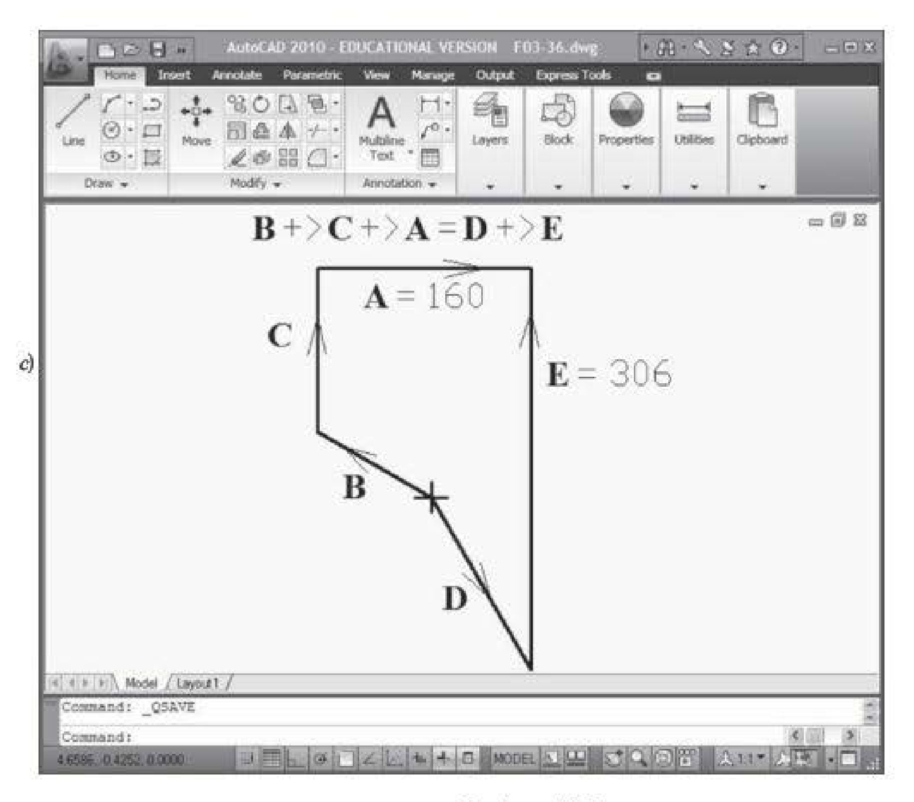


FIGURA 3.36 (*Continuación*).

3. ***Ubique líneas de dirección para los vectores desconocidos***

   Evidentemente, los vectores **A** y **E** cierran el hueco entre el final de los vectores **C** y **D**. Se coloca una línea que representa la dirección del vector **A** en la punta de **C**. Esto está definido por el lado izquierdo de la ecuación vectorial. Asimismo, se coloca una línea que representa la dirección del vector **E** en la punta de **D** (figura 3.36b).

4. ***Recorte los vectores desconocidos en la intersección y mida***

   El punto de intersección de las dos líneas define tanto la magnitud como el sentido de los vectores **A** y **E**. Se dibuja un polígono vectorial completo, como establece la ecuación vectorial (figura 3.36c).

   Al medir los vectores **A** y **E** se obtienen los resultados siguientes:

$$\mathbf{A} = 160 \text{ in/s}^2 \rightarrow$$

$$\mathbf{E} = 306 \text{ in/s}^2 \uparrow$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.17

Una ecuación vectorial se escribe como sigue:

$$\mathbf{A} +> \mathbf{B} -> \mathbf{C} +> \mathbf{D} = \mathbf{E} +> \mathbf{F}$$

Se conocen las direcciones de los vectores **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**, así como las magnitudes de los vectores **B**, **C**, **E** y **F**, como se muestra en la figura 3.37. Obtenga gráficamente las magnitudes de los vectores **A** y **D**.

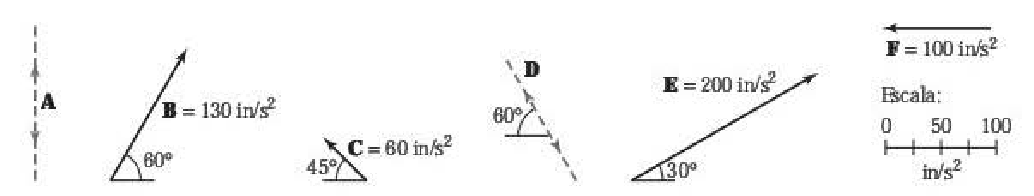


FIGURA 3.37 Vectores del problema de ejemplo 3.17.

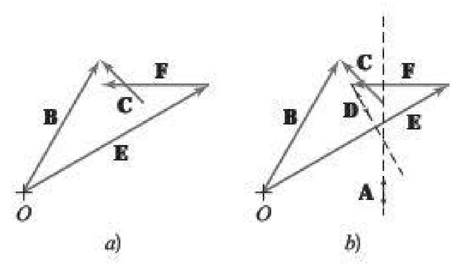
SOLUCIÓN: 1. ***Replantee la ecuación vectorial***

Se replantea primero la ecuación, de modo que las magnitudes desconocidas aparezcan como el último término en cada uno de los lados de la ecuación:

B –> **C** +> **A** = **E** +> **F** –> **D**

2. ***Coloque los vectores completamente conocidos en el diagrama***

Usando el punto *O* como origen común, se dibujan punta-con-punta los vectores **B** y **C** (porque **C** se resta). Como se encuentran del otro lado de la ecuación, los vectores **E** y **F** se colocan punta-con-cola partiendo del origen (figura 3.38a).



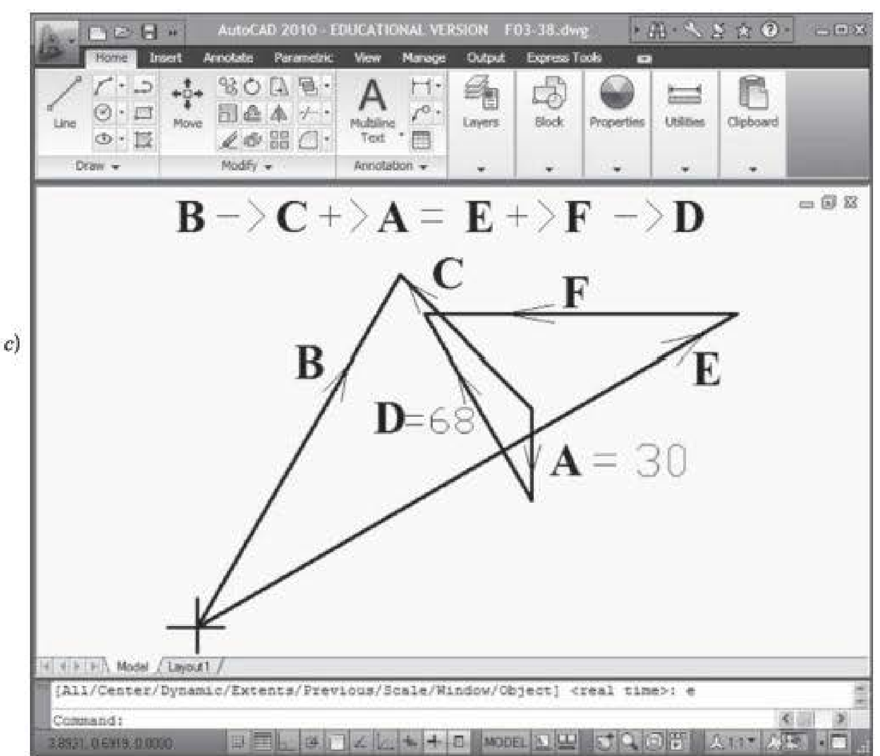


FIGURA 3.38 Diagramas vectoriales del problema de ejemplo 3.17.

3. ***Coloque las líneas direccionales de los vectores desconocidos***

Como en el ejemplo del problema 3.16, los vectores **A** y **D** deben cerrar el hueco entre los extremos de los vectores **C** y **F**. Se coloca una línea que representa la dirección del vector **A** en la punta de **C**. Lo anterior está definido por el lado izquierdo de la ecuación vectorial. De igual manera, se coloca una línea que representa la dirección del vector **D** en la punta de **F** (figura 3.38b).

4. ***Recorte los vectores desconocidos en la intersección y mida***

El punto de intersección de las dos líneas define tanto la magnitud como el sentido de los vectores **A** y **D**. Se elige el sentido de **D** en una dirección que sea consistente con su resta del lado derecho de la ecuación. Se dibuja el polígono vectorial completo, como lo determina la ecuación vectorial (figura 3.38c).

Al medir los vectores **A** y **D** se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{A} = 30\ \text{in/s}^2 \downarrow$$

$$\mathbf{D} = 68\ \text{in/s}^2\ \underline{60^\circ}\nwarrow$$

3.19 DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LAS MAGNITUDES VECTORIALES

También se utiliza un método analítico para determinar la magnitud de dos vectores en una ecuación. En tales casos, se deben determinar las componentes vertical y horizontal de todos los vectores, como se indica en la sección 3.10. Las componentes de los vectores desconocidos se pueden escribir en términos de incógnitas. Como en los métodos de componentes anteriores, se debe adoptar una convención de signos algebraicos al calcular las componentes, de modo que, en este punto, se adquiere un sentido arbitrario de los vectores desconocidos.

Las componentes horizontales de los vectores se tienen que apegar a la ecuación vectorial original. Del mismo modo, las componentes verticales se deberían apegar a la ecuación vectorial. Así, se forman dos ecuaciones algebraicas y se tienen que determinar dos magnitudes desconocidas. Al resolver las dos ecuaciones simultáneas se obtienen los resultados deseados. Cuando una de las magnitudes determinadas tiene un signo negativo, indica que el sentido supuesto del vector fue incorrecto. Por lo tanto, la magnitud calculada y el sentido opuesto definen completamente el vector desconocido.

Este método se ilustra en el siguiente problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 3.18

Una ecuación vectorial es como sigue:

A +> B −> C +> D = E +> F

Se conocen las direcciones de los vectores **A, B, C, D, E** y **F**, así como las magnitudes de los vectores **B, C, E** y **F**, como se muestra en la figura 3.39. Determine analíticamente las magnitudes de los vectores **A** y **D**.

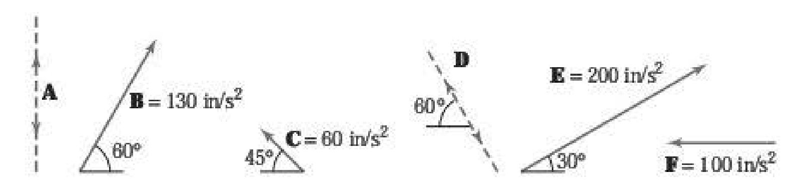


FIGURA 3.39 Vectores del problema de ejemplo 3.18.

SOLUCIÓN:

1. ***Utilice el método del ángulo con el eje x para determinar las componentes vectoriales***

Las componentes horizontal y vertical de cada fuerza se determinan con trigonometría. Para los vectores desconocidos, se supone el sentido, mientras las componentes se determinan en cuanto a las incógnitas. Para este ejemplo, suponga que el vector **A** apunta hacia arriba y el vector **D** hacia abajo a la derecha. Las componentes se incluyen en la tabla 3.3.

TABLA 3.3 Componentes vectoriales del problema de ejemplo 3.18

Vector	Ángulo de referencia θ_x	Componente h (in/s^2) $a_h = a \cos\theta_x$	Componente v (in/s^2) $a_v = a \text{ sen } \theta_x$
A	90°	0	+A
B	60°	+65.0	+112.6
C	135°	−42.4	+42.4
D	300°	+.500D	−.866D
E	30°	+173.2	+100
F	180°	−100	0

2. ***Utilice las ecuaciones vectoriales para obtener las magnitudes desconocidas***

Se usan las componentes para generar las ecuaciones algebraicas que se deducen de la ecuación vectorial original.

A +> B −> C +> D = E +> F

componentes horizontales:

$$A_h + B_h - C_h + D_h = E_h + F_h$$

$$(0) + (+65.0) - (-42.4) + (+0.500D) = (+173.2) + (-100.0)$$

componentes verticales:

$$A_v + B_v - C_v + D_v = E_v + F_v$$

$$(+A) + (+112.6) - (42.4) + (-0.866D) = (+100.0) + (0)$$

En este caso, la ecuación de la componente horizontal se despeja para obtener D. En general, ambas ecuaciones están acopladas y necesitan resolverse simultáneamente. En este ejemplo, la ecuación de la componente horizontal se despejó para obtener lo siguiente:

$$D = -68.4 \text{ in/s}^2$$

Se sustituye este valor de D en la ecuación de la componente vertical para obtener:

$$A = -29.4 \text{ in/s}^2$$

3. ***Especificar completamente los vectores calculados***

Como ambos valores son negativos, las direcciones originales supuestas de los vectores desconocidos fueron incorrectas. Por lo tanto, los resultados correctos son

$$\mathbf{A} = 29.4 \text{ in/s}^2 \downarrow$$
$$\mathbf{D} = 68.4 \text{ in/s}^2 \ \underline{60°}\nwarrow$$

PROBLEMAS

Aun cuando las técnicas manuales de dibujo en los problemas que requieren solución gráfica son didácticas, se recomienda ampliamente el uso de un paquete de CAD.

Trabajo con triángulos

3–1. Determine analíticamente el ángulo θ de la figura P3.1.

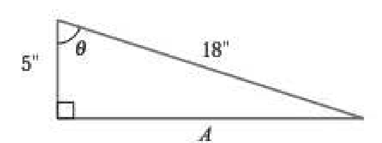


FIGURA P3.1 Problemas 1 y 2.

3–2. Determine analíticamente la longitud del lado A de la figura P3.1.

3–3. Determine analíticamente la longitud del lado X de la figura P3.3.

3–4. Calcule el ángulo θ y la hipotenusa R de la figura P3.3.

3–5. Calcule el ángulo θ y la hipotenusa R de todos los triángulos de la figura P3.5.

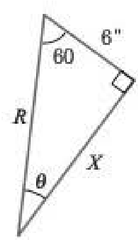
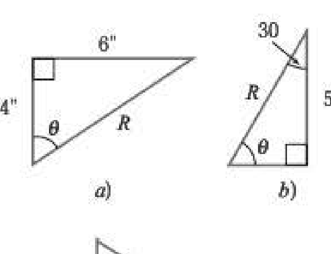


FIGURA P3.3 Problemas 3 y 4.



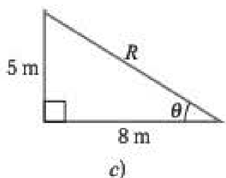


FIGURA P3.5 Problema 5.

3–6. Determine el ángulo β y la longitud s de los dos eslabones de soporte idénticos de la figura P3.6, cuando $x = 150$ mm y $y = 275$ mm.

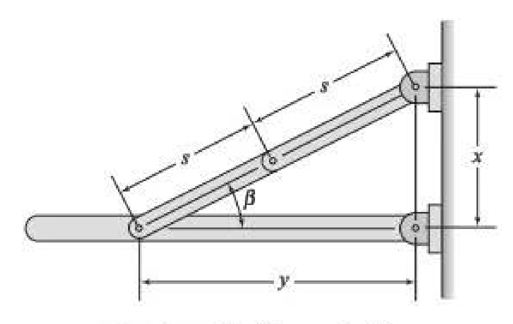


FIGURA P3.6 Problemas 6 a 9.

3–7. Determine la distancia x y la longitud s de los dos eslabones de soporte idénticos de la figura P3.6, cuando $\beta = 35°$ y $y = 16$ in.

3–8. Para el anaquel plegadizo de la figura P3.6, con $\beta = 35°$ y $s = 10$ in, determine las distancias x y y.

3–9. Una marquesina que tiene un montaje de 8 por 12 se inclina hacia arriba 8 in verticales, por cada 12 in de distancia horizontal. Determine el ángulo con la horizontal de esta marquesina.

3–10. Para la ventana giratoria de la figura P3.10, determine la longitud s de los dos eslabones de soporte idénticos, cuando $x = 850$ mm, $d = 500$ mm y $\beta = 35°$.

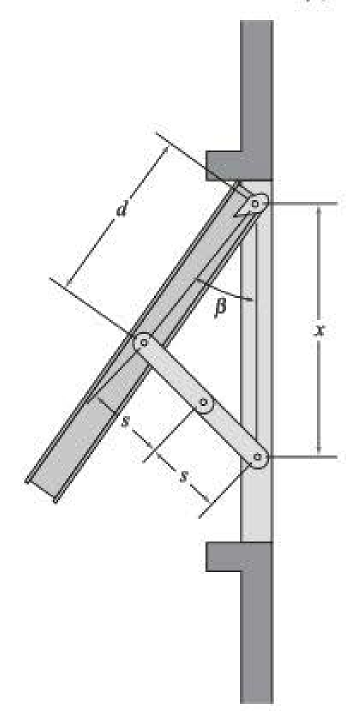


FIGURA P3.10 Problemas 10 y 11.

3–11. Para la ventana giratoria de la figura P3.10, determine el ángulo β cuando $x = 24$ in, $d = 16$ in y $s = 7$ in.

3–12. Si la altura h del camión mostrado en la figura P3.12 es de 52 in, determine la longitud necesaria de la rampa para mantener un ángulo $\beta = 30°$.

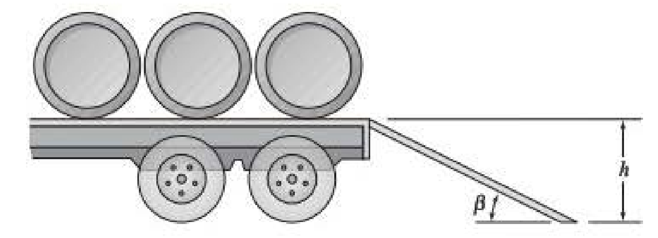


FIGURA P3.12 Problemas 12 y 13.

3–13. Para la rampa mostrada en la figura P3.12, determine el ángulo β que forma con el suelo. La altura del camión es de 1.5 m, en tanto que la rampa mide 4 m de largo.

3–14. La longitud de la escalera mostrada en la figura P3.14 es de 12 ft y el ángulo β que hace con el suelo es de 70°. Determine la distancia vertical sobre la pared, donde descansa la escalera.

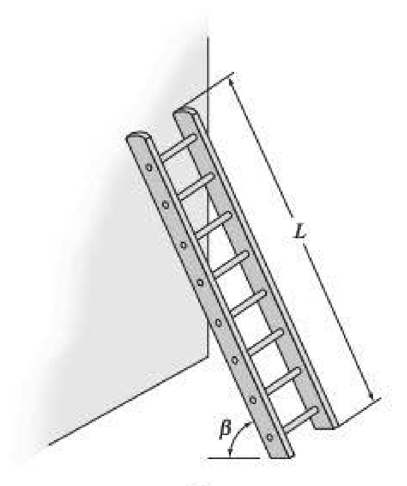


FIGURA P3.14 Problemas 14 y 15.

3–15. Para la escalera mostrada en la figura P3.14, determine el ángulo que forma con el suelo. La escalera tiene 7 m de largo y descansa sobre el suelo a 2 m de la pared.

3–16. Para la transportadora agrícola mostrada en la figura P3.16, determine la longitud requerida de la varilla de soporte. El ángulo β es igual a 28° y las distancias son $x = 20$ ft y $d = 16$ ft. Determine también la altura vertical del extremo de la transportadora si $L = 25$ ft.

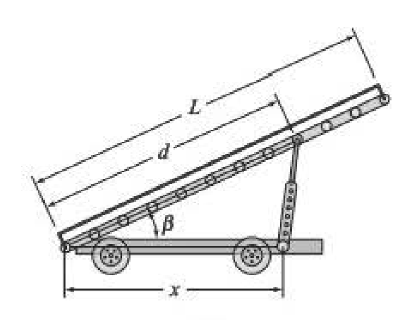


FIGURA P3.16 Problemas 16 y 17.

3–17. Para la transportadora agrícola mostrada en la figura P3.16, determine el ángulo β si se requiere una altura vertical de 8 m en el extremo de la transportadora y $x = 8$ m, $d = 10$ m y $L = 13$ m.

3–18. Determine la altura vertical del cesto de la figura P3.18 cuando $a = 24$ in, $b = 36$ in, $c = 30$ in, $d = 60$ in, $e = 6$ ft y $f = 10$ ft.

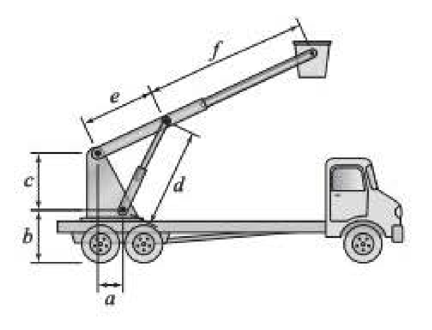


FIGURA P3.18 Problemas 18 y 19.

3–19. Para el montacargas descrito en el problema 3-18, determine la altura vertical del cesto cuando el cilindro hidráulico se acorta a 50 in.

Suma gráfica de vectores

3–20. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine gráficamente la resultante **R** = **A**+> **B**.

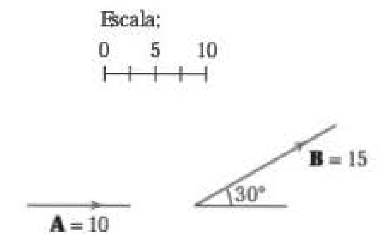


FIGURA P3.20 Problemas 20, 26, 32, 33, 38, 39.

3–21. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine gráficamente la resultante **R** = **A**+> **B**.

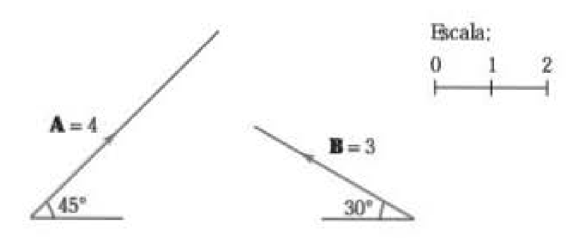


FIGURA P3.21 Problemas 21, 27, 34, 35, 40, 41.

3–22. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine gráficamente la resultante **R** = **A** +> **B**.

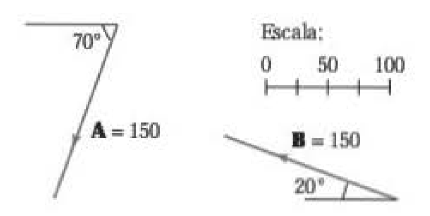


FIGURA P3.22 Problemas 22, 28, 36, 37, 42, 43.

3–23. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine gráficamente la resultante **R** = **A** +> **B** +> **C**.

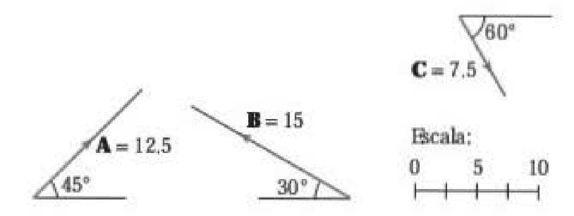


FIGURA P3.23 Problemas 23, 29, 44, 45, 52, 53.

3–24. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine gráficamente la resultante **R** = **A**+> **B** +> **C** +> **D**.

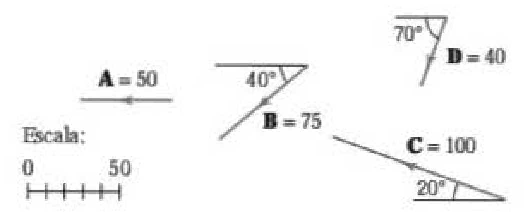


FIGURA P3.24 Problemas 24, 30, 46, 47, 54, 55.

3–25. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine gráficamente la resultante **R** = **A** +> **B** +> **C**+> **D** +> **E**s

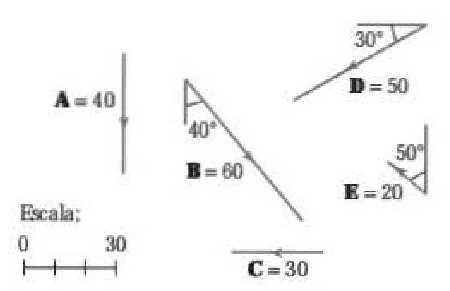


FIGURA P3.25 Problemas 25, 31, 48, 49, 56, 57.

Suma vectorial analítica

3–26. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B**.

3–27. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B**.

3–28. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B**.

3–29. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B** +> **C**.

3–30. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B** +> **C**+> **D**.

3–31. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine analíticamente la resultante **R** = **A** +> **B** +> **C**+> **D** +> **E**.

Resta gráfica de vectores

3–32. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine gráficamente el vector **J** = **A** –> **B**.

3–33. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine gráficamente el vector **K** = **B** –> **A**.

3–34. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine gráficamente el vector **J** = **A** –> **B**.

3–35. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine gráficamente el vector **K** = **B**–> **A**.

3–36. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine gráficamente el vector **J** = **A**–> **B**.

3–37. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine gráficamente el vector **K** = **B** –> **A**.

Resta vectorial analítica

3–38. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine analíticamente el vector **J** = **A** –> **B**.

3–39. Para los vectores mostrados en la figura P3.20, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **A**.

3–40. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine analíticamente el vector **J** = **A** –> **B**.

3–41. Para los vectores mostrados en la figura P3.21, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **A**.

3–42. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine analíticamente el vector **J** = **A** –> **B**.

3–43. Para los vectores mostrados en la figura P3.22, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **A**.

Ecuaciones vectoriales generales (gráficas)

3–44. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine gráficamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B**.

3–45. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine gráficamente el vector **K** = **B** –> **A** –> **C**.

3–46. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine gráficamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B** +> **D**.

3–47. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine gráficamente el vector **K** = **B** –> **D** +> **A** –> **C**.

3–48. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine gráficamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B** +> **D** –> **E**.

3–49. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine gráficamente el vector **K** = **B** –> **D** +> **A** –> **C** +> **E**.

3–50. Con el diagrama vectorial de la figura P3.50:

a) Genere una ecuación que describa el diagrama vectorial.

b) Replantee las ecuaciones para eliminar los términos negativos.

c) Dibuje burdamente los vectores y reorganícelos de acuerdo con la ecuación obtenida en el inciso *b*).

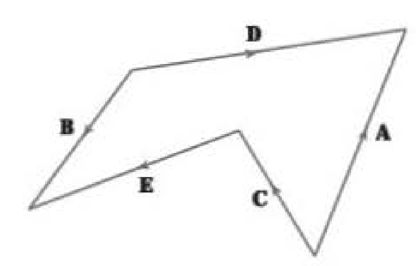


FIGURA P3.50 Problema 50.

3–51. Con el diagrama vectorial de la figura P3.51:

a) Genere una ecuación que describa el diagrama vectorial.

b) Replantee las ecuaciones para eliminar los términos negativos.

c) Dibuje burdamente los vectores y reorganícelos de acuerdo con la ecuación generada en el inciso *b*).

3–52. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine analíticamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B**.

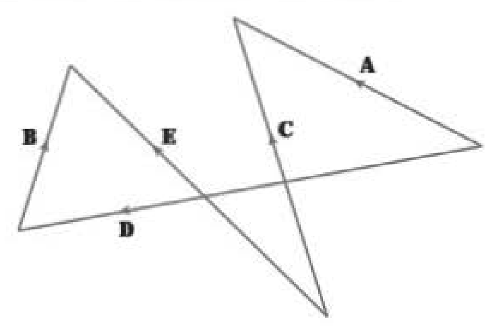


FIGURA P3.51 Problema 51.

3–53. Para los vectores mostrados en la figura P3.23, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **A** –> **C**.

3–54. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine analíticamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B** +> **D**.

3–55. Para los vectores mostrados en la figura P3.24, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **D** +> **A** –> **C**.

3–56. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine analíticamente el vector **J** = **C** +> **A** –> **B** +> **D** –> **E**.

3–57. Para los vectores mostrados en la figura P3.25, determine analíticamente el vector **K** = **B** –> **D** +> **A** –> **C** +> **E**.

Soluciones de magnitudes vectoriales (gráficas)

3–58. Se escribe una ecuación vectorial como **A** +> **B** +> **C** = **D** +> **E**. Las direcciones y magnitudes de los vectores **A**, **B** y **D** se muestran en la figura P3.58. Determine gráficamente (usando técnicas manuales de dibujo o el CAD) las magnitudes de los vectores **C** y **E**.

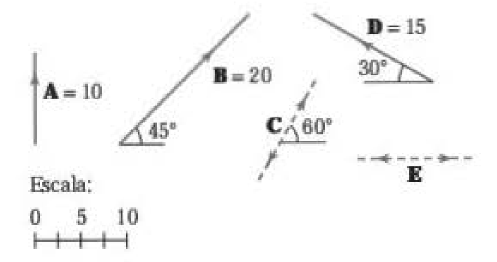


FIGURA P3.58 Problemas 58 y 61.

3–59. Se escribe una ecuación vectorial como **A** +> **B** +> **C** –> **D** = **E** –> **F**. Las direcciones y magnitudes de los vectores **A**, **B**, **C** y **E** se muestran en la figura P3.59. Determine gráficamente (usando técnicas manuales de dibujo o el CAD) las magnitudes de los vectores **D** y **F**.

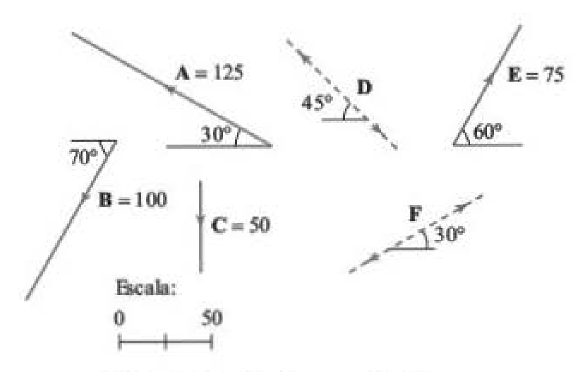


FIGURA P3.59 Problemas 60 y 63.

3–60. Una ecuación vectorial se escribe como **A** –> **B** –> **C** +> **D** = –> **E** +> **F**. Las direcciones y magnitudes de los vectores **A, D, E** y **F** se ilustran en la figura P3.60. Determine gráficamente (usando técnicas manuales de dibujo o el CAD) las magnitudes de los vectores **B** y **C.**

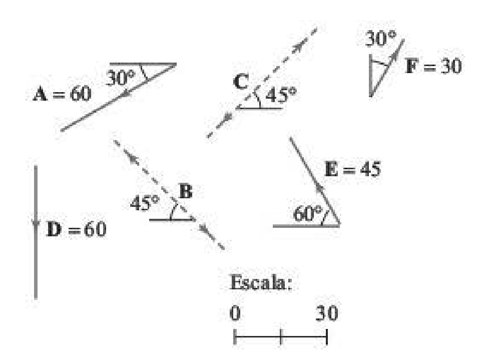


FIGURA P3.60 Problemas 60 y 63.

Soluciones de magnitudes vectoriales (analíticas)

3–61. Determine analíticamente los vectores **C** y **E** del problema 3-58.

3–62. Determine analíticamente los vectores **D** y **F** del problema 3-59.

3–63. Determine analíticamente los vectores **B** y **C** del problema 3-60.

ESTUDIOS DE CASO

3–1. La figura C3.1 muestra dos de varias teclas de una sumadora que fue popular hace varios años. También se presentan las terminales de las teclas 1 y 2 para ilustrar su configuración. Examine cuidadosamente la configuración de las componentes del mecanismo. Luego, conteste las siguientes preguntas para aprender más sobre la operación del mecanismo.

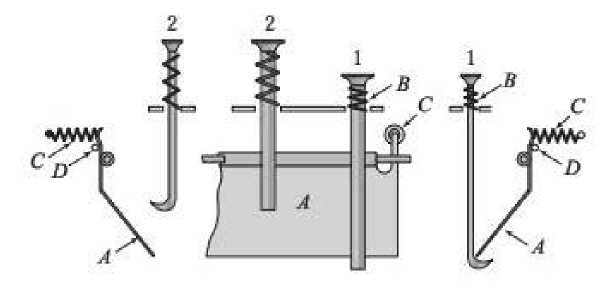


FIGURA C3.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme se presiona la tecla 2, ¿qué pasa con la placa oscilante *A*?
2. ¿Cuál es el objetivo del resorte *C*?
3. ¿Cuál es el objetivo del resorte *B*?
4. Conforme se presiona el botón 2, ¿qué sucede con el botón 1?
5. ¿Cuál es el objetivo de este dispositivo?
6. Como la fuerza es un vector, su dirección es importante. ¿En qué dirección se debe aplicar la fuerza sobre el botón 1 para que actúe el resorte *B*?
7. ¿En qué dirección se debe aplicar la fuerza sobre la placa *A* para que actúe el resorte *C*?
8. Mencione máquinas diferentes de las sumadoras que podrían usar este dispositivo.
9. ¿Cuál es la función del perno *D*?

3–2. Una máquina automática que produce alambre de acero ocasionalmente se atasca cuando la materia prima está sobredimensionada. Para prevenir daños severos a la máquina, fue necesario que el operador cortara la corriente inmediatamente después de que se atascó la máquina. Sin embargo, el operador no puede mantener una vigilancia estrecha sobre la máquina para evitar el daño. Por consiguiente, se sugiere el siguiente mecanismo para resolver el problema.

La figura C3.2 muestra que el engrane *C* impulsa un engrane acoplado (no mostrado) que opera la máquina productora de alambre. La flecha motriz *A* tiene un collarín *B*, el cual está acuñado a ella. El engrane *C* tiene un cuña ajustada sobre la flecha. Dos pernos, *G* y *E*, sujetan respectivamente los eslabones *F* y *D* al engrane *C*. Se usa un perno adicional sobre el engrane *C* para sostener el extremo del resorte *H*. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo. Luego conteste las siguientes preguntas para aprender más acerca de la operación del mecanismo.

1. Conforme la flecha *A* gira en el sentido horario, ¿cómo se mueve el collarín *B*?

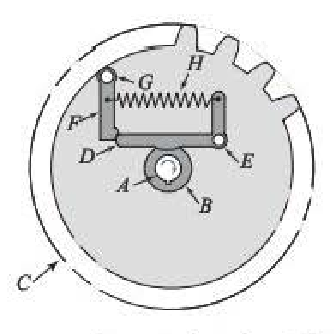


FIGURA C3.2 (Cortesía de Industrial Press).

2. Si el engrane *C* no está fijo al collarín *B*, ¿cómo puede el movimiento en el sentido horario de la flecha hacer girar el engrane?
3. ¿Qué sucede con el movimiento del engrane *C* si se fuerza el eslabón *D* hacia arriba?
4. ¿Qué acción provocaría que el eslabón *D* se moviera hacia arriba?
5. ¿Qué resistencia necesitaría el eslabón *D* para moverse hacia arriba?
6. ¿Cuál es el objetivo de este dispositivo?
7. ¿Cómo llamaría usted a este dispositivo?
8. ¿De qué manera ayuda este dispositivo a la máquina, descrita aquí, que produce automáticamente el alambre?
9. ¿Se debería "reiniciar" este dispositivo alguna vez? ¿Por qué y cómo se realizaría?
10. Como la fuerza es un vector, su dirección es importante. ¿En qué dirección se deben aplicar las fuerzas para que actúe el resorte *H*?
11. Mencione otras máquinas diferentes de la productora de alambre, en las cuales se podría usar este dispositivo.

ANÁLISIS DE POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Definir la posición y el desplazamiento de un punto.**
2. **Determinar gráfica y analíticamente la posición de todos los eslabones de un mecanismo, conforme se desplazan los eslabones impulsores.**
3. **Determinar gráfica y analíticamente las posiciones límite de un mecanismo.**
4. **Determinar gráfica y analíticamente la posición de todos los eslabones en un ciclo completo del movimiento del mecanismo.**
5. **Elaborar un diagrama de desplazamiento de varios puntos del mecanismo, en función del movimiento de otros puntos.**

4.1 INTRODUCCIÓN

En muchos mecanismos, el propósito del análisis es determinar únicamente la ubicación de todos los eslabones conforme el (los) eslabón(es) impulsor(es) del mecanismo se mueve(n) hacia otra posición. Considere la sujetadora para maquinado que se muestra en la figura 4.1. Si la sujetadora se integra a una máquina, resulta esencial entender el movimiento de varios de sus eslabones. Una opción sería investigar el movimiento que se requiere del mango para cerrar la mordaza. Este es un movimiento repetitivo que se requiere de los operadores de la máquina. En el uso de la sujetadora se deben considerar el acceso, el esfuerzo necesario para operar y otros "factores humanos". El análisis de la posición implica con frecuencia el reposicionamiento de los eslabones de un mecanismo en dos configuraciones alternativas.

Otra opción de investigación sería comprender la trayectoria de los diferentes componentes durante el proceso de sujeción. Se deben garantizar las tolerancias adecuadas con los componentes de otra máquina. El análisis de posición se repite por lo general en varios intervalos del movimiento del mecanismo, con la finalidad determinar la ubicación de todos los eslabones en varias fases del ciclo operativo. El enfoque de este capítulo se centra en esos tipos de análisis de posición y desplazamiento.

4.2 POSICIÓN

La posición se refiere a la ubicación de un objeto. En las secciones siguientes se estudiará la posición de puntos y eslabones.

4.2.1 Posición de un punto

La *posición* de un punto sobre un mecanismo es la ubicación espacial de ese punto, que se define con un *vector de posición*, **R**, el cual se extiende de un origen de referencia a la ubicación del punto. La figura 4.2 ilustra un vector de posición, $\mathbf{R}_P$, que establece la posición en un plano del punto *P*. Al igual que todos los vectores, la posición de un punto en un plano se especifica con la distancia desde el origen (magnitud vectorial) y el ángulo a partir de un eje de referencia (orientación).

Una alternativa práctica que se utiliza para identificar la posición de un punto es usar las componentes rectangulares del vector de posición en un sistema de coordenadas de referencia. Observe que la posición del punto *P* en la figura 4.2 está definida respectivamente por sus componentes *x*, *y*, $\mathbf{R}^x{}_P$ y $\mathbf{R}^y{}_P$.

4.2.2 Posición angular de un eslabón

La posición angular de un eslabón también es una magnitud importante. La *posición angular*, θ, se define como el ángulo que forma una línea entre dos puntos del eslabón con un eje de



FIGURA 4.1 Sujetadora para maquinado. (Cortesía de Carr Lane Mfg).

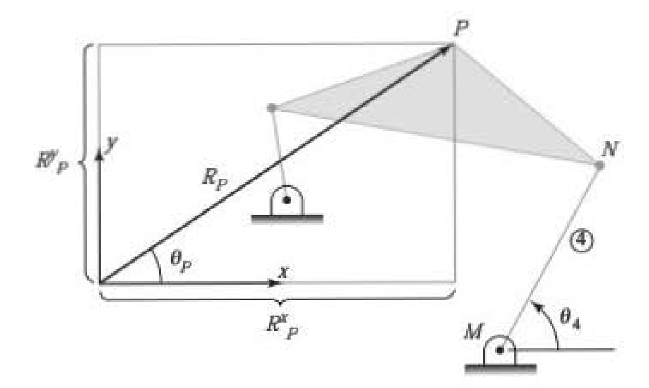


FIGURA 4.2 Vector de posición del punto *P*.

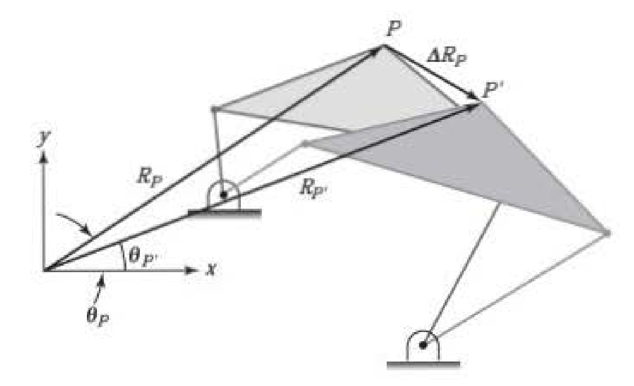


FIGURA 4.3 Vector de desplazamiento del punto *P*.

referencia. En la figura 4.2, la línea *MN* queda sobre el eslabón 4. La posición angular del eslabón 4 se denota con θ_4, que es el ángulo entre el eje *x* y la línea *MN*. Por consistencia, la posición angular se define como positiva si el ángulo se mide en sentido antihorario, desde el eje de referencia, y negativa, si se mide en el sentido horario.

4.2.3 Posición de un mecanismo

El propósito fundamental del análisis de un mecanismo es estudiar su movimiento. El movimiento ocurre cuando se modifican la posición de los eslabones y los puntos de referencia del mecanismo. Conforme se altera la posición de los eslabones, el mecanismo se fuerza a tomar una configuración diferente, en tanto que el movimiento avanza.

Recuerde que en el capítulo 1 vimos que una propiedad importante de un mecanismo es la movilidad (grados de libertad). Para eslabonamientos con un grado de libertad, la posición de un eslabón o un punto puede determinar con precisión la posición de todos los demás eslabones o puntos. Del mismo modo, en los eslabonamientos con dos grados de libertad la posición de dos eslabones determina con exactitud la posición de los demás eslabones.

Por lo tanto, la posición de todos los puntos y eslabones de un mecanismo no es arbitraria ni independiente. Los parámetros independientes son las posiciones de ciertos eslabones o puntos "impulsores". El objetivo principal del análisis de posición es determinar las posiciones resultantes de los puntos de un mecanismo, en función de la posición de esos eslabones o puntos "impulsores".

4.3 DESPLAZAMIENTO

El desplazamiento es el producto final del movimiento. Se trata de un vector que representa la distancia entre la posición inicial y la posición final de un punto o un eslabón. Considere dos tipos de desplazamiento: lineal y angular.

4.3.1 Desplazamiento lineal

El *desplazamiento lineal*, $\Delta\mathbf{R}$, es la distancia lineal recta entre la posición inicial y la posición final de un punto durante un intervalo de tiempo. La figura 4.3 ilustra el punto *P* de un mecanismo que se desplaza a la posición *P*′.

El desplazamiento lineal del punto *P* se denota con ΔR_P y se calcula como la diferencia vectorial entre la posición inicial y la posición final. Dado en forma de ecuación:

$$\Delta\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P'} -> \mathbf{R}_P \qquad (4.1)$$

Observe que el desplazamiento lineal no es la distancia viajada por el punto durante el movimiento.

La magnitud del vector de desplazamiento es la distancia entre la posición inicial y la posición final durante un intervalo. Esta magnitud tiene unidades lineales (pulgadas, pies, milímetros, etcétera). La dirección se identifica con el ángulo entre un eje de referencia y la línea que conecta las dos posiciones. El sentido del vector va de la posición inicial hacia la posición final.

4.3.2 Desplazamiento angular

El *desplazamiento angular*, $\Delta\theta$, es la distancia angular entre dos configuraciones de un eslabón giratorio. Es la diferencia entre la posición angular inicial y la posición angular final del eslabón, como en la figura 4.4. Si bien posee magnitud y dirección (en el sentido horario o antihorario), el desplazamiento angular técnicamente no es un vector, puesto que no cumple con las leyes conmutativa y asociativa de la suma de vectores.

El desplazamiento angular de un eslabón, por ejemplo el eslabón 3, se representa con $\Delta\theta_3$ y se calcula con la ecuación (4.2).

$$\Delta\theta_3 = \theta_{3'} - \theta_3 \qquad (4.2)$$

La magnitud del desplazamiento angular es el ángulo entre la configuración inicial y la configuración final del eslabón durante un intervalo. Esta magnitud se especifica en unidades de giro (por ejemplo, grados, radianes y revoluciones), y el sentido horario o antihorario especifica la dirección.

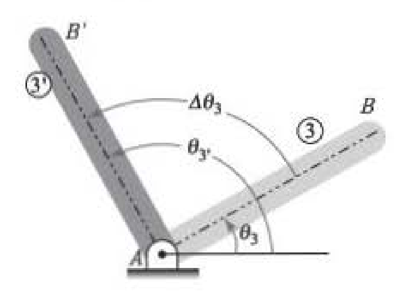


FIGURA 4.4 Desplazamiento angular.

4.4 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO

Una investigación cinemática común es la ubicación de la posición de todos los eslabones de un mecanismo conforme el (los) eslabón(es) impulsor(es) se desplaza(n). Como se indicó en la sección 4.2, los grados de libertad de un mecanismo determinan el número de eslabones impulsores independientes. En la mayoría de los mecanismos comunes (con un grado de libertad), el análisis de desplazamiento consiste en determinar la posición de todos los eslabones mientras un eslabón se desplaza. La posición de todos los eslabones en un momento determinado se conoce como *configuración* del mecanismo.

La figura 4.5 ilustra tal análisis. El mecanismo mostrado tiene cuatro eslabones, todos ellos numerados. Recuerde que el eslabón fijo, o la bancada, siempre debe estar incluido como un eslabón. En el mecanismo también hay cuatro uniones de perno (revolutas).

De acuerdo con la ecuación (1.1), los grados de libertad se calculan como:

$$M = 3(4 - 1) - 2(4) = 1$$

Con un grado de libertad, el movimiento de un eslabón posiciona con exactitud los demás eslabones del mecanismo. Por consiguiente, un problema típico del análisis de desplazamiento implica determinar la posición de los eslabones 3 y 4 de la figura 4.5, conforme el eslabón 2 tiene un desplazamiento determinado. En este ejemplo, el desplazamiento impulsor es angular, $\Delta\theta_2 = 15°$, en el sentido horario.

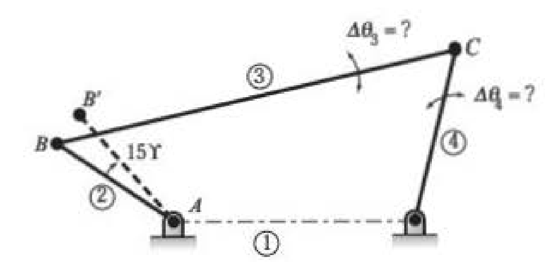


FIGURA 4.5 Análisis típico de la posición.

Casi todos los eslabonamientos tienen configuraciones alternas para una posición dada del (los) eslabón(es) impulsor(es). En la figura 4.6 se muestran dos configuraciones para la misma posición de la manivela de un mecanismo de cuatro barras. Tales configuraciones alternas se conocen como *inversiones geométricas*. Es

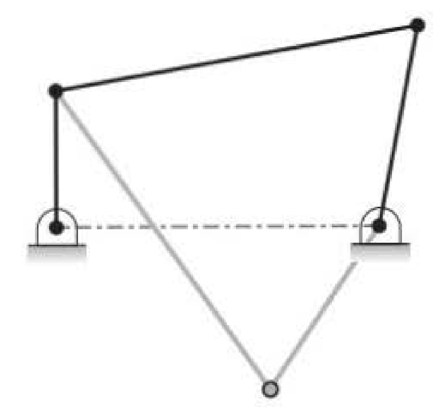


FIGURA 4.6 Dos inversiones geométricas de un mecanismo de cuatro barras.

raro que un mecanismo se mueva de una inversión geométrica a otra sin desarmarlo o sin pasar por puntos muertos. Así, cuando se efectúa un análisis de desplazamiento, es necesario revisar la configuración original del mecanismo para determinar la inversión geométrica de interés.

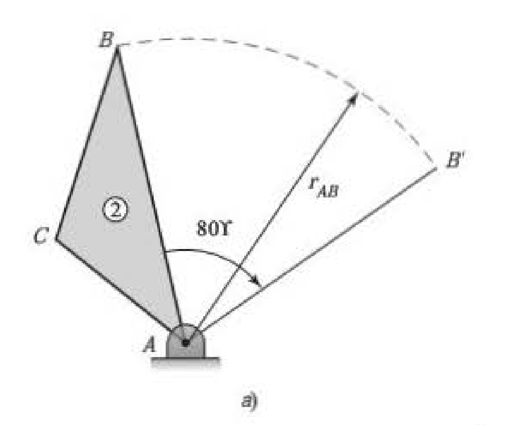
4.5 DESPLAZAMIENTO: ANÁLISIS GRÁFICO

4.5.1 Desplazamiento de un simple eslabón impulsado

Para obtener una nueva configuración en un mecanismo, es necesario reubicar los eslabones en sus nuevas posiciones. Los eslabones simples que giran alrededor de centros fijos se pueden reubicar dibujando arcos con su centro en el pivote fijo, a través del pivote móvil, con un desplazamiento angular específico. Lo anterior se observa en la figura 4.5 cuando el eslabón 2 se gira 15° en el sentido horario.

En algunos análisis, los eslabones complejos sujetos a la bancada también pueden girar. Esto se logra siguiendo varios métodos. En la mayoría de los casos, el método más simple inicia reubicando una sola línea del eslabón. Luego, se reubica el resto de la geometría del eslabón, con base en la posición de la línea que se haya reubicado.

La figura 4.7 ilustra el proceso de giro de un eslabón complejo. En la figura 4.7a, la línea *AB* del eslabón fue desplazada a la posición deseada $\Delta\theta_2 = 80°$ en el sentido horario. Observe que la posición reubicada del punto *B* se designa como *B'*.



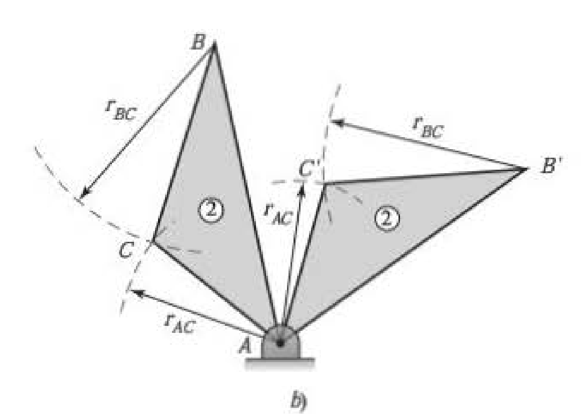


FIGURA 4.7 Giro de un eslabón complejo.

El paso siguiente es determinar la posición del punto reubicado *C*, que se designa como *C'*. Como el eslabón complejo es rígido y no cambia de forma durante el movimiento, las longitudes de las líneas *AC* y *BC* no se modifican. Por lo tanto, el punto *C'* se localiza midiendo las longitudes de *AC* y *BC*, así como dibujando arcos a partir de los puntos *A* y *B'*, respectivamente (figura 4.7b).

Hay un segundo método basado en un sistema de CAD. Las líneas que forman el eslabón se duplican y giran para generar el eslabón reubicado. Todos los sistemas de CAD incluyen un comando que gira con facilidad y copia entidades geométricas. El comando sirve para girar todas las líneas de un eslabón, alrededor de un punto específico, a un desplazamiento angular determinado. Es conveniente mostrar el eslabón girado en otro color y colocarlo en un plano diferente.

4.5.2 Desplazamiento de los eslabones impulsados

Una vez reposicionado el eslabón impulsor, se debe determinar la posición de los demás eslabones. Para hacerlo, se tienen que construir las trayectorias posibles de todos los eslabones conectados a la bancada. Para los eslabones que están apernados a la bancada, todos los puntos sobre el eslabón tan solo pueden girar en relación con la bancada. Por ende, las trayectorias probables de estos puntos son arcos circulares con centro en el perno que conecta el eslabón con la bancada.

La figura 4.8 presenta un diagrama cinemático de un mecanismo. Los eslabones 2, 4 y 6 están sujetos a la bancada. Como los puntos *B*, *C* y *E* están ubicados respectivamente sobre los eslabones 2, 4 y 6, es posible construir fácilmente sus trayectorias restringidas. La trayectoria restringida del punto *B* es un arco circular con centro en el punto *A*, que es el perno que conecta el eslabón 2 con la bancada. Las trayectorias restringidas de *C* y *E* se determinan de modo similar.

La trayectoria restringida de un punto sobre un eslabón que está conectado a la bancada con una unión de corredera, también se determina fácilmente. Todos los puntos sobre el eslabón se mueven en una línea recta paralela a la dirección de la superficie de deslizamiento.

Después de que se hayan construido todas las trayectorias restringidas de los eslabones unidos a la bancada, se determinan las posiciones de los eslabones conectados. Es un proceso lógico que se deriva del hecho de que todos los eslabones son rígidos. Rigidez significa que los eslabones no cambian de longitud ni de forma durante el movimiento.

En la figura 4.5, se desean conocer las posiciones de los eslabones 3 y 4, una vez que el eslabón 2 gira 15° en el sentido horario. Con el uso de los procedimientos descritos en la sección 4.5.1, la figura 4.9 muestra el eslabón 2 reubicado en su posición desplazada, la cual define la posición del punto *B'*. También se construyó la trayectoria restringida del punto *C* y se ilustra en la figura 4.9.

Por su rigidez, la longitud del eslabón 3 no cambia durante el movimiento. Aun cuando el eslabón 2 se ha reposicionado, no modifica la longitud entre los puntos *B* y *C* (r_{BC}). Luego de resumir los hechos de este análisis de desplazamiento, se sabe lo siguiente:

1. El punto *B* se ha movido a *B'*.
2. El punto *C* siempre permanece sobre su trayectoria restringida (longitud r_{CD} desde *D*) y
3. La longitud entre *B* y *C* permanece constante (*C'* debe estar a una longitud r_{BC} de *B'*).

Partiendo de estos hechos, se construye la nueva posición del eslabón 3. Se mide la longitud de la línea *BC*. Como el punto *B* se movió a *B'*, se construye un arco de longitud r_{BC} con centro en *B'*. Al extender este arco, se determina la trayectoria posible del punto *C'*. Sin embargo, el punto *C* también debe permanecer sobre su trayectoria restringida, como se indica en la figura 4.9. Por lo tanto, el punto *C'* se debe localizar en la intersección de los dos arcos. Este proceso se ilustra en la figura 4.10. Observe que los arcos también se intersecarán en un segundo punto, el cual está a una distancia considerable de *C* y representa una segunda inversión geométrica del eslabonamiento. El eslabonamiento debe desarmarse y armarse para obtener esa configuración alternativa, de modo que se puede ignorar la intersección.

Es posible que los dos arcos no se intersequen en absoluto. Los casos donde la trayectoria restringida y la trayectoria posible no se intersecan indican que la longitud de los eslabones individuales evita que el eslabón impulsor alcance el desplazamiento especificado.

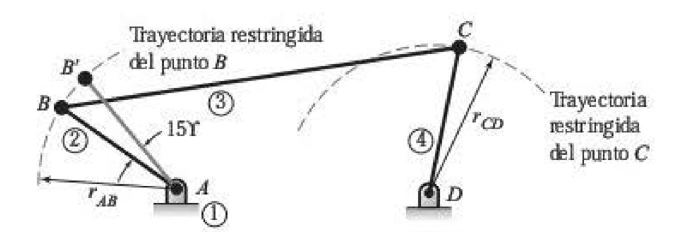


FIGURA 4.9 Construcción de la trayectoria restringida de *C*.

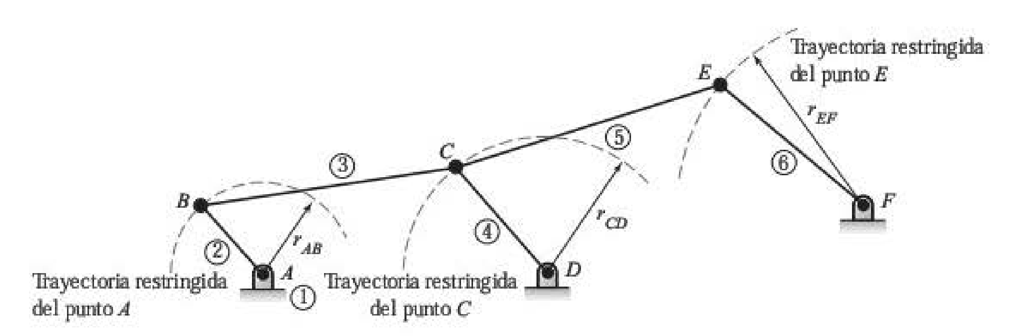


FIGURA 4.8 Trayectorias restringidas de puntos sobre un eslabón sujeto a la bancada.

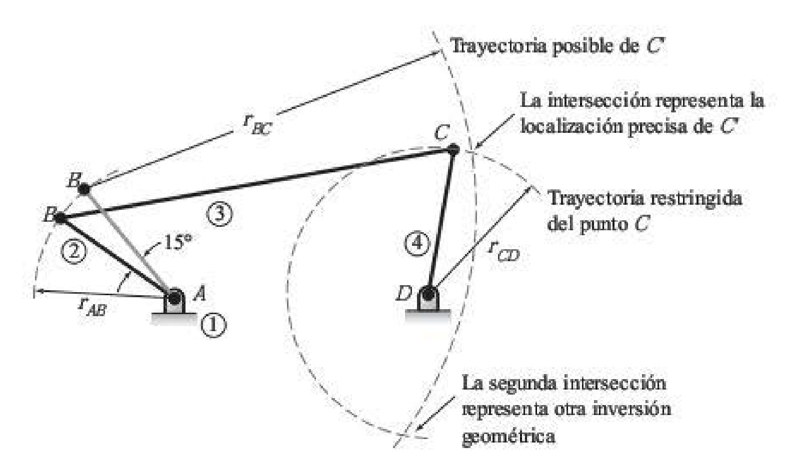


FIGURA 4.10 Ubicación de la posición de C'.

Una vez que se localiza C', se dibujan las posiciones de los eslabones 3 y 4. De este modo, se determina la configuración del mecanismo, en tanto que el eslabón impulsor fue reposicionado.

Esta sección presenta la lógica detrás del análisis gráfico de posición, es decir, la ubicación de un punto desplazado a la intersección de la trayectoria restringida y la trayectoria posible. Esta lógica simplemente se repite conforme los mecanismos se vuelven más complejos. La solución real se obtiene usando ya sea técnicas de dibujo manuales (con un transportador y un compás) o un sistema de CAD (con los comandos *rotate* y *copy*). La lógica es idéntica; sin embargo, la solución de CAD no está sujeta a las limitaciones de exactitud en el dibujo. Independientemente del método que se utilice, los conceptos subyacentes del análisis gráfico de posición se ilustran y amplían en los siguientes problemas de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.1

La figura 4.11 muestra un diagrama cinemático de un mecanismo impulsado por el movimiento del eslabón 2. Reposicione gráficamente los eslabones del mecanismo, conforme el eslabón 2 se desplaza 30° en sentido antihorario. Determine el desplazamiento angular resultante del eslabón 4 y el desplazamiento lineal del punto *E*.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la movilidad***

Para verificar que el mecanismo se posiciona únicamente por un eslabón móvil, se calcula su movilidad. Están identificados seis eslabones. Observe que tres de los eslabones están conectados en el punto *C*. Recuerde del capítulo 1 que esta configuración se debe tomar en cuenta como dos uniones de perno. Por consiguiente, se trata de seis uniones de perno. Una unión de corredera conecta los eslabones 1 y 6. No hay uniones de engrane ni de leva:

$$n = 6 \; j_p = (6 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 7 j_h = 0$$

y

$$M = 3(n-1) - 2j_p - j_h = 3(6-1) - 2(7) - 0 = 15 - 14 = 1$$

Con un grado de libertad, el movimiento de un solo eslabón posiciona los demás eslabones del mecanismo.

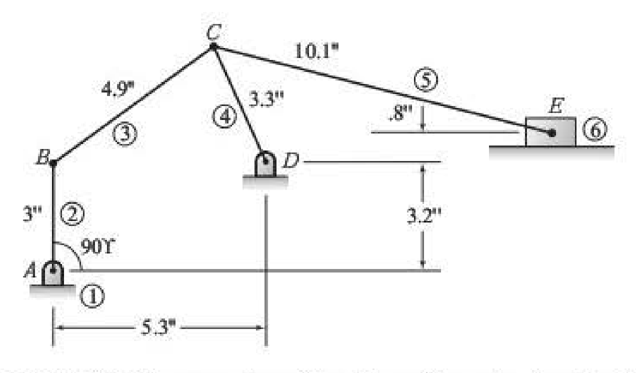
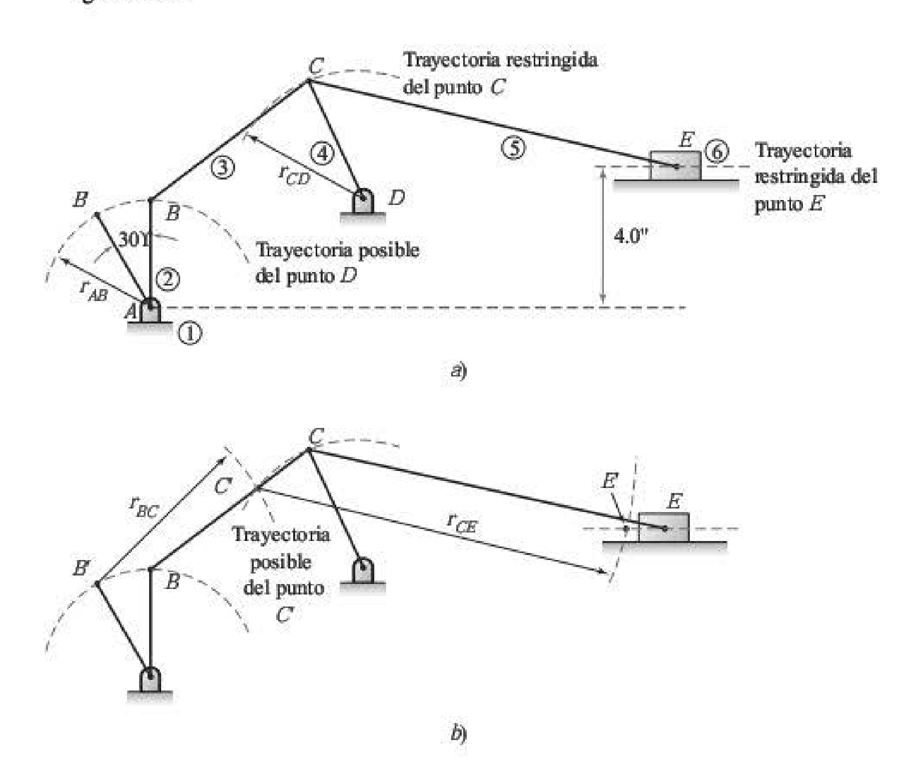


FIGURA 4.11 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 4.1.

2. ***Reposicione el eslabón impulsor***

   El eslabón 2 se gira 30° en sentido antihorario, estableciendo así la posición del punto B'. Esto se muestra en la figura 4.12a



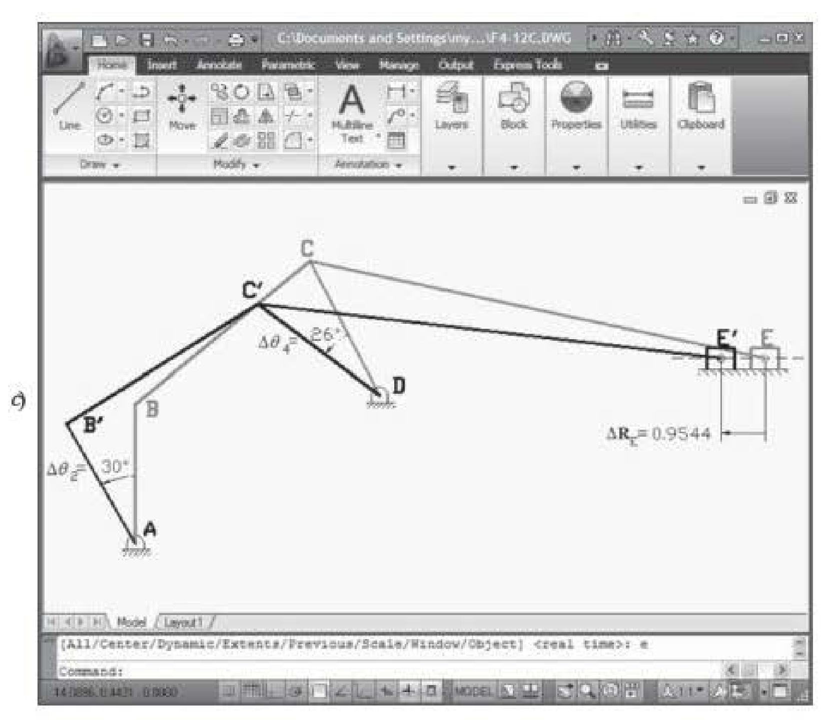


FIGURA 4.12 Construcciones de desplazamiento del problema de ejemplo 4.1.

3. ***Determine las trayectorias de todos los eslabones conectados directamente a la bancada***

   Para reposicionar el mecanismo, se dibujan las trayectorias restringidas de todos los puntos sobre los eslabones que están conectados a la bancada (B, C y E). Lo anterior también se muestra en la figura 4.12a.

4. ***Determine la posición exacta del punto C'***

   Por ser rígido, la forma del eslabón 3 no cambia, en tanto que la distancia entre los puntos B y C (r_{BC}) permanece constante. Como el punto B se movió a B' se traza un arco de longitud r_{BC} con centro en B'. Este arco representa

la trayectoria posible del punto C'. La intersección del arco con la trayectoria restringida de C da como resultado la posición de C'. Esto se observa en la figura 4.12b.

5. ***Determine la posición exacta del punto E'***

Se utiliza la misma lógica para ubicar la posición del punto E'. La forma del eslabón 5 no puede cambiar, pero la distancia entre los puntos C y E (r_{CE}) se mantiene constante. Como el punto C se movió a C', se dibuja un arco de longitud r_{CE} con centro en C'. Este arco representa la trayectoria posible del punto E'. La intersección del arco con la trayectoria restringida de E da como resultado la posición E' (figura 4.12b).

6. ***Mida el desplazamiento del eslabón 4 y del punto E'***

Por último, al obtener la posición de C' y E', se dibujan los eslabones 3 a 6, lo cual se muestra en la figura 4.12c. El desplazamiento del eslabón 4 es la distancia angular entre la posición nueva y la original, que se midió como

$$\Delta\theta_4 = 26°, \text{en sentido antihorario}$$

El desplazamiento del punto E es la distancia lineal entre la posición nueva y la posición original del punto E. La distancia entre E y E' se mide y se ajusta para la escala de dibujo.

$$\Delta \mathbf{R}_E = .9544 \text{ in} \leftarrow$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.2

Cuando se requieren grandes fuerzas de corte, se usan con frecuencia unas tijeras de palanca de hojalatero como las mostradas en la figura 4.13, en vez de las tijeras normales de hojalatero. Con el uso del mango superior como bancada, reposicione gráficamente las componentes de las tijeras cuando la mordaza se abre 15°. Determine el desplazamiento resultante del mango inferior.

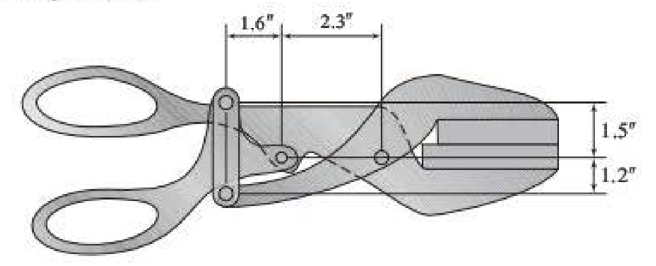


FIGURA 4.13 Tijeras de corte de hojalatero del problema de ejemplo 4.2.

SOLUCIÓN:

1. ***Dibuje el diagrama cinemático y calcule la movilidad***

El diagrama cinemático de las tijeras se presenta en la figura 4.14a. El mango superior se diseñó como la bancada, mientras los puntos de interés se identificaron en la punta de la mordaza de corte superior (X) y en el extremo del mango inferior (Y). Observe que este es el conocido mecanismo de cuatro barras con un grado de libertad. Moviendo un solo eslabón, por ejemplo la mordaza, se posicionan los demás eslabones del mecanismo.

2. ***Reposicione el eslabón impulsor***

Para reposicionar el mecanismo, la mordaza de corte superior, el eslabón 2, se gira 15° en sentido antihorario. Este movimiento corresponde a la posición abierta de las tijeras. El punto de interés, X, también gira junto con el eslabón 2.

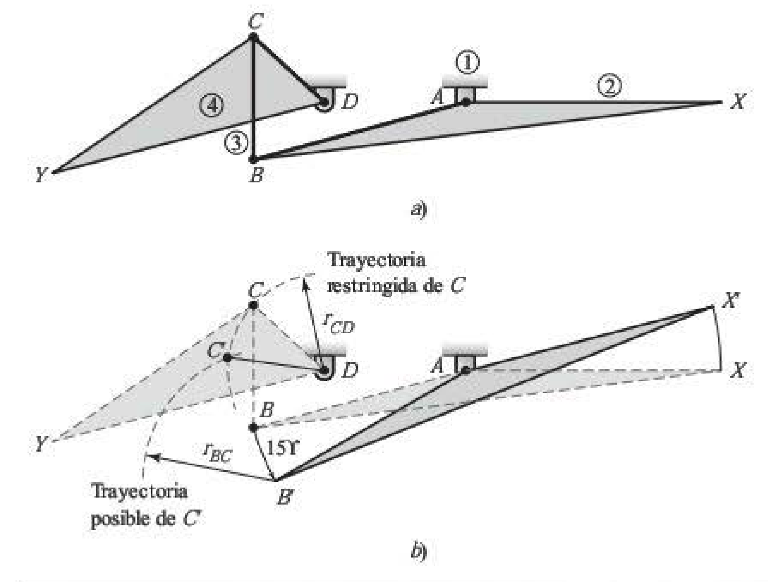
3. ***Determine la posición precisa del punto C'***

Como este es un mecanismo de cuatro barras, la posición del punto C' se ubica en la intersección de su trayectoria restringida con su trayectoria posible. La figura 4.14b presenta las construcciones necesarias para determinar la posición de C'.

4. ***Determine la posición exacta del punto Y'***

Finalmente, se debe determinar la ubicación del punto de interés Y. El eslabón 4 es rígido, por ello su forma no se altera. Como el lado $C'D$ ya está ubicado, el punto Y' se encuentra con facilidad.

Igual que en el procedimiento descrito en la figura 4.7b, la longitud del lado DY no cambia. Entonces, la trayectoria del punto Y se construye a partir del punto D. Tampoco cambia la longitud del lado CY. No obstante, el punto C se reubicó en C'. Otra trayectoria posible de Y' se construye desde C'. La intersección de las dos trayectorias proporciona la ubicación final de Y'. Tal construcción se muestra en la figura 4.14c.



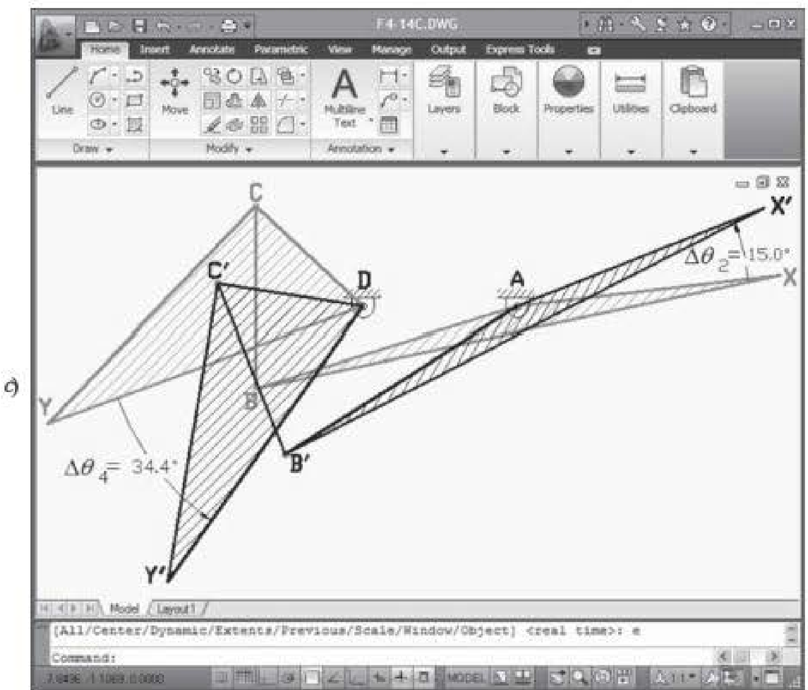


FIGURA 4.14 Construcciones para el problema de ejemplo 4.2.

5. ***Mida el desplazamiento del eslabón 4***

Se mide el desplazamiento requerido del mango inferior para abrir 15° la mordaza. De la figura 4.14c, el mango inferior, el eslabón 4, se debe desplazar:

$$\Delta\theta_4 = 35^\circ, \text{ en sentido antihorario}$$

4.6 POSICIÓN: MÉTODO ANALÍTICO

Hablando en general, los métodos analíticos se utilizan en el análisis de posición para obtener resultados con un alto grado de exactitud. El precio de esta exactitud es que tales métodos usualmente son muy laboriosos. Por consiguiente, se han desarrollado métodos que usan una notación compleja e implican matemáticas de orden superior para el análisis de posición [refs. 4, 9, 11, 12].

En escenarios de diseño, donde el análisis cinemático no es una tarea diaria, sería difícil entender e implementar esos métodos complejos. El método más sencillo de análisis de posición utiliza las leyes trigonométricas de los triángulos. En honor a la verdad, esta técnica de "fuerza bruta" no es eficiente para

quienes realizan investigaciones cinemáticas. Sin embargo, para el ingeniero de diseño típico la sencillez compensa con mucho las ineficiencias. Por lo tanto, el método del triángulo de análisis de posición es el que se usará en este texto.

En general, este método implica la inserción de líneas de referencia dentro del mecanismo y el análisis de los triángulos resultantes. Después, se usan las leyes de los triángulos general y rectángulo, con la finalidad de determinar las longitudes de los lados y la magnitud de los ángulos interiores. Conforme se determinan los detalles de la geometría de los triángulos, se organiza esta información para analizar el mecanismo completo.

El gran beneficio del método analítico es su capacidad para modificar las dimensiones y recalcular rápidamente la solución. Durante las fases del diseño se evalúan muchas configuraciones y dimensiones de la máquina. Tratándose del análisis gráfico, el análisis se debe repetir completamente con cada evaluación. En los métodos analíticos, especialmente cuando se implementan en hojas de cálculo u otras herramientas de cómputo, las soluciones se actualizan rápidamente.

El método analítico del análisis de posición se entenderá con más claridad con los siguientes ejemplos:

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.3

La figura 4.15 muestra una sujetadora que sirve para sostener con seguridad piezas de trabajo. Determine analíticamente el desplazamiento de la superficie de sujeción, conforme el mango gira 15° hacia abajo.

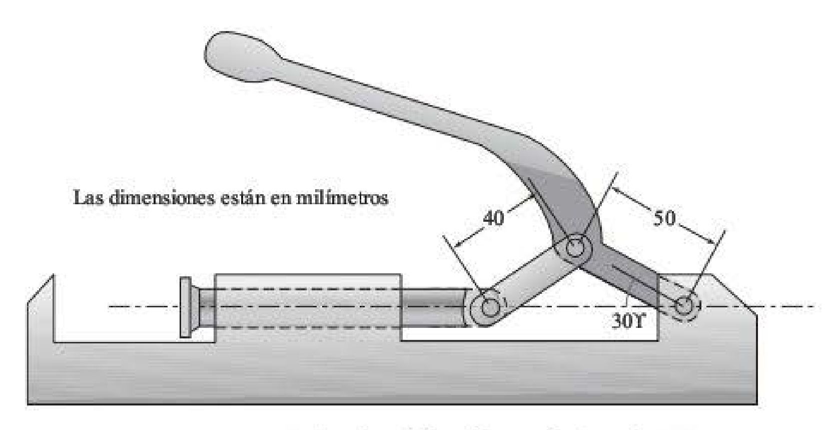


FIGURA 4.15 Sujetadora del problema de ejemplo 4.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore un diagrama cinemático***

En la figura 4.16a se ilustra el diagrama cinemático. El extremo del mango se identificó como el punto de interés *X*.

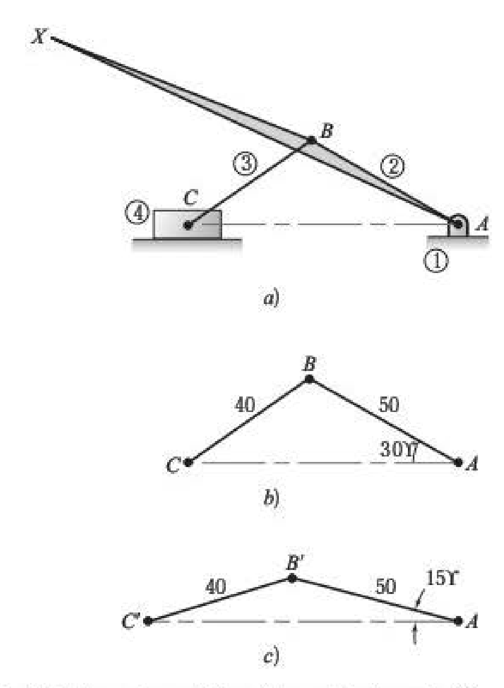


FIGURA 4.16 Mecanismo del problema de ejemplo 4.3.

2. ***Analice la geometría de la configuración original***

En este mecanismo de manivela-corredera se forma de modo natural un triángulo entre los puntos *A*, *B* y *C*. Este triángulo se ilustra en la figura 4.16b.

Antes de observar la configuración desplazada del mecanismo, se deben determinar todas las propiedades de la configuración original. El ángulo interior en la unión *C*, $\angle BCA$, se determina aplicando la ley de los senos, ecuación (3.6):

$$\frac{\text{sen}\angle BAC}{(BC)} = \frac{\text{sen}\angle BCA}{(AB)}$$

$$\angle BCA = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{AB}{BC}\right)\text{sen}\angle BAC\right] = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{50\text{ mm}}{40\text{ mm}}\right)\text{sen }30^\circ\right] = 38.68^\circ$$

Ahora, el ángulo interior en la unión *B*, $\angle ABC$, se calcula porque la suma de todos los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°:

$$\angle ABC = 180^\circ - (30^\circ + 38.68^\circ) = 111.32^\circ$$

La longitud del lado *AC* representa la posición original de la corredera y se determina con la ley de los cosenos, ecuación (3.7):

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos\angle ABC}$$

$$= \sqrt{(50\text{ mm})^2 + (40\text{ mm})^2 - 2(50\text{ mm})(40\text{ mm})\{\cos 111.32^\circ\}}$$

$$= 74.52\text{ mm}$$

3. ***Analice la geometría de la configuración desplazada***

La configuración desplazada se muestra en la figura 4.16c cuando el mango gira 15° hacia abajo. Observe que este desplazamiento genera un ángulo interior en la unión *A*, $\angle C'AB'$, igual a 15°. Se utiliza la ley de los senos para calcular el ángulo interior de la unión *C'*, $\angle B'C'A$:

$$\angle B'C'A = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{AB'}{B'C'}\right)\text{sen}\angle C'AB'\right] = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{50\text{ mm}}{40\text{ mm}}\right)\text{sen }15^\circ\right] = 18.88^\circ$$

De nuevo, el ángulo interior en la unión *B'*, $\angle AB'C'$, se calcula porque la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

$$\angle AB'C' = 180^\circ - (15^\circ + 18.88^\circ) = 146.12^\circ$$

La longitud del lado *AC'* representa la posición desplazada de la corredera. Como antes, se determina con la ley de los cosenos:

$$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2 - 2(AB')(B'C')\cos\angle AB'C'}$$

$$= \sqrt{(50\text{ mm})^2 + (40\text{ mm})^2 - 2(50\text{ mm})(40\text{ mm})\cos(146.12^\circ)} = 86.14\text{ mm}$$

$$= 86.14\text{ mm}$$

4. ***Calcule el desplazamiento deseado***

El desplazamiento del punto *C* durante este movimiento se calcula como la diferencia de los lados *AC'* y *AC* del triángulo:

$$\Delta\mathbf{R}_C = AC' - AC = 86.14 - 74.52 = 11.62\text{ mm} \leftarrow$$

4.6.1 Ecuaciones de análisis de posición en forma cerrada para una manivela-corredera en línea

El mecanismo de sujeción del problema de ejemplo 4.3 es un mecanismo de manivela-corredera. Se conoce específicamente como mecanismo de manivela-corredera en línea, porque la trayectoria restringida de la unión de perno de la corredera se extiende por el centro de rotación de la manivela. La figura 4.17 ilustra la configuración básica de un mecanismo de manivela-corredera en línea.

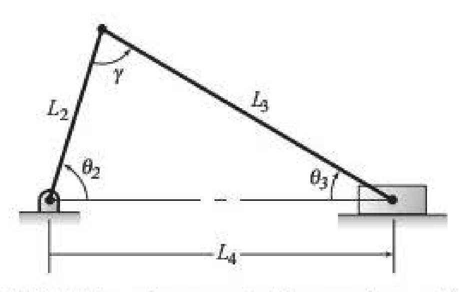


FIGURA 4.17 Mecanismo manivela-corredera en línea.

Como este es un mecanismo muy común, se pueden generalizar los resultados del problema anterior [ref. 12]. El análisis típico implica la ubicación de la posición de los eslabones, dadas sus longitudes (L_2 y L_3) y el ángulo de la manivela (θ_2). Específicamente, se deben determinar la posición de la corredera (L_4) y los ángulos de las uniones interiores (θ_3 y γ).

Las ecuaciones que se usaron en el problema de ejemplo 4.3 se resumen en términos de L_2, L_3 y θ_2:

$$\theta_3 = \text{sen}^{-1}\left[\frac{L_2}{L_3}\,\text{sen}\,\theta_2\right] \quad \textbf{(4.3)}$$

$$\gamma = 180° - (\theta_2 + \theta_3) \quad \textbf{(4.4)}$$

$$L_4 = \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - 2(L_2)(L_3)\cos\gamma} \quad \textbf{(4.5)}$$

Tales ecuaciones sirven usar para determinar la posición de los eslabones en una configuración cualquiera del mecanismo de manivela-corredera en línea.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.4

La figura 4.8 muestra el concepto de una bomba manual que se utiliza para incrementar la presión del aceite en una línea hidráulica. Determine analíticamente el desplazamiento del pistón, conforme el mango gira 15° en sentido antihorario.

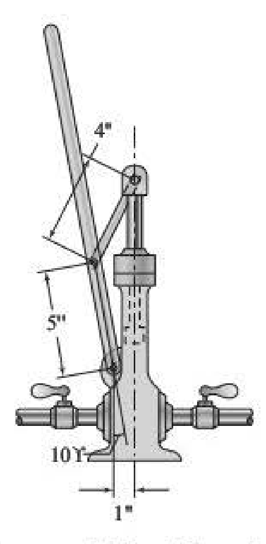


FIGURA 4.18 Bomba manual del problema de ejemplo 4.4.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático está dado en la figura 4.19a. El extremo del mango se identificó como el punto de interés *X*.

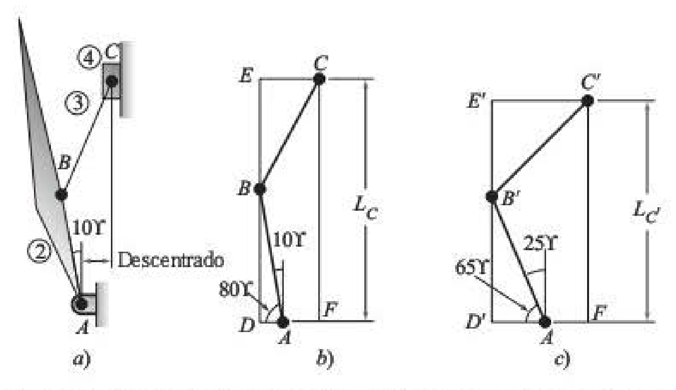


FIGURA 4.19 Diagramas del mecanismo del problema de ejemplo 4.4.

2. ***Analice la geometría de la configuración original***

En contraste con el problema anterior, este mecanismo es un mecanismo de manivela-corredera descentrado. En este tipo de mecanismos conviene enfocarse en dos triángulos rectángulos, los cuales se muestran en la figura 4.19b. Observe que se indica el ángulo de 10° y su complemento de 80°.

Antes de observar la configuración desplazada del mecanismo, es necesario determinar todas las propiedades de la configuración original. Concentrándonos en el triángulo rectángulo inferior, los lados AD y BD se determinan con las siguientes funciones trigonométricas:

$$\cos \angle BAD = \frac{AD}{AB}$$

$$AD = (AB)\cos \angle BAD = (5\text{in})\ \{\cos 80°\} = 0.87\,\text{in}$$

$$\text{sen} \angle BAD = \frac{BD}{AB}$$

$$BD = (AB)\,\text{sen} \angle BAD = (5\text{ in})\ \{\text{sen } 80°\} = 4.92\text{ in}$$

Al concentrase en el triángulo superior, la longitud del lado CE se calcula sumando la distancia del descentrado y la longitud del lado AD desde el triángulo inferior:

$$CE = \text{descentrado} + AD = 1.0 + 0.87 = 1.87\text{ in}$$

Se usa el teorema de Pitágoras, ecuación (3.4), para determinar el lado BE:

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 - (1.87)^2} = 3.54\text{ in}$$

La posición original del pistón, el punto C, se calcula sumando BD y BE:

$$L_C = BD + BE = 4.92 + 3.54 = 8.46\text{ in}$$

Aun cuando no se solicita en este problema, normalmente se desea conocer el ángulo que define la orientación del eslabón 3. El ángulo $\angle BCE$ se calcula con la función del coseno inverso:

$$\angle BCE = \cos^{-1}\left(\frac{CE}{BC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1.87\text{ in}}{4\text{ in}}\right) = 62.13°$$

3. ***Analice la geometría de la configuración desplazada***

En la figura 4.19c se muestra la configuración desplazada con el mango girado 15° hacia abajo. Observe que este desplazamiento genera un ángulo en la unión A de 25° y su complemento, de 65°, también se ilustra en la figura. Centrándose en el triángulo rectángulo inferior, los lados AD' y $B'D'$ se determinan aplicando las siguientes funciones trigonométricas:

$$AD' = (AB')\cos \angle B'AD' = (5\text{ in})\ \{\cos 65°\} = 2.11\text{ in}$$

$$B'D' = (AB')\,\text{sen} \angle B'AD' = (5\text{ in})\ \{\text{sen } 65°\} = 4.53\text{ in}$$

Al centrarse en el triángulo superior, la longitud del lado $C'E'$ se calcula sumando la distancia del descentrado (AF) y la longitud del lado AD' del triángulo inferior:

$$C'E' = AF + AD'$$

$$= 1.0 + 2.11 = 3.11\text{ in}$$

Ahora se determina el lado $B'E'$:

$$B'E' = \sqrt{(B'C')^2 - (C'E')^2} = \sqrt{(4\text{ in})^2 - (3.11\text{ in})^2} = 2.52\text{ in}$$

La posición desplazada del pistón se calcula sumando $B'D'$ y $B'E'$:

$$L'_C = B'D' + B'E' = 4.53 + 2.52 = 7.05\text{ in}$$

4. ***Calcule el desplazamiento resultante***

El desplazamiento del pistón, el punto C, durante este movimiento se calcula restando la longitud L'_C de L_C:

$$\Delta \mathbf{R}_C = 8.46 - 7.05 = 1.41\text{ in}\downarrow$$

4.6.2 Ecuaciones de análisis de posición en forma cerrada para una manivela-corredera descentrado

El mecanismo del problema de ejemplo 4.4 es un mecanismo de manivela-corredera descentrado, ya que la trayectoria restringida de la unión de perno en la corredera no se extiende a través del mismo nivel del centro de rotación de la manivela. La figura 4.20 ilustra la configuración básica de un mecanismo de manivela-corredera descentrado.

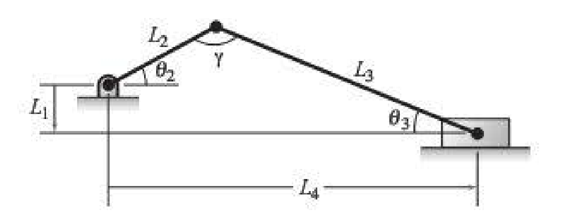


FIGURA 4.20 Mecanismo de manivela-corredera descentrado.

Como este también es un mecanismo común, se pueden generalizar los resultados del problema anterior [ref. 12]. Un análisis típico implica la localización de la posición de los eslabones, dadas las longitudes (L_1, L_2 y L_3) y el ángulo de la manivela (θ_2). Específicamente, hay que determinar la posición de la corredera (L_4) y los ángulos interiores (θ_3 y γ) de las uniones.

Las ecuaciones generales son

$$\theta_3 = \text{sen}^{-1}\left[\frac{L_1 + L_2 \text{ sen } \theta_2}{L_3}\right] \quad \textbf{(4.6)}$$

$$L_4 = L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 \quad \textbf{(4.7)}$$

$$\gamma = 180° - (\theta_2 + \theta_3) \quad \textbf{(4.8)}$$

Estas ecuaciones se utilizan para determinar la posición de los eslabones en una configuración cualquiera de un mecanismo. Recuerde, sin embargo, que estas ecuaciones únicamente son aplicables a un mecanismo de manivela-corredera descentrado. Las ecuaciones también aplican cuando la distancia del descentrado está en dirección opuesta a la dirección mostrada en la figura 4.20. En tales casos, L_1 en la ecuación (4.6) se debería sustituir por un valor negativo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.5

La figura 4.21 presenta una sujetadora que sirve para asegurar una pieza de trabajo durante una operación de maquinado. Determine analíticamente el ángulo que se debe desplazar el mango para levantar el brazo de la sujetadora 30° en el sentido horario.

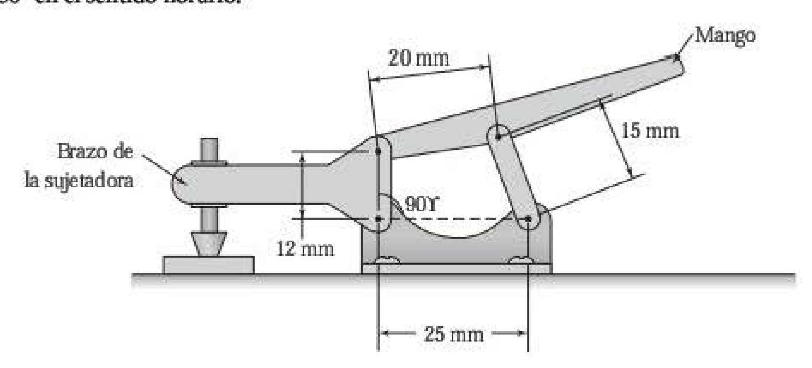


FIGURA 4.21 Sujetadora del problema de ejemplo 4.5.

SOLUCIÓN:

1. ***Dibuje un diagrama cinemático***

El diagrama cinemático de la sujetadora se observa en la figura 4.22a. El extremo del mango está definido como el punto de interés *X*. La nariz de la sujetadora fue identificada como el punto de interés *Y*.

2. ***Analice la geometría de la configuración original***

Este es un mecanismo común de cuatro barras. Para un análisis más minucioso de la geometría, la figura 4.22b detalla la cadena cinemática *ABCD*. Se crea una diagonal para conectar *B* y *D*, con lo que forman dos triángulos.

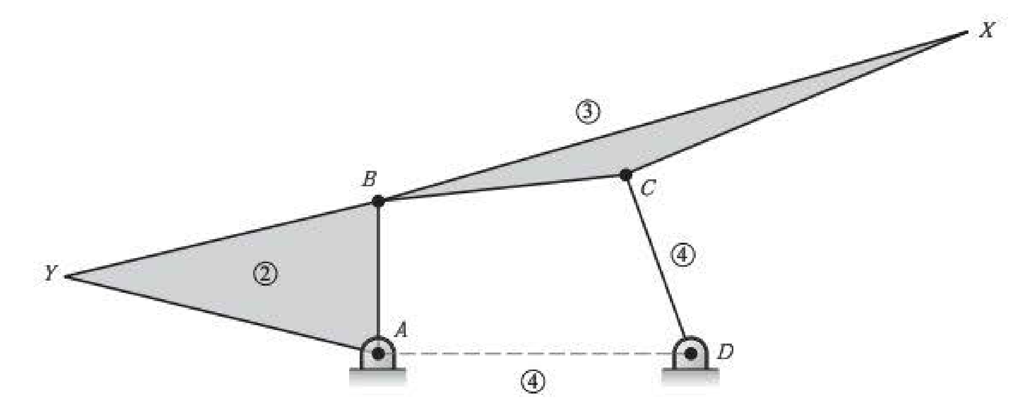
Antes de analizar la configuración desplazada del mecanismo, se deben determinar todas las propiedades de la configuración original. Observe que el triángulo inferior, *ABD*, es un triángulo rectángulo. Se calcula la longitud *BD* usando el teorema de Pitágoras presentado en la ecuación (3.4).

$$BD = \sqrt{(AB)^2 + (AD)^2} = \sqrt{(12)^2 + (25)^2} = 27.73 \text{ mm}$$

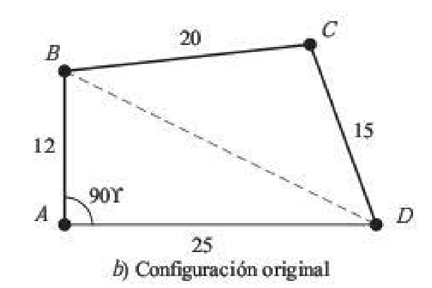
Los ángulos interiores, $\angle ABD$ y $\angle BDA$, se calculan a partir de las funciones trigonométricas básicas siguientes:

$$\angle ABD = \text{sen}^{-1}\left(\frac{25 \text{ mm}}{27.73 \text{ mm}}\right) = 64.4°$$

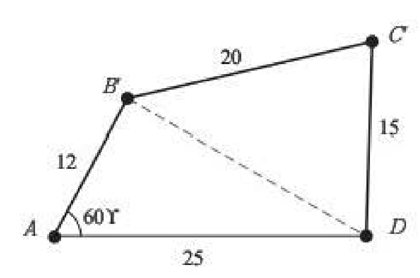
$$\angle BDA = \cos^{-1}\left(\frac{25 \text{ mm}}{27.73 \text{ mm}}\right) = 25.6°$$



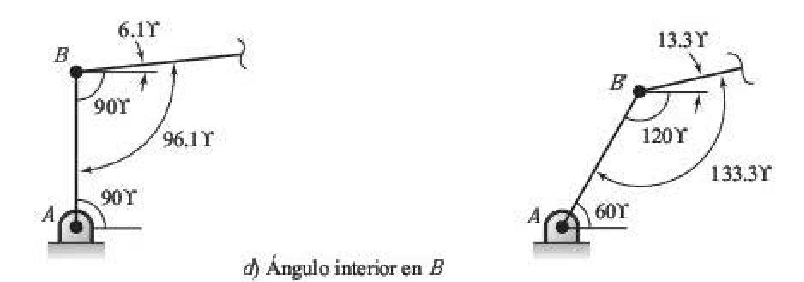
a) Diagrama cinemático



b) Configuración original



c) Configuración desplazada



d) Ángulo interior en B

FIGURA 4.22 Mecanismo del problema de ejemplo 4.5.

Centrándose en el triángulo de la parte superior, el ángulo interior $\angle BCD$ se calcula aplicando la ley de los cosenos, que se presentó en la ecuación (3.7):

$$\angle BCD = \cos^{-1}\left(\frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2(BC)(CD)}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{(20 \text{ mm})^2 + (15 \text{ mm})^2 - (27.73 \text{ mm})^2}{2(20 \text{ mm})(15 \text{ mm})}\right) = 103.9°$$

El ángulo interior $\angle CBD$ se determina aplicando la ley de los senos:

$$\angle CBD = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{CD}{BD}\right)\text{sen } \angle BCD\right]$$

$$= \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{15 \text{ mm}}{27.73 \text{ mm}}\right)\text{sen } 103.9°\right] = 31.7°$$

Ya se puede calcular el ángulo interior $\angle BDC$ porque la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°, de modo que

$$\angle BDC = 180° - (103.9° + 31.7°) = 44.4°$$

Se determinan ahora todos los ángulos del mecanismo: de la unión B (entre los eslabones 2 y 3) y de la unión D (entre los eslabones 1 y 4).

En la unión B:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 64.4° + 31.7° = 96.1°$$

En la unión D:

$$\angle CDA = \angle BDC + \angle BDA = 44.4° + 25.6° = 70.0°$$

3. ***Analice la geometría de la configuración desplazada***

En la figura 4.22c se muestra la configuración desplazada con la nariz de la sujetadora, el eslabón 2, girado 30° en el sentido horario. Observe que esto hace que el ángulo interior de la unión A, $\angle DAB'$ sea igual a 60°. Asimismo, el triángulo inferior deja de ser un triángulo rectángulo.

La longitud de la diagonal $B'D$ se calcula usando el triángulo inferior, ΔABD, y la ley de los cosenos:

$$B'D = \sqrt{(12 \text{ mm})^2 + (25 \text{ mm})^2 - 2(12 \text{ mm})(25 \text{ mm}) \cos 60°} = 21.66 \text{ mm}$$

El ángulo interior $\angle AB'D$ también se calcula aplicando la ley de los cosenos:

$$\angle AB'D = \cos^{-1} \frac{(AB)^2 + (B'D)^2 - (AD)^2}{2(AB')(B'D)}$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{(12)^2 + (21.66)^2 - (25)^2}{2(12)(21.66)}\right] = 91.3°$$

Todos los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°. Por lo tanto, el ángulo $\angle B'DA$ se calcula fácilmente:

$$\angle B'DA = 180° - (\angle DAB' + \angle AB'D)$$

$$= 180° - (60° + 91.3°) = 28.7°$$

Enfocándose en el triángulo de la parte superior, el ángulo interior $\angle B'C'D$ se calcula aplicando la ley de los cosenos:

$$\angle B'C'D = \cos^{-1}\left[\frac{(B'C')^2 + (C'D)^2 - (B'D)^2}{2(B'C')(C'D)}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{(20 \text{ mm})^2 + (15 \text{ mm})^2 - (21.66 \text{ mm})^2}{2(20 \text{ mm})(15 \text{ mm})}\right] = 74.9°$$

El ángulo interior $\angle C'B'D$ se determina aplicando la ley de los senos:

$$\angle C'B'D = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{C'D}{B'D}\right) \text{sen} \angle B'C'D\right]$$

$$= \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{15 \text{ mm}}{21.66 \text{ mm}}\right) \text{sen } 74.9°\right] = 42.0°$$

El ángulo interior final $\angle B'DC'$ del triángulo superior se calcula de la siguiente manera:

$$\angle B'DC' = 180° - (\angle C'B'D + \angle B'C'D) = 180° - (42.0° + 74.9°) = 63.1°$$

Se determinan ahora todos los ángulos del mecanismo: de la unión B' (entre los eslabones 2 y 3) y de la unión D (entre los eslabones 1 y 4) de la siguiente manera:

En la unión B':

$$\angle AB'C' = \angle AB'D + \angle C'B'D = 91.3° + 42.0° = 133.3°$$

En la unión D:

$$\angle C'DA = \angle B'DC' + \angle B'DA = 63.1° + 28.7° = 91.8°$$

4. ***Calcule el desplazamiento resultante***

El desplazamiento angular del mango, el eslabón 3, se determina enfocándose en la unión *B*, como se indica en la figura 4.22d. En la configuración original, el ángulo del eslabón 3 arriba de la horizontal se expresa como

$$\angle ABC - 90° = 96.1° - 90.0° = 6.1°$$

En la configuración desplazada, el ángulo del eslabón 3 arriba de la horizontal se expresa como

$$\angle AB'C' - 120° = 133.3° - 120.0° = 13.3°$$

Finalmente, el desplazamiento angular del eslabón 3 se calcula con

$$\Delta\theta_3 = 13.3° - 6.1° = 7.2°\text{, en sentido antihorario}$$

4.6.3 Ecuaciones de posición para un mecanismo cerrado de cuatro barras

El mecanismo de cuatro barras es otro eslabonamiento muy común. La figura 4.23 muestra un mecanismo de cuatro barras general.

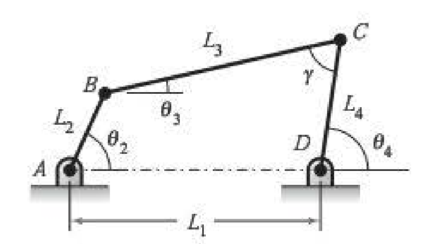


FIGURA 4.23 Mecanismo de cuatro barras.

Las ecuaciones específicas que se usaron en el problema de ejemplo 4.5 se pueden generalizar [ref. 12]. Un análisis típico implica el cálculo de los ángulos interiores (θ_3, θ_4 y γ) de las uniones, si se conocen los eslabones (L_1, L_2, L_3 y L_4) a cierto ángulo de la manivela (θ_2). Específicamente, se deben determinar los ángulos interiores (θ_3, θ_4 y γ) de las uniones.

$$BD = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2(L_1)(L_2)\cos(\theta_2)} \quad \textbf{(4.9)}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left[\frac{(L_3)^2 + (L_4)^2 - (BD)^2}{2(L_3)(L_4)}\right] \quad \textbf{(4.10)}$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + L_4 \operatorname{sen}\gamma}{L_1 + L_3 - L_2\cos\theta_2 - L_4\cos\gamma}\right] \quad \textbf{(4.11)}$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}\theta_2 - L_3 \operatorname{sen}\gamma}{L_2\cos\theta_2 + L_4 - L_1 - L_3\cos\gamma}\right] \quad \textbf{(4.12)}$$

Se tienen que aplicar estas ecuaciones para determinar la posición de los eslabones en una configuración cualquiera de un mecanismo. Las ecuaciones son aplicables a cualquier mecanismo de cuatro barras ensamblado, como se indica en la figura 4.23.

4.6.4 Circuitos de un mecanismo de cuatro barras

En los mecanismos de cuatro barras clasificados como de manivela-balancín (como el descrito en la sección 1.10), hay dos regiones de posible movimiento correspondientes a dos inversiones geométricas. Tales regiones se conocen como *circuitos de ensamble*. Un mecanismo está imposibilitado para moverse de un circuito de ensamble a otro sin desarmarse. El mecanismo que se ilustra en la figura 4.23 opera en el primer circuito (figura 4.24a).

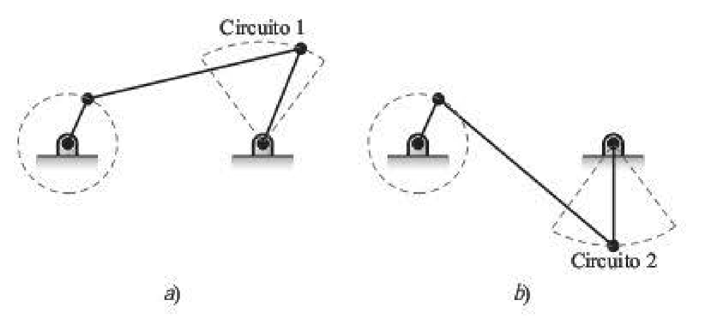


FIGURA 4.24 Circuitos de un mecanismo de cuatro barras.

Desconectando físicamente la unión *C*, los eslabones se pueden reorientar y ensamblar de nuevo con la configuración mostrada en la figura 4.24b. Cuando opera este mecanismo, se mueve de acuerdo con el segundo circuito. Aun cuando el movimiento del mecanismo parece ser diferente, en relación con la operación del circuito, no cambia el movimiento relativo entre los eslabones. Sin embargo, es necesario especificar el circuito donde está ensamblado el mecanismo para entender el movimiento absoluto y la operación del mecanismo.

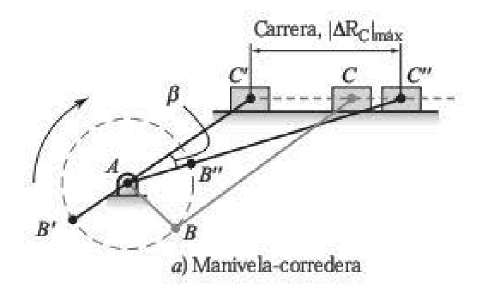
Para la operación del mecanismo de cuatro barras en el segundo circuito, la ecuación (4.11) se debe modificar ligeramente de la siguiente manera:

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-L_2 \operatorname{sen}\theta_2 - L_4 \operatorname{sen}\gamma}{L_1 + L_3 - L_2\cos\theta_2 - L_4\cos\gamma}\right] \quad \textbf{(4.13)}$$

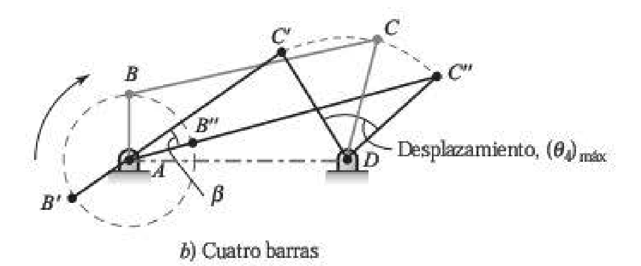
$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + L_3 \operatorname{sen}\gamma}{L_2\cos\theta_2 + L_4 - L_1 - L_3\cos\gamma}\right] \quad \textbf{(4.14)}$$

4.7 POSICIONES LÍMITE: ANÁLISIS GRÁFICO

La configuración de un mecanismo que ubica uno de los eslabones seguidores en una posición extrema se conoce como *posición límite*. Muchas máquinas tienen mecanismos que oscilan continuamente entre dos posiciones límite. La figura 4.25 ilustra las posiciones límite de un mecanismo de manivela-corredera descentrado.



a) Manivela-corredera



b) Cuatro barras

FIGURA 4.25 Posiciones límite.

El desplazamiento del eslabón seguidor de una posición límite a otra define la *carrera* del seguidor. En eslabones con traslación, como el de la figura 4.25a, la carrera es lineal. Para eslabones con rotación pura, la carrera es una cantidad angular, que también se conoce como *desplazamiento*, como se indica en la figura 4.25b. La configuración de los eslabones que ubica un seguidor en una posición límite está asociada con una manivela y un acoplador que se vuelven colineales. La figura 4.25 muestra las configuraciones límite de un mecanismo de manivela-corredera y uno de cuatro barras. El ángulo de desequilibrio β se define como el ángulo entre la configuración del acoplador en las dos posiciones límite. El ángulo de desequilibrio influye en el ritmo de avance y retroceso de la carrera, el cual se utilizará extensivamente en el capítulo 5. Con frecuencia se desea conocer la posición de un eslabón impulsor, o eslabón actuador, que coloca al eslabón seguidor en una posición límite o extrema. Asimismo, el movimiento de un mecanismo está comúnmente relacionado con la posición del actuador que coloca al seguidor en una posición límite.

La lógica que se aplica en la solución de este problema es similar a la del análisis de posición que se acaba de efectuar. Los siguientes ejemplos ilustran ese análisis.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.6

El mecanismo mostrado en la figura 4.26 es el eslabonamiento impulsor de una sierra caladora (de vaivén) reciprocante. Determine las configuraciones del mecanismo que ubican la hoja de la sierra en sus posiciones límite.

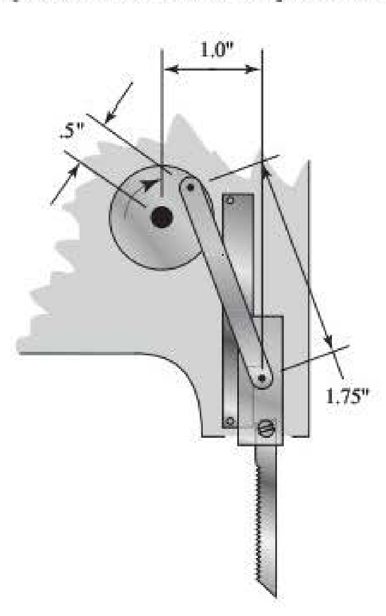


FIGURA 4.26 Mecanismo de la sierra caladora del problema de ejemplo 4.6.

SOLUCIÓN:

1. ***Dibuje un diagrama cinemático***

El diagrama cinemático del mecanismo de la sierra reciprocante se muestra en la figura 4.27a. Observe que se trata de un mecanismo de manivela-corredera, como el definido en el capítulo 1, que tiene un grado de libertad.

2. ***Construya la posición límite extendida***

La hoja de la sierra, el eslabón 4, alcanza su posición extrema hacia abajo cuando los eslabones 2 y 3 se mueven alineados colinealmente. Esta configuración proporciona la distancia máxima entre los puntos A y C. Para determinar la distancia máxima, se deben combinar las longitudes de los eslabones 2 y 3. La suma de estas longitudes da

$$L_2 + L_3 = 0.5 \text{ in} + 1.75 \text{ in} = 2.25 \text{ in}$$

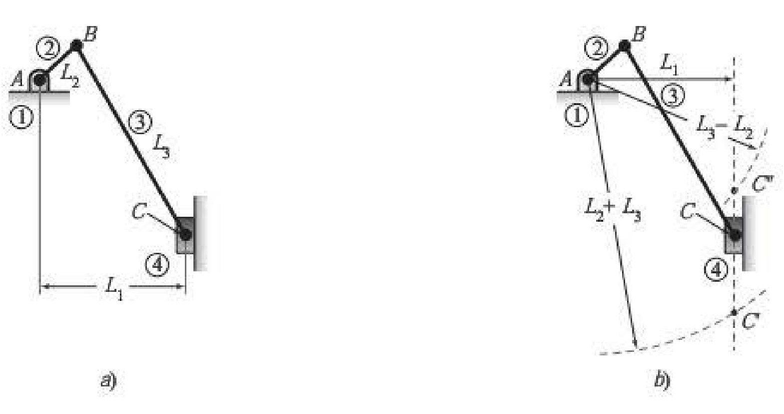
Una vez que se obtiene la longitud combinada de las líneas 2 y 3, se debería construir un arco con esta longitud, con centro en el punto A. Como se ilustra en la figura 4.29b, la intersección del arco con la trayectoria

posible del punto C determina la posición límite extendida de C, denotada por C'. Se dibujan los eslabones 2 y 3, luego se determina el punto B'. Esto se observa en la figura 4.29c.

3. ***Construya la posición límite retraída***

Ahora se debe determinar la configuración que ubica la hoja de la sierra, el eslabón 4, en su posición superior extrema. En esta configuración, los eslabones 2 y 3 son colineales nuevamente, aunque esta vez se traslapan, lo cual nos brinda la distancia mínima entre los puntos A y C, de modo que esta distancia mínima es la diferencia entre las longitudes de los eslabones 3 y 2. La diferencia de las longitudes de los eslabones es

$$L_3 - L_2 = 1.75 \text{ in} - 0.5 \text{ in} = 1.25 \text{ in}$$



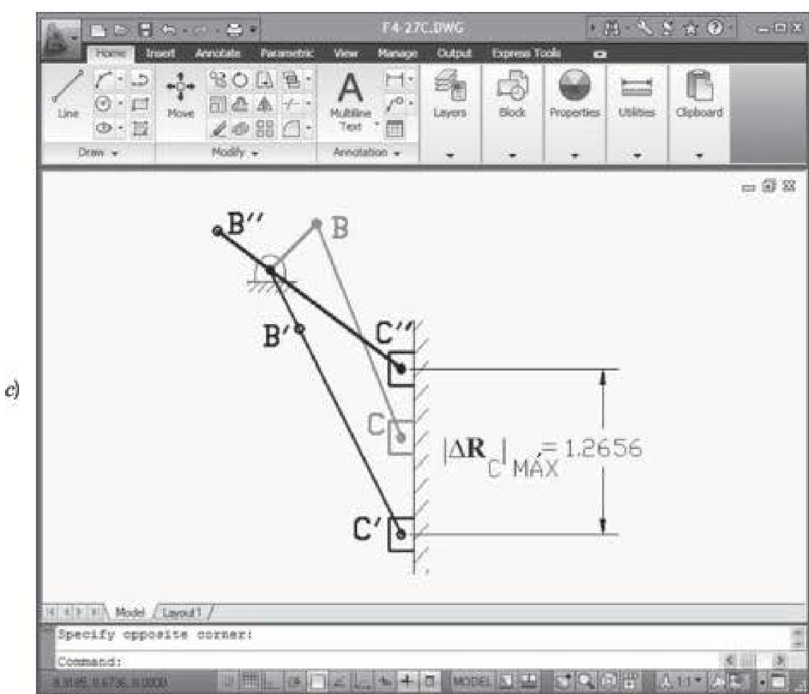


FIGURA 4.27 Posiciones extremas del problema de ejemplo 4.6.

Esta posición límite retraída se determina usando una técnica similar a aquella que se utilizó para determinar la posición extendida. Recuerde que la distancia entre A y C', en la figura 4.27b, representa la longitud sumada de los eslabones 2 y 3. De la misma forma, la distancia entre los puntos A y C'' representa la diferencia entre los eslabones 3 y 2.

Usando la distancia $L_3 - L_2$, se calcula la posición del punto C en su posición extrema hacia arriba, representada por C'' (figura 4.27b). Finalmente, se dibujan los eslabones 2 y 3, luego se ubica la posición del punto B''.

4. ***Mida la carrera del eslabón seguidor***

Como se muestra en la figura 4.27c, la carrera de la hoja de la sierra se mide como el desplazamiento extremo del punto C. Al tomar en cuenta la escala en el diagrama cinemático, se obtiene el siguiente resultado:

$$|\Delta \mathbf{R}_c|_{máx} \cong 1.27 \text{ in}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.7

La figura 4.28 muestra un mecanismo que opera la boquilla de agua en un lavado automático de vehículos. Determine las posiciones límite del mecanismo que ubica la boquilla en sus posiciones extremas.

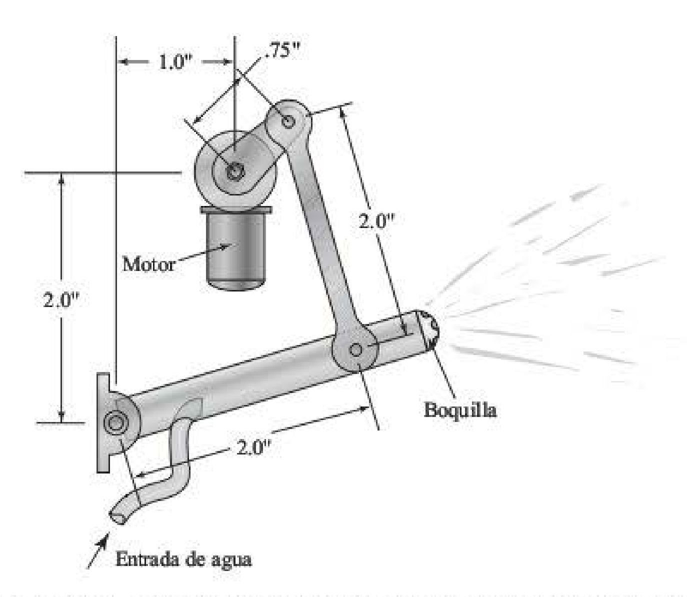


FIGURA 4.28 Mecanismo de la boquilla de agua del problema de ejemplo 4.7.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático***

   En la figura 4.29 se muestra el diagrama cinemático del mecanismo de la boquilla de agua. Observe que es un mecanismo de cuatro barras con un grado de libertad.

2. ***Construya la posición límite extendida***

   El análisis de este ejemplo es muy similar al problema de ejemplo 4.6. La boquilla, el eslabón 4, alcanza su posición extrema hacia abajo cuando los eslabones 2 y 3 se vuelven colineales. Esta configuración proporciona la distancia máxima entre los puntos A y C. Para determinar esta distancia máxima, se deben combinar las longitudes de los eslabones 2 y 3. La suma de tales longitudes nos da

$$L_2 + L_3 = 0.75 \text{ in} + 2.00 \text{ in} = 2.75 \text{ in}$$

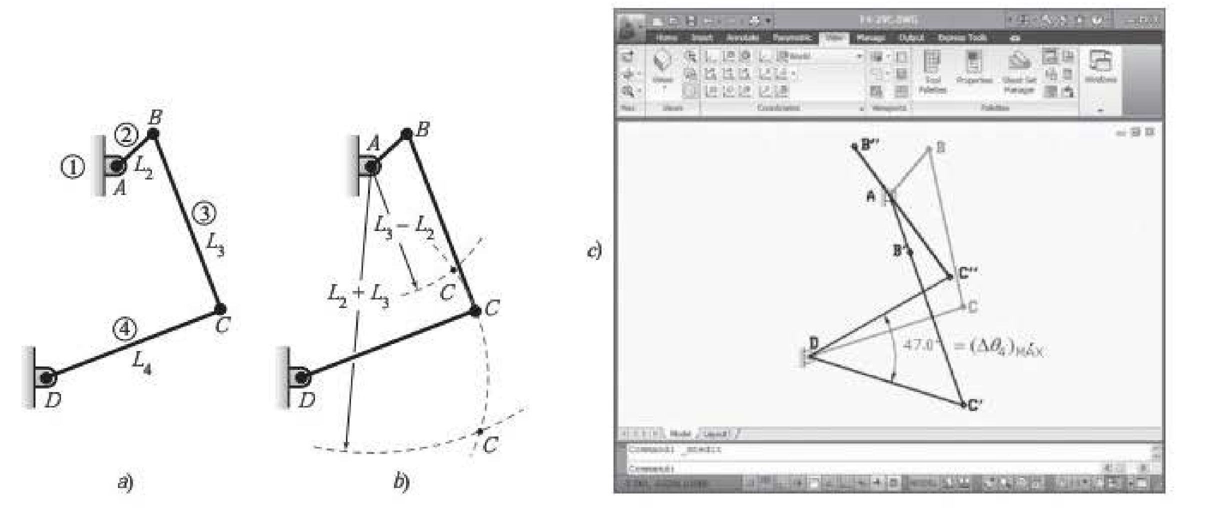


FIGURA 4.29 Posiciones extremas del problema de ejemplo 4.7.

Una vez que se determina la longitud combinada de las líneas 2 y 3, se debería construir un arco de esta longitud con centro en el punto A. Como se muestra en la figura 4.28b, la intersección de este arco y la trayectoria posible del punto C determinan la posición extrema hacia abajo de C, denotada con C'. Se dibujan los eslabones 2 y 3, y se determina el punto B'. Esto se muestra en la figura 4.29c.

3. ***Construya la posición límite retraída***

Luego se determina la configuración que coloca la boquilla, el eslabón 4 en su posición límite superior. Como en la manivela-corredera analizada en el problema de ejemplo 4.6, la configuración retraída ocurre cuando los eslabones 2 y 3 se vuelven colineales, pero se traslapan. Así se genera la distancia mínima entre los puntos A y C, de modo que esta distancia mínima es la diferencia entre las longitudes de los eslabones 3 y 2. La resta de dichas longitudes da

$$L_3 - L_2 = 2.00 \text{ in} - .75 \text{ in} = 1.25 \text{ in}$$

Esta distancia mínima se construye de manera parecida a la técnica de la distancia máxima. Recuerde que la distancia entre A y C', en la figura 4.29c, representa la longitud combinada de los eslabones 2 y 3. Asimismo, la distancia entre los puntos A y C'' representa la diferencia entre los eslabones 3 y 2.

Usando la distancia $L_3 - L_2$, es posible determinar la posición del punto C en su posición extrema hacia arriba, denotada con C'', lo cual se presenta en la figura 4.29b. Finalmente, se dibujan los eslabones 2 y 3, y se localiza la posición del punto B''.

4. ***Mida la carrera del eslabón seguidor***

Como se muestra en la figura 4.29c, la carrera de la boquilla se mide como el desplazamiento angular extremo del eslabón 4. La medición de este formato gráfico da como resultado:

$$|\Delta\theta_4|_{\text{máx}} = 47.0°$$

4.8 POSICIONES LÍMITE: MÉTODO ANALÍTICO

La determinación analítica de las posiciones límite de un mecanismo es una combinación de dos conceptos presentados con anterioridad en este capítulo:

I. La lógica de la configuración de un mecanismo en una configuración límite. Esto se presentó en el método gráfico para determinar las posiciones límite, que se introdujo en la sección 4.7.

II. El método de descomposición de un mecanismo en triángulos convenientes y el uso de las leyes trigonométricas, para determinar todos los ángulos y las longitudes del mecanismo, presentado en la sección 4.6.

La combinación de esos dos conceptos para determinar la posición de todos los eslabones de un mecanismo en una posición límite se ilustra con el problema de ejemplo 4.8.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.8

La figura 4.30 muestra el mecanismo de una banda transportadora de transferencia, cuya función es suministrar paquetes a una estación de embarque en intervalos específicos. Determine analíticamente las posiciones extremas del segmento de elevación de la banda transportadora.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático***

En la figura 4.31a se muestra el diagrama cinemático de este mecanismo. El extremo del segmento transportador se identificó como el punto de interés X.

2. ***Analice la geometría en la posición límite extendida***

Este mecanismo es otro eslabonamiento de cuatro barras. Como se vio en el problema de ejemplo 4.7, el seguidor de un mecanismo de cuatro barras está en la posición límite extendida cuando los eslabones 2 y 3 se vuelven colineales. En la figura 4.31b se ilustra el mecanismo con el seguidor en su posición superior. Observe que los eslabones forman un triángulo general $\Delta AC'D$. También advierta que la longitud de AC' es de 20 in (16 + 4).

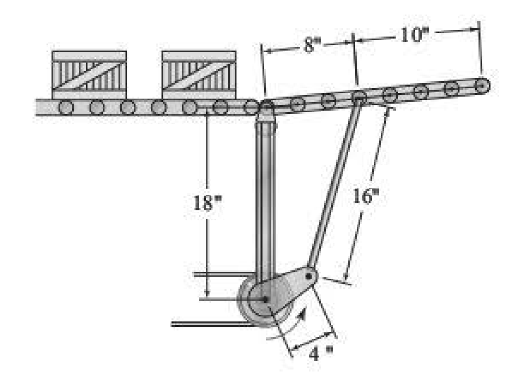


FIGURA 4.30 Banda transportadora de suministro del problema de ejemplo 4.8.

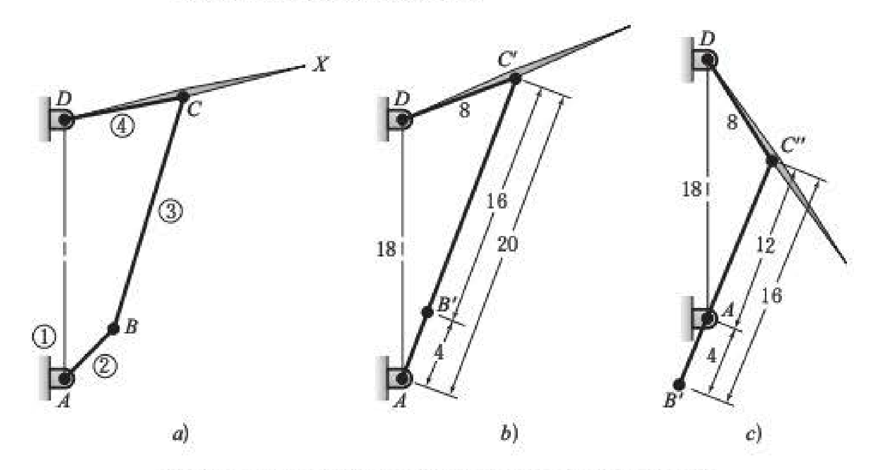


FIGURA 4.31 Mecanismo del problema de ejemplo 4.8.

La posición límite superior se define completamente determinando los ángulos interiores. El ángulo interior en la unión A, $\angle C'AD$, se calcula con la ley de los cosenos:

$$\angle C'AD = \cos^{-1}\left[\frac{AD^2 + AC' - C'D^2}{2(AD)(AC')}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{(18\text{ in})^2 + (20\text{ in})^2 - (8\text{ in})^2}{2(18\text{ in})(20\text{ in})}\right] = 23.6°$$

Se usa la ley de los senos para calcular cualquiera de los ángulos interiores restantes. Sin embargo, la ley de los senos quizás origine confusión con ángulos entre 90° y 180° porque

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}(180° - \theta)$$

Cuando se utiliza la función inversa del seno en una calculadora, el ángulo se encuentra entre 0° y 90°. No obstante, el resultado que se busca puede ser un ángulo entre 90° y 180°. Para minimizar tal confusión, se recomienda dibujar los triángulos a una escala aproximada y verificar los resultados numéricos. Asimismo, es mejor usar la ley de los senos con ángulos donde sea evidente que se encuentran en el rango de 0° a 90°.

Con este enfoque, el ángulo interior en la unión C', $\angle AC'D$, se determina usando la ley de los senos, porque es evidente que es menor de 90°.

$$\angle AC'D = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{AD}{DC'}\right)\text{sen}\angle C'AD\right]$$

$$= \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{18\text{ in}}{8\text{ in}}\right)\text{sen}\,23.6°\right] = 64.1°$$

Se determina el ángulo interior en la unión D, $\angle ADC'$:

$$\angle ADC' = 180° - (\angle C'AD + \angle ADC')$$
$$= 180° - (23.6° + 64.1°) = 92.3°$$

3. ***Analice la geometría en la posición límite retraída***

La figura 4.31c muestra este mecanismo con el seguidor en la posición inferior. Otra vez, los eslabones forman un triángulo $\Delta AC''D$. Observe que la longitud de AC'' es de 12 in (16 – 4).

Para definir completamente esta configuración, se determinan los ángulos interiores con un procedimiento idéntico al que se acaba de describir.

Para el ángulo interior de la unión A, $\angle C''AD$:

$$\angle C''AD = \cos^{-1}\left[\frac{AD^2 + AC'^2 - C''D^2}{2(AD)(AC'')}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{(18\text{ in})^2 + (12\text{ in})^2 - (8\text{ in})^2}{2(18\text{ in})(12\text{ in})}\right] = 20.7°$$

El ángulo interior en D está en el intervalo de 0° a 90°. Por lo tanto, para el ángulo interior en la unión D, $\angle ADC''$:

$$\angle ADC'' = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{AC'}{DC'}\right)\text{sen}\angle C''AD\right]$$

$$= \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{12\text{ in}}{8\text{ in}}\right)\text{sen } 20.7°\right] = 32.1°$$

Por último, el ángulo interior en la unión C'', $\angle AC''D$, se determina de la manera siguiente:

$$\angle AC''D = 180° - (\angle C''AD + \angle ADC'')$$

$$= 180° - (20.7° + 32.1°) = 127.2°$$

4. ***Mida la carrera del eslabón seguidor***

Para resumir, el segmento transportador (ángulo interior en la unión D, $\angle ADC$) recorre un espacio angular que se encuentra entre los 92.3° y 32.1°, medido hacia arriba desde la vertical:

$$32.1° < \theta_4 < 92.3°$$

y la carrera es

$$|\Delta\theta_4|_{\text{máx}} = 92.3° - 32.1° = 60.2°$$

4.9 ÁNGULO DE TRANSMISIÓN

La *ventaja mecánica* de un mecanismo es la razón de la fuerza de salida (o torque) dividida entre la fuerza de entrada (o torque). En un eslabonamiento, el *ángulo de transmisión* γ cuantifica la transmisión de la fuerza a través del mecanismo y afecta directamente la eficiencia mecánica. Evidentemente, las definiciones del ángulo de transmisión dependen de la selección del eslabón impulsor. En la figura 4.32 se presenta el ángulo de transmisión de mecanismos de manivela-corredera y de cuatro barras impulsados por una manivela. En estos eslabonamientos, la ventaja mecánica es proporcional al seno del ángulo γ. Conforme el eslabonamiento se mueve, el ángulo de transmisión, junto con los otros ángulos de las uniones, y la ventaja mecánica, cambian constantemente. Con frecuencia se desean conocer los valores extremos del ángulo de transmisión.

En el eslabonamiento manivela-corredera, el ángulo de transmisión se mide entre el acoplador y la línea normal a la dirección de deslizamiento. Los valores mínimos y máximos del ángulo de transmisión se determinan geométricamente construyendo configuraciones como la mostrada en la figura 4.32a. De manera alternativa, los ángulos de transmisión mínimo y máximo de un mecanismo manivela-corredera se calculan a partir de

$$\gamma_{\text{mín}} = \cos^{-1}\left[\frac{L_1 + L_2}{L_3}\right] \quad \textbf{(4.15)}$$

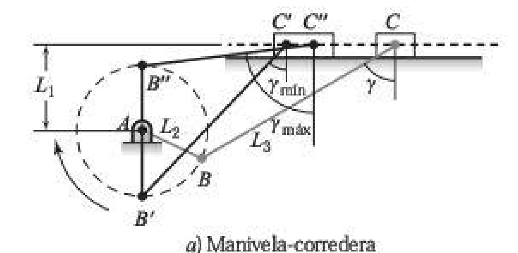
$$\gamma_{\text{máx}} = \cos^{-1}\left[\frac{L_1 - L_2}{L_3}\right] \quad \textbf{(4.16)}$$

En los mecanismos de cuatro barras, el ángulo de transmisión se mide entre el eslabón de salida y el acoplador. Al igual que en la manivela-corredera, los valores de los ángulos de transmisión mínimo y máximo se determinan geométricamente construyendo configuraciones como la mostrada en la figura 4.32b. Alternativamente, los ángulos de transmisión mínimo y máximo se calculan con

$$\gamma_{\text{mín}} = \cos^{-1}\left[\frac{L_3^2 + L_4^2 - (L_1 - L_2)^2}{2L_3L_4}\right] \quad \textbf{(4.17)}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \cos^{-1}\left[\frac{L_3^2 + L_4^2 - (L_1 + L_2)^2}{2L_3L_4}\right] \quad \textbf{(4.18)}$$

El ángulo de transmisión es una medida de la calidad de la transmisión de la fuerza en el mecanismo. Normalmente, el



a) Manivela-corredera

b) Cuatro barras

FIGURA 4.32 Ángulos de transmisión.

acoplador es un eslabón de tensión o de compresión. Por lo tanto, tan solo puede empujar o jalar a lo largo de la línea que conecta los dos pernos. Cuando se aplica una torque al pivote de salida, la transmisión óptima de la fuerza ocurre cuando el ángulo de transmisión es de 90°. Conforme el ángulo de transmisión se desvía de los 90°, solo una componente de la fuerza del acoplador se convierte en torque en el pivote, de modo que el ángulo de transmisión influye en la ventaja mecánica del mecanismo. Las configuraciones de mecanismos de manivela-corredera y de cuatro barras, que producen ángulos de transmisión mínimos y máximos, también se muestran en la figura 4.32. Una regla práctica común es que los ángulos de transmisión deberían permanecer entre los 45° y 135°. Se proporciona mayor detalle en el análisis del diseño del mecanismo en el capítulo 5.

4.10 CICLO COMPLETO: ANÁLISIS GRÁFICO DE POSICIÓN

La configuración de un mecanismo en un instante específico se conoce también como *fase* del mecanismo. Hasta ahora, los análisis de posición se centraron en determinar la fase del mecanismo en una cierta posición de un eslabón de entrada. El análisis del ciclo estudia el movimiento del mecanismo desde una fase inicial y aumenta gradualmente a través de una serie de fases durante la operación. La asignación de una fase inicial se utiliza como referencia de las fases subsecuentes. Se puede elegir cualquier configuración ventajosa como la fase inicial. Es común usar una posición límite como la fase inicial o de referencia.

Para efectuar el análisis de posición de un ciclo completo, la configuración del mecanismo se debe determinar a diferentes intervalos de su ciclo. El procedimiento, ya sea gráfico o analítico, es exactamente el descrito en las secciones anteriores. La única diferencia es que estos procedimientos se repiten a diferentes intervalos del desplazamiento de entrada. Los problemas de ejemplo siguientes ilustran el análisis de posición de un ciclo completo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.9

La figura 4.33 muestra el mecanismo impulsor de unas tijeras para podar manualmente. El mecanismo opera girando el disco grande como se indica. Determine gráficamente la posición del mecanismo impulsor en varias fases de su ciclo de operación.

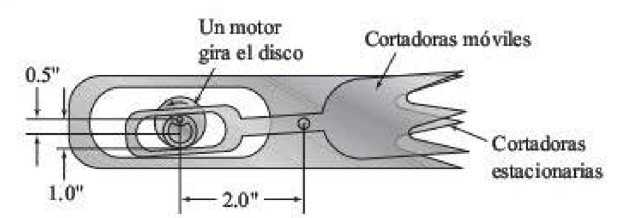


FIGURA 4.33 Tijeras para podar del problema de ejemplo 4.9.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático y calcule la movilidad***

En la figura 4.34a se presenta el diagrama cinemático. El extremo de la hoja de corte media se identifica como el punto de interés *X*.

La movilidad del mecanismo se calcula como:

$$n = 4 \; j_p = (3 \text{ pernos} + 1 \text{ corredera}) = 4 \; j_h = 0$$

y

$$M = 3(n - 1) - 2j_p - j_h$$
$$= 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1$$

Por lo tanto, el único eslabón de entrada se mueve para operar las tijeras.

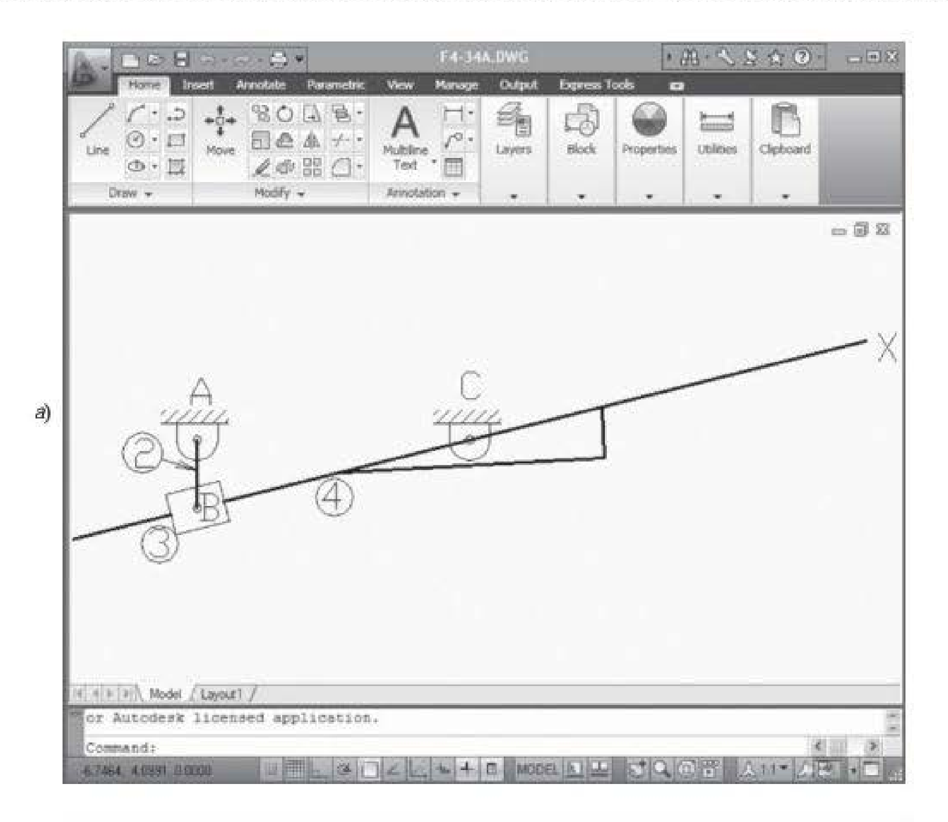
2. ***Diseñe la fase de referencia***

   Para asignar una fase de referencia, únicamente se debe especificar la posición del eslabón de entrada. Se selecciona en forma arbitraria la configuración cuando el disco impulsor, el eslabón 2, está en una posición vertical, con la unión *B* directamente debajo de la unión *A*.

3. ***Construya un intervalo de fases***

   El dibujo del mecanismo en varias fases de su ciclo es idéntico al análisis de posición anterior, pero repetitivo. Mientras se dibujen las diferentes fases con métodos gráficos, el diagrama cinemático suele cargarse muy rápido.

a)



b)

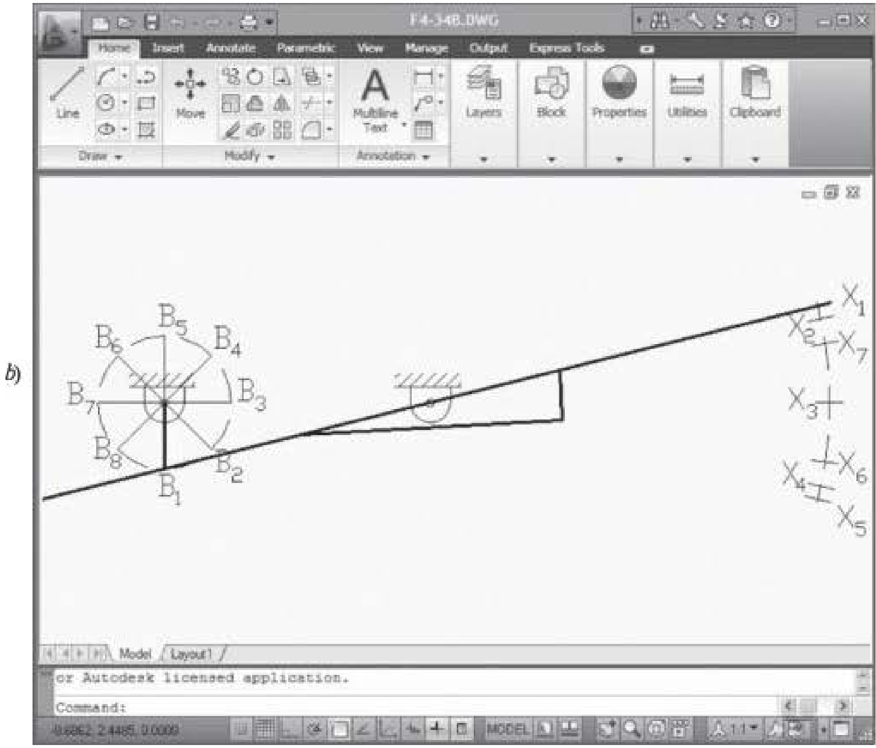


FIGURA 4.34 Fases del mecanismo del problema de ejemplo 4.9. *(Continúa).*

c)

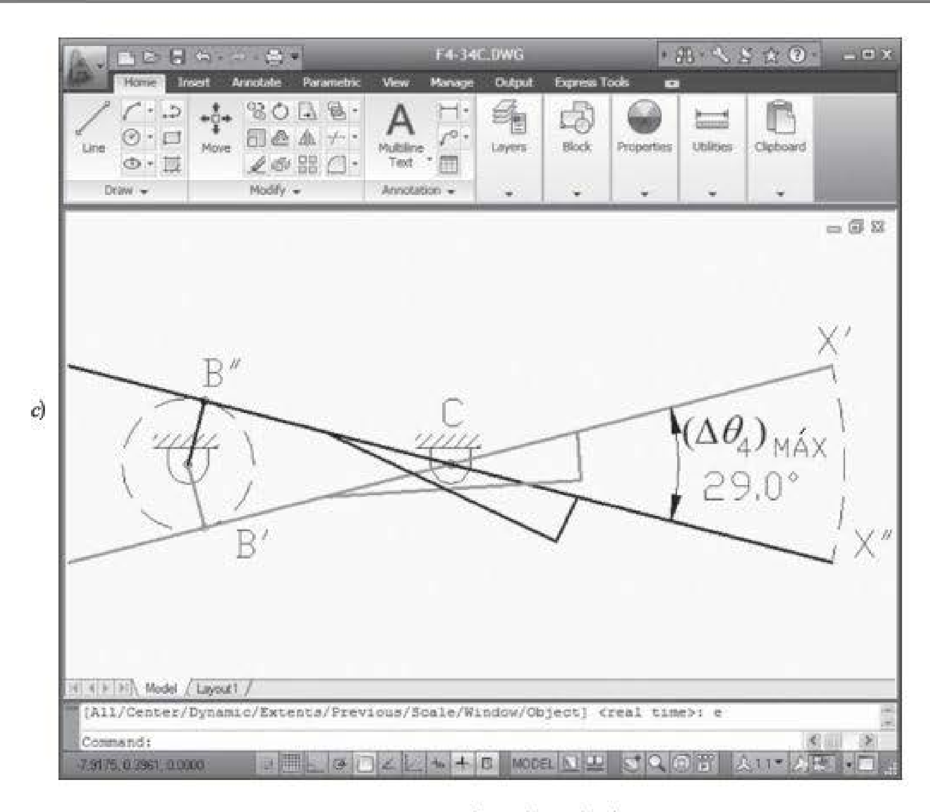


FIGURA 4.34 *(Continuación)*

Se recomienda ampliamente que se utilicen diferentes colores o fuentes para representar cada fase del ciclo. Cuando se usa el CAD, también es ventajoso colocar cada fase en un nivel diferente, el cual logre desplegarse u ocultarse rápido.

En este problema, el eslabón impulsor, el eslabón 2, se posiciona en intervalos de 45° a través de su ciclo. Por consiguiente, se construyen ocho fases del mecanismo, las cuales se designan como fases 1 a 8. Las ocho posiciones de los puntos B y X se muestran en la figura 4.34b. Observe que los puntos se identifican usando subíndices del 1 al 8, de acuerdo con la fase correspondiente. En la práctica, se utilizan incluso menores incrementos dependiendo de los detalles que se requieran del movimiento del mecanismo.

4. ***Construya las posiciones límite***

También se determinan las fases asociadas con las posiciones límite. La hoja de corte alcanza su posición más elevada cuando el eslabón 4 gira al máximo ángulo posible. Esto ocurre cuando el eslabón 4 es tangente al círculo que representa las posiciones posibles del punto B. El punto de tangencia se denota como B' y la posición correspondiente de las cuchillas se denota con X'. Esto se muestra en la figura 4.34c.

La posición inferior de la cuchilla ocurre cuando el eslabón 4 gira hasta su ángulo menor. Otra vez, esto ocurre cuando el eslabón 4 es tangente al círculo que representa las trayectorias posibles de B. Los puntos relacionados con la configuración más baja se denotan en la figura 4.34c como B'' y X''.

El desplazamiento máximo del eslabón 4 se mide a partir de la construcción cinemática:

$$|\Delta\theta_4|_{\text{máx}} = 29.0°$$

4.11 CICLO COMPLETO: ANÁLISIS DE LA POSICIÓN

Para obtener la configuración de un mecanismo a través de un ciclo, se repite el método analítico para alcanzar varias fases. Suele tratarse de un proceso excesivamente repetitivo, por lo cual es común usar programas de software, como se verá en el capítulo 8.

Las ecuaciones generadas a partir de triángulos definidos parcialmente por los eslabones del mecanismo, se resumen como las ecuaciones (4.1) a (4.12). Estas ecuaciones se despejan para diferentes valores de la posición del impulsor. Las hojas de cálculo como las que se verán en el capítulo 8 son ideales para tales análisis.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.10

La figura 4.35 ilustra un mecanismo que se diseñó para empujar piezas de un transportador a otro. Durante la transferencia, las piezas se deben girar como se indica. Determine analíticamente la posición de la varilla de empuje en varias fases de su movimiento.

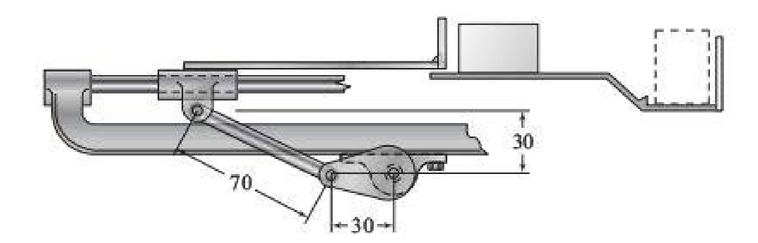


FIGURA 4.35 Alimentador del transportador del problema de ejemplo 4.10.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático de este mecanismo se presenta en la figura 4.36. Observe que se trata de un mecanismo de manivela-corredera descentrado que tiene un grado de libertad.

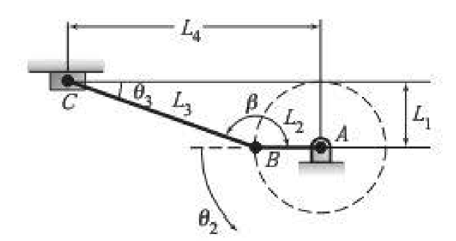


FIGURA 4.36 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 4.10.

2. ***Diseñe la fase inicial***

Se elige de manera arbitraria que la fase inicial sea cuando la manivela está horizontal, colocando el punto B directamente a la izquierda de la unión A.

3. ***Construya las fases del intervalo***

Recuerde que las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8) describen la posición de un mecanismo de manivela-corredera descentrado, las cuales se pueden usar en el análisis de un ciclo completo. Las ecuaciones se utilizaron junto con una hoja de cálculo, lo cual dio los resultados mostrados en la figura 4.37. Si no está familiarizado con las hojas de cálculo, consulte el capítulo 8.

4. ***Identifique las posiciones límite***

Centrándonos en la posición del eslabón 4, la oscilación de la corredera se aproxima como

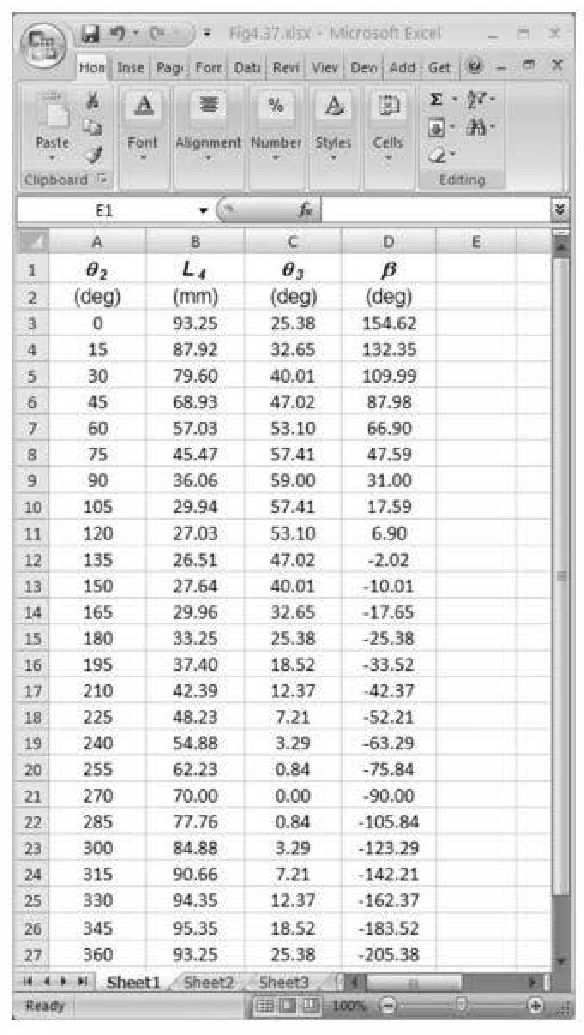
$$26.51 \text{ mm} < L_4 < 93.25 \text{ mm}$$

y el desplazamiento máximo como

$$|\Delta \mathbf{R}_4|_{\text{máx}} = (L_4)_{\text{máx}} - (L_4)_{\text{mín}} \cong 93.25 - 26.51 = 66.74 \text{ mm}$$

Esto es solo una aproximación porque con incrementos de 15° la posición límite no se puede detectar con exactitud. Cuando se requiere información exacta sobre la posición límite, se recomienda usar las técnicas presentadas en la sección 4.8.

Quizás haya confusión al observar el valor del ángulo β en el ángulo de la manivela, θ_2, que es igual a 360°. El valor debería ser idéntico al valor inicial en 0° del ángulo de la manivela. Observe que los valores difieren durante los 360°. Uno mide el ángulo interior, y el otro el ángulo exterior. Esto muestra la necesidad de verificar la información obtenida a partir de las ecuaciones con la del mecanismo físico.



θ_2 (deg)	L_4 (mm)	θ_3 (deg)	β (deg)
0	93.25	25.38	154.62
15	87.92	32.65	132.35
30	79.60	40.01	109.99
45	68.93	47.02	87.98
60	57.03	53.10	66.90
75	45.47	57.41	47.59
90	36.06	59.00	31.00
105	29.94	57.41	17.59
120	27.03	53.10	6.90
135	26.51	47.02	-2.02
150	27.64	40.01	-10.01
165	29.96	32.65	-17.65
180	33.25	25.38	-25.38
195	37.40	18.52	-33.52
210	42.39	12.37	-42.37
225	48.23	7.21	-52.21
240	54.88	3.29	-63.29
255	62.23	0.84	-75.84
270	70.00	0.00	-90.00
285	77.76	0.84	-105.84
300	84.88	3.29	-123.29
315	90.66	7.21	-142.21
330	94.35	12.37	-162.37
345	95.35	18.52	-183.52
360	93.25	25.38	-205.38

FIGURA 4.37 Posiciones de la varilla de empuje del problema de ejemplo 4.10.

4.12 DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTO

Una vez que se efectúa el análisis de posición de un ciclo completo, es muy razonable graficar el desplazamiento de un punto en relación con el desplazamiento de otro punto. Lo más frecuente es graficar el desplazamiento de un punto sobre el seguidor en relación con el desplazamiento de un punto sobre el impulsor.

Comúnmente, el desplazamiento del impulsor se grafica sobre la horizontal. En el caso de una manivela, el desplazamiento del impulsor es de una revolución. El desplazamiento correspondiente del seguidor se grafica a lo largo de la vertical. El desplazamiento graficado sobre el eje vertical puede ser lineal o angular, dependiendo del movimiento que se obtiene del mecanismo específico.

PROBLEMA DE EJEMPLO 4.11

La figura 4.38 ilustra el mecanismo impulsor de un compresor reciprocante. Elabore un diagrama de desplazamiento del desplazamiento del pistón en relación con un giro del cigüeñal.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático***

Después de un examen riguroso, el mecanismo del compresor se identifica como un mecanismo de manivela-corredera. Recuerde que este mecanismo tiene un grado de libertad y se opera con el giro de la manivela. En la figura 4.39 se muestra el diagrama cinemático con las dimensiones adecuadas.

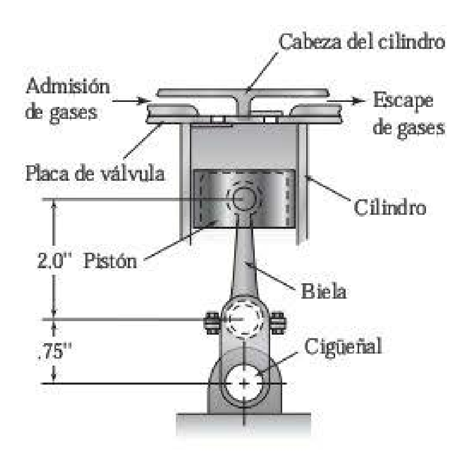


FIGURA 4.38 Compresor del problema de ejemplo 4.11.

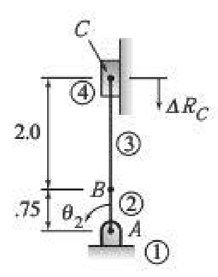


FIGURA 4.39 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 4.11.

2. ***Diseñe la fase de referencia***

   Como se observa en la figura 4.39, la fase de referencia se elige arbitrariamente con la manivela en posición vertical, colocando la unión *B* directamente arriba de la unión *A*. La posición del pistón (el punto *C*) se mide a partir de esta posición de referencia.

3. ***Construya las fases del intervalo***

   Los desplazamientos reales se determinan, analítica o gráficamente, usando los métodos presentados en las secciones anteriores. Para el mecanismo de manivela-corredera, el desplazamiento se obtuvo analíticamente con las ecuaciones (4.3) a (4.5). Con una hoja de cálculo, los resultados se obtuvieron como se muestran en la figura 4.40. El desplazamiento de la manivela (θ_2) se mide en grados; y el desplazamiento del pistón ($\Delta \mathbf{R}_C$), en pulgadas (in).

4. ***Identifique las posiciones límite***

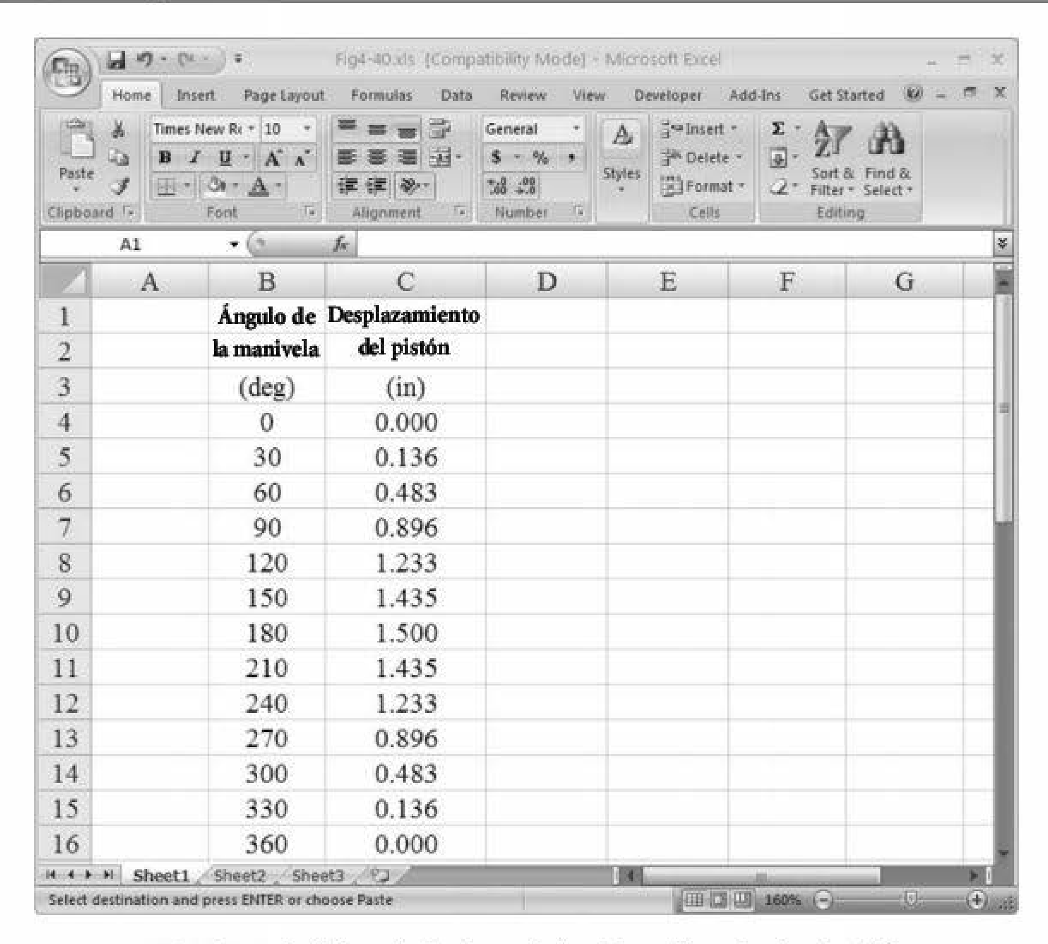
   Centrándose en la posición del pistón, la oscilación se aproxima como

$$|\Delta \mathbf{R}_c|_{\text{máx}} \cong 1.50 \text{ in}$$

Como se vio en el problema anterior, esto es solo una aproximación, porque en incrementos de 30° la posición límite no se detecta con precisión. Sin embargo, para el mecanismo de manivela-corredera en línea, un examen de la geometría revela que las posiciones límite se presentan en los ángulos 0° y 180° de la manivela. Por consiguiente, la carrera es exactamente de 1.50 in.

5. ***Elabore el diagrama de desplazamiento***

   Los valores obtenidos en la hoja de cálculo y tabulados en la figura 4.40 se graficaron en la figura 4.41 para crear el diagrama de desplazamiento.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Ángulo de	Desplazamiento				
2		la manivela	del pistón				
3		(deg)	(in)				
4		0	0.000				
5		30	0.136				
6		60	0.483				
7		90	0.896				
8		120	1.233				
9		150	1.435				
10		180	1.500				
11		210	1.435				
12		240	1.233				
13		270	0.896				
14		300	0.483				
15		330	0.136				
16		360	0.000				

FIGURA 4.40 Posiciones de desplazamientos del problema de ejemplo 4.11.

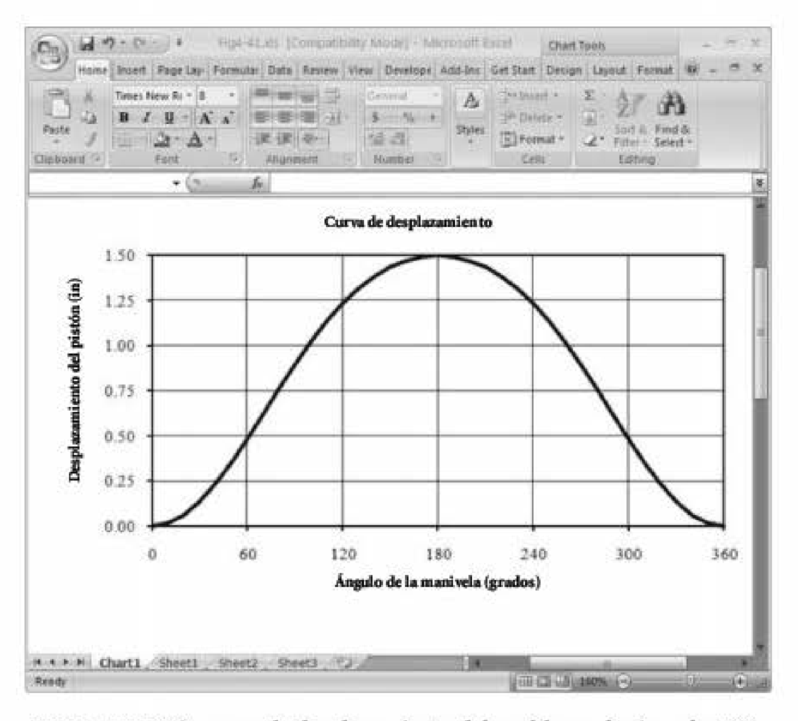


FIGURA 4.41 Diagrama de desplazamiento del problema de ejemplo 4.11.

4.13 CURVAS DEL ACOPLADOR

Con frecuencia, la función de un mecanismo es guiar una pieza a lo largo de una trayectoria específica. Las trayectorias generadas por los puntos de una biela, o un acoplador, de un mecanismo de cuatro barras con frecuencia logran los movimientos complejos que se desean. La *ruta* de un punto es la trayectoria que sigue el punto conforme el mecanismo se mueve a través de su ciclo. La trayectoria trazada por cualquier punto del acoplador se conoce como *curva de acoplador*. Las dos curvas de acoplador, es decir, aquellas trazadas por las uniones de perno del acoplador, son arcos simples, con centro en los dos pivotes fijos. No obstante, otros puntos del acoplador siguen curvas complejas. La figura 4.42 ilustra un mecanismo de cuatro barras, donde se despliegan las curvas del acoplador de unos cuantos puntos seleccionados.

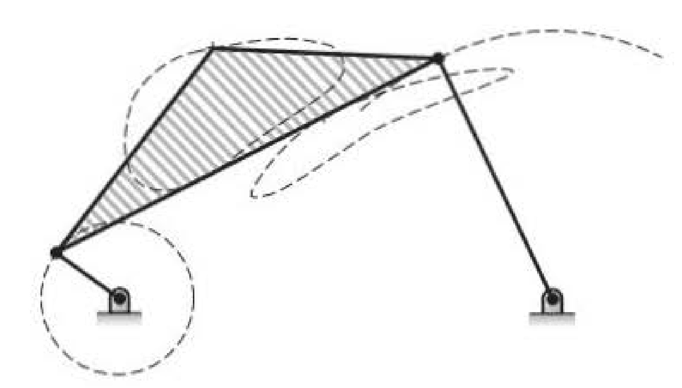


FIGURA 4.42 Curvas de acoplador.

Los métodos de este capítulo sirven para construir la ruta del movimiento de ciertos puntos sobre un mecanismo. La sección 4.10 introduce el concepto de la construcción de la configuración en varias fases de su ciclo. Por la manera como se construyen tales fases, se puede visualizar la posición de ciertos puntos. La curva formada cuando se unen las posiciones de estos puntos en varias fases del mecanismo determina la ruta de ese punto. Si los puntos se encuentran en un eslabón flotante, la ruta resultante, o curva del acoplador, es compleja. Estas rutas se utilizan para determinar los requerimientos espaciales de un mecanismo.

PROBLEMAS

Aun cuando las técnicas de dibujo manuales son didácticas en los problemas que requieren solución gráfica, se recomienda ampliamente el uso de un sistema de CAD.

Desplazamiento en general

4–1. El dispositivo que se muestra en la figura P4.1 es un mecanismo de yugo escocés. La posición horizontal del eslabón 4 se define como $x = 3\cos(50t + 40°)$. Determine el desplazamiento del eslabón 4 durante un intervalo de 0.10 a 1.50 s.

4–2. En el mecanismo de yugo escocés de la figura P4.1, la posición horizontal del eslabón 4 se define como $x = 3\cos(50t + 40°)$. Determine el desplazamiento del eslabón 4 durante un intervalo de 3.8 a 4.7 s.

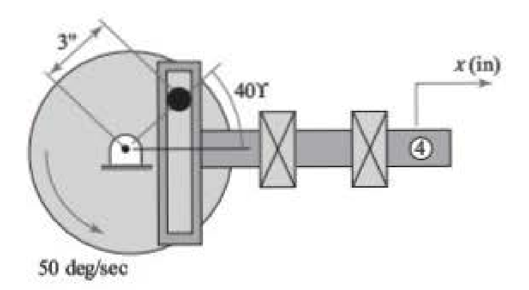


FIGURA P4.1 Problemas 1 y 2.

Análisis gráfico del desplazamiento

4–3. Determine gráficamente el desplazamiento de los puntos P y Q conforme el eslabón mostrado en la figura P4.3 se desplaza 25° en sentido antihorario. Use $\beta = 55°$ y $\gamma = 30°$.

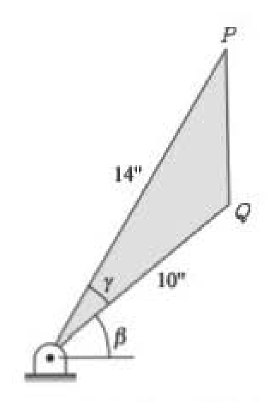


FIGURA P4.3 Problemas 3, 4, 38, 39.

4–4. Determine gráficamente el desplazamiento de los puntos P y Q conforme el eslabón mostrado en la figura P4.3 se desplaza 35° en el sentido horario. Use $\beta = 65°$ y $\gamma = 15°$.

4–5. Posicione gráficamente los eslabones del eslabonamiento compresor en la configuración mostrada en la figura P4.5. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 45 mm gira 90° en sentido antihorario. Determine el desplazamiento resultante del pistón.

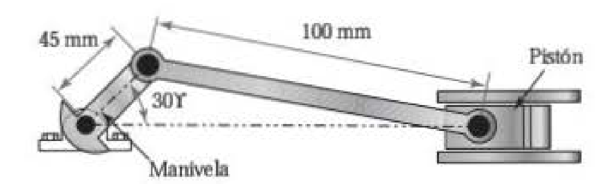


FIGURA P4.5 Problemas 5, 6, 40, 56, 63, 70, 76, 82.

4–6. Posicione gráficamente los eslabones del compresor en la configuración mostrada en la figura P4.5. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 45 mm gira 120° en el sentido horario. Determine el desplazamiento resultante del pistón.

4–7. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de corte en la configuración mostrada en la figura P4.7. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 0.75 in gira 100° en el sentido horario. Determine el desplazamiento resultante de la cuchilla.

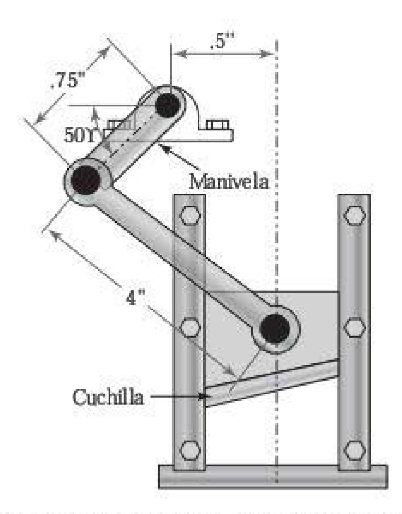


FIGURA P4.7 Problemas 7, 8, 41, 57, 64, 71, 77, 83.

4–8. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de corte en la configuración mostrada en la figura P4.7. Luego, reposicione los eslabones conforme la cuchilla desciende 0.2 in. Determine el desplazamiento angular resultante de la manivela.

4–9. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de estampado en la configuración mostrada en la figura P4.9. Luego, reposicione los eslabones conforme el mango gira 15° en el sentido horario. Determine el desplazamiento resultante del sello y el desplazamiento lineal del extremo del mango.

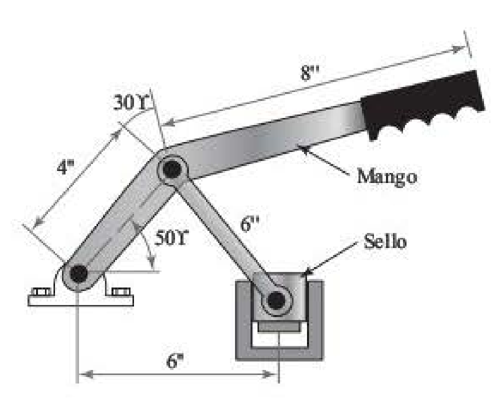


FIGURA P4.9 Problemas 9, 10, 42.

4–10. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de estampado en la configuración que se presenta en la figura P4.9. Luego, reposicione los eslabones conforme el mango gira 10° en sentido antihorario. Determine el desplazamiento resultante del sello y el desplazamiento lineal del extremo del mango.

4–11. Posicione gráficamente los eslabones de la puerta del horno en la configuración mostrada en la figura P4.11. Luego, reposicione los eslabones conforme el mango, que se encuentra originalmente en 10°, gira hasta los 40° en el sentido antihorario. Determine el desplazamiento resultante de la puerta.

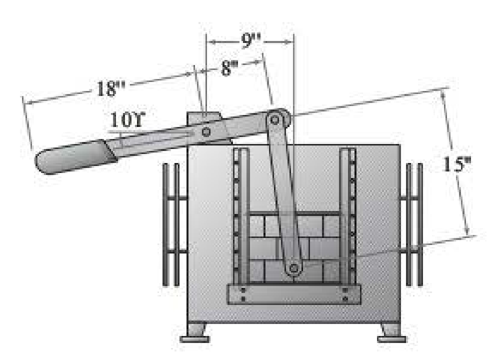


FIGURA P4.11 Problemas 11, 12, 43.

4–12. Posicione gráficamente los eslabones de la puerta del horno en la configuración mostrada en la figura P4.11. Luego, reposicione los eslabones conforme la puerta se eleva 3 in. Determine el desplazamiento angular requerido del mango para elevar la puerta 3 in.

4–13. En la figura P4.13 se muestra un mecanismo triturador de rocas. Posicione gráficamente los eslabones en la configuración mostrada. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 30° en el sentido horario. Determine el desplazamiento angular resultante del ariete triturador.

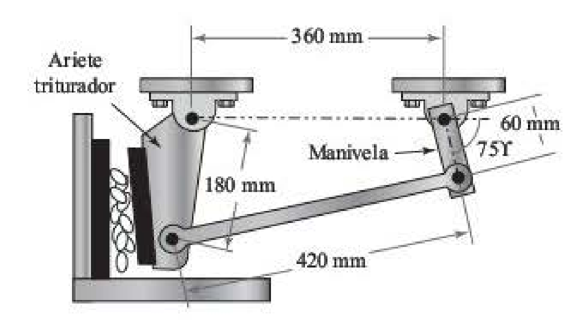


FIGURA P4.13 Problemas 13, 14, 44, 58, 65, 72, 78, 84.

4–14. En la figura P4.13 se observa un mecanismo de triturador de rocas. Posicione gráficamente los eslabones en la configuración mostrada. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 150° en sentido antihorario. Determine el desplazamiento angular resultante del ariete triturador.

4–15. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo del limpiador automotriz posterior de vidrios mostrado en la figura P4.15. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 2 in gira 50° en el sentido horario. Determine el desplazamiento angular resultante del brazo del limpiador y el desplazamiento lineal en el extremo de la hoja del limpiador.

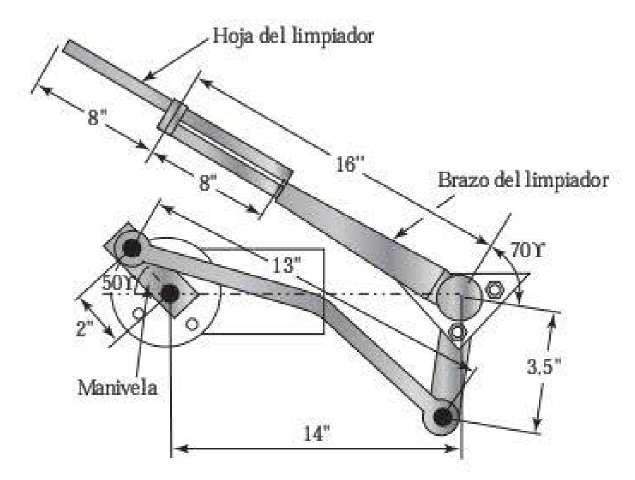


FIGURA P4.15 Problemas 15, 16, 45, 59, 66, 73, 79, 85.

4–16. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo del limpiador trasero de vidrios mostrado en la figura P4.15. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 2 in gira 110° en el sentido horario. Determine el desplazamiento angular resultante del brazo del limpiador y el desplazamiento lineal en el extremo de la hoja del limpiador.

4–17. Posicione gráficamente los eslabones de las pinzas de presión mostradas en la figura P4.17. Luego, reposiciones los eslabones conforme la mordaza superior se abre 40° a partir de la orientación mostrada, en tanto que la mordaza inferior permanece estacionaria. Determine el desplazamiento angular resultante del mango superior.

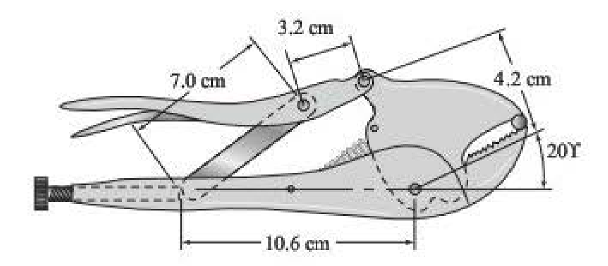


FIGURA P4.17 Problemas 17, 18, 19, 46.

4–18. Posicione gráficamente los eslabones de las pinzas de presión mostradas en la figura P4.17. Luego, reposiciones los eslabones conforme la mordaza superior se abre 20° a partir de la orientación mostrada, en tanto que la mordaza inferior permanece estacionaria. Determine el desplazamiento angular resultante del mango superior.

4–19. Cuando se gira el tornillo de mariposa en el mango inferior de las pinzas de presión de la figura P4.17, se mueve el punto de pivote efectivo del eslabón de 7.0 cm. Durante este movimiento, el resorte evita que las mordazas se muevan. Posicione gráficamente los eslabones conforme el punto de pivote efectivo se mueve 2 cm a la derecha. Luego, reposicione los eslabones conforme la mordaza superior se abre 40° a partir de la nueva orientación, en tanto la mordaza inferior permanece estacionaria. Determine el desplazamiento angular resultante del mango superior.

4–20. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo impulsor del tren de aterrizaje de una aeronave pequeña que se muestra en la figura P4.20. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 12 in gira 60° en el sentido horario a partir de la orientación mostrada. Determine el desplazamiento angular resultante del ensamble de la rueda.

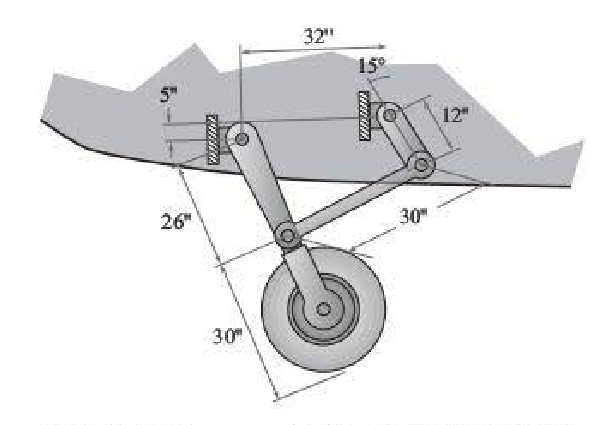


FIGURA P4.20 Problemas 20, 21, 47, 60, 67, 74, 80, 86.

4–21. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo impulsor del tren de aterrizaje de una aeronave pequeña que se muestra en la figura P4.20. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela de 12 in gira 110° en el sentido horario a partir de la orientación mostrada. Determine el desplazamiento angular resultante del ensamble de la rueda.

4–22. Posicione gráficamente los eslabones de la bomba de aire de pedal que se ilustra en la figura P4.22. Luego, reposicione los eslabones conforme el pedal gira 25° en sentido antihorario a partir de la orientación mostrada. Determine el desplazamiento lineal resultante del punto *X* y la distancia que se retrae el cilindro de aire. Asimismo, con el diámetro del cilindro igual a 25 mm, determine el volumen de aire desplazado por este movimiento.

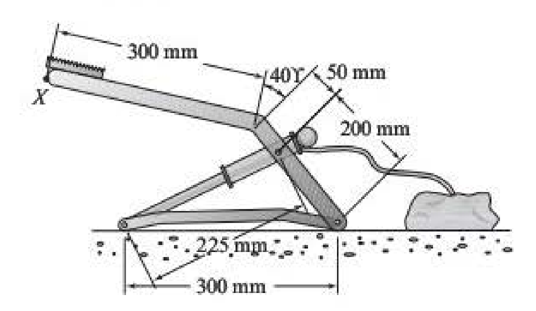


FIGURA P4.22 Problemas 22, 23, 48.

4–23. Posicione gráficamente los eslabones de la bomba de aire de pedal que se ilustra en la figura P4.22. Luego, reposicione los eslabones conforme el cilindro de aire se retrae 175 mm. Determine el desplazamiento angular resultante del pedal y el desplazamiento lineal del punto *X*.

4–24. Posicione gráficamente los eslabones del elevador del horno de microondas, que ayuda a gente en silla de ruedas, mostrado en la figura P4.24. Luego, reposicione los eslabones conforme el actuador lineal se retrae a una longitud de 400 mm. Determine el desplazamiento

angular resultante del eslabón de soporte frontal y el desplazamiento lineal de cualquier punto sobre el portador del horno

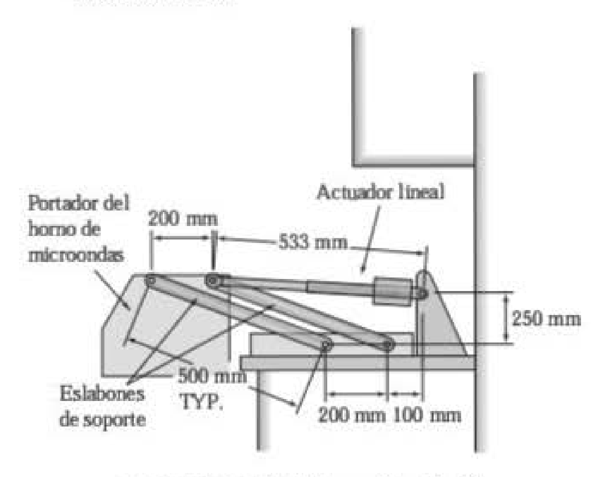


FIGURA P4.24 Problemas 24, 25, 49.

4–25. Posicione gráficamente los eslabones del elevador del horno de microondas, que ayuda a gente discapacitada, mostrado en la figura P4.24. Luego, reposicione los eslabones conforme el eslabón de soporte frontal se eleva 45° a partir de la orientación mostrada. Determine la distancia que necesita retraerse el actuador lineal.

4–26. Posicione gráficamente los eslabones del contenedor del camión que se usa para cargar suministros en las aeronaves, como se indica en la figura P4.26. Luego, reposicione los eslabones conforme el perno inferior se desliza 0.5 m hacia la cabina. Determine el desplazamiento lineal resultante de cualquier punto de la caja de carga.

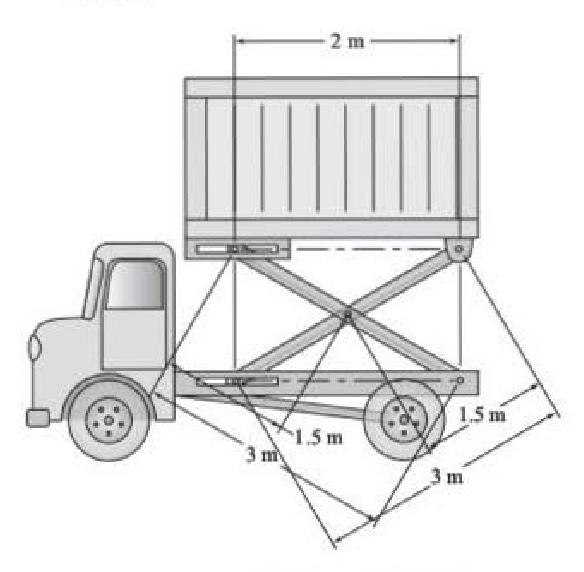


FIGURA P4.26 Problemas 26, 27, 50.

4–27. Posicione gráficamente los eslabones del contenedor del camión que se usa para cargar suministros en los aeroplanos, como se indica en la figura P4.26. Luego, reposicione los eslabones conforme el perno inferior se desliza 0.75 m alejándose de la cabina. Determine el desplazamiento lineal resultante de cualquier punto de la caja de carga.

4–28. Posicione gráficamente los eslabones de la plataforma elevadora mostrada en la figura P4.28. Determine la longitud del cilindro hidráulico. Luego, reposicione los eslabones conforme la plataforma se eleva a 40 in. Determine la longitud que se debe extender el cilindro hidráulico para realizar este movimiento.

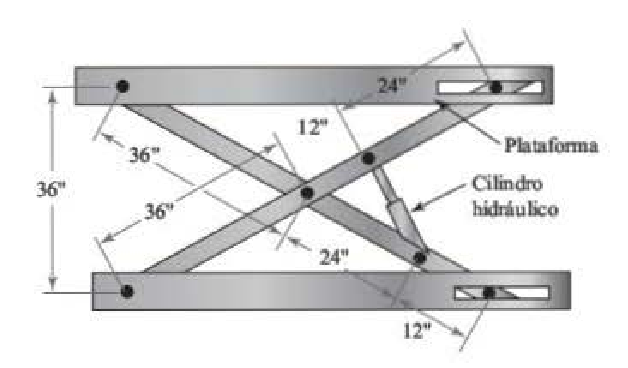


FIGURA P4.28 Problemas 28, 29, 51.

4–29. Posicione gráficamente los eslabones de la plataforma elevadora mostrada en la figura P4.28. Determine la longitud del cilindro hidráulico. Luego, reposicione los eslabones conforme la plataforma desciende a 30 in. Determine la longitud que se debe retraer el cilindro hidráulico para efectuar este movimiento.

4–30. El mecanismo mostrado en la figura P4.30 se usa en los proyectores de cine para avanzar la película. Posicione gráficamente los eslabones para la configuración mostrada. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 90° en el sentido horario. Determine el desplazamiento resultante de la uña de avance.

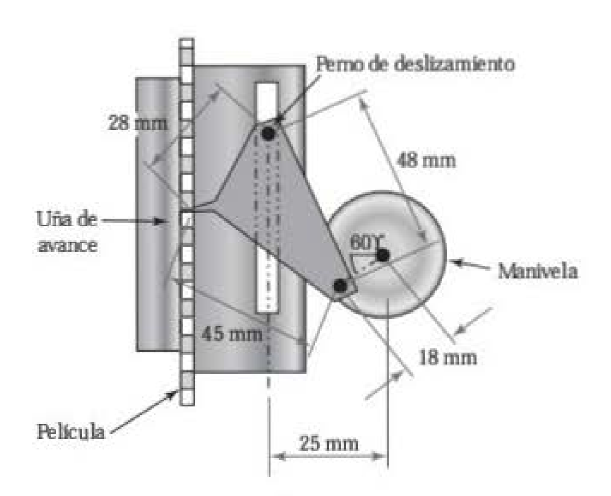


FIGURA P4.30 Problemas 30, 31, 52, 61, 68.

4–31. El mecanismo mostrado en la figura P4.30 se utiliza en los proyectores de cine para avanzar la película. Posicione gráficamente los eslabones para la configuración mostrada. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 130° en el sentido horario. Determine el desplazamiento resultante de la uña de avance.

4–32. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de la suspensión delantera automotriz que se ilustra en

la figura P4.32. Luego, reposicione los eslabones conforme el brazo de control superior gira 20° en el sentido horario. Calcule el desplazamiento resultante de la parte inferior del neumático. Asimismo, determine el cambio en la longitud del resorte.

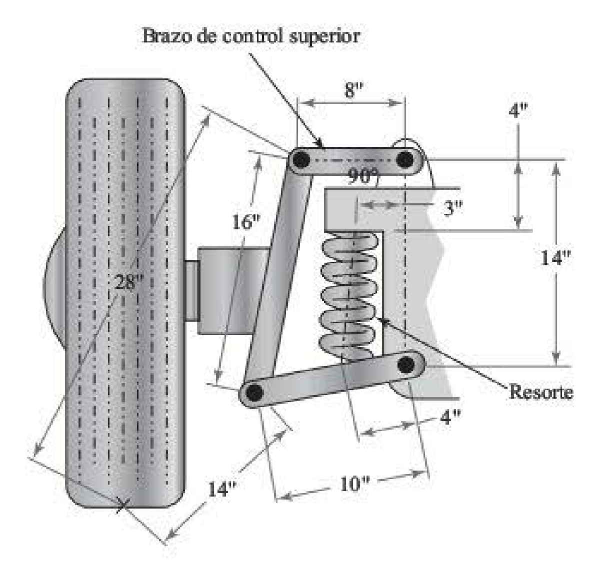


FIGURA P4.32 Problemas 32, 33, 53.

4–33. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo en la suspensión delantera automotriz que se ilustra en la figura P4.32. Luego, reposicione los eslabones conforme el brazo superior de control gira 10° en sentido antihorario. Determine el desplazamiento resultante de la parte inferior del neumático. Determine asimismo el cambio en la longitud del resorte.

4–34. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo triturador de rocas que se presenta en la figura P4.34. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 120° en el sentido horario. Determine el desplazamiento angular resultante del ariete triturador.

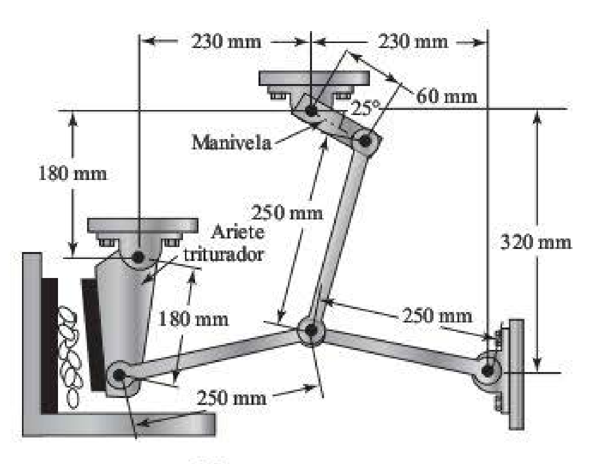


FIGURA P4.34 Problemas 34, 35, 54, 62, 69, 75, 81, 87.

4–35. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34. Luego, reposicione los eslabones conforme la manivela gira 75° en el sentido horario. Determine el desplazamiento angular resultante del ariete triturador.

4–36. Posicione gráficamente los eslabones del camión de volteo que se ilustra en la figura P4.36. Luego, reposicione los eslabones conforme se acorta el cilindro

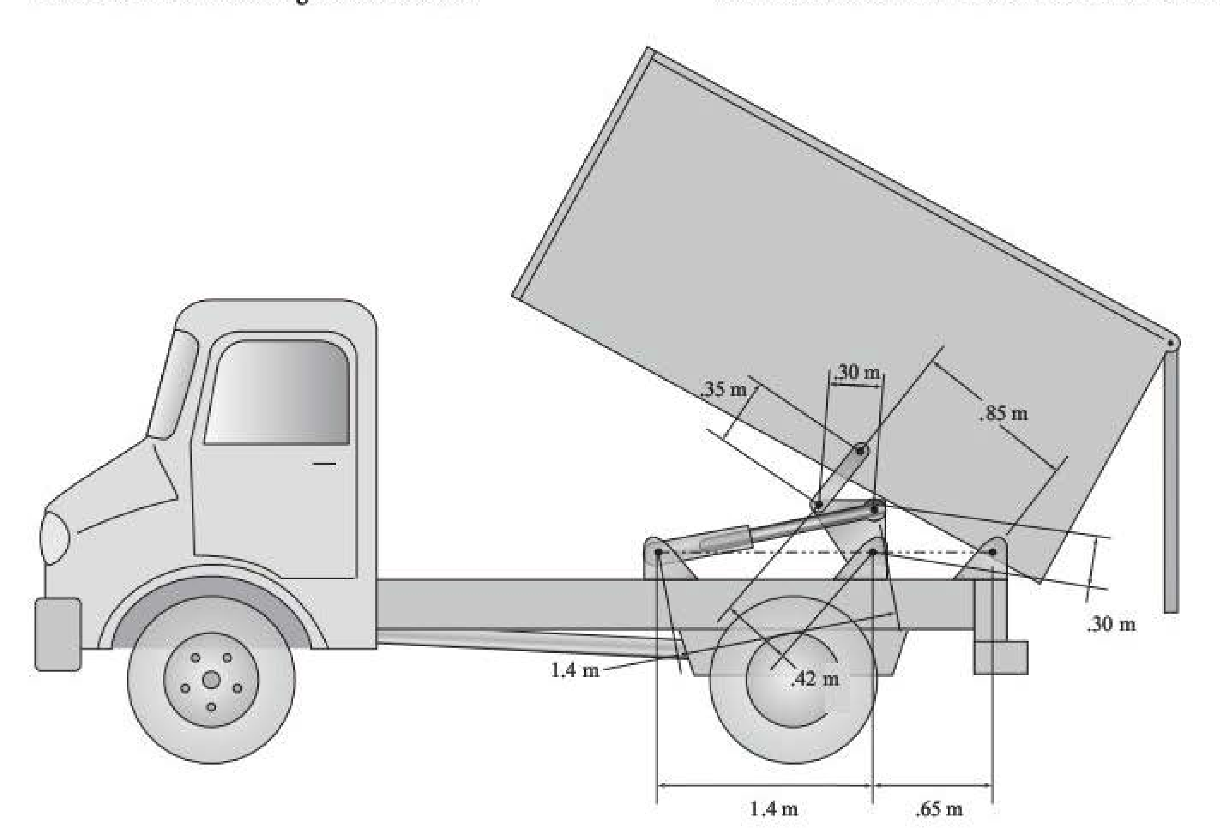


FIGURA P4.36 Problemas 36, 37, 55.

0.15 m. Determine el desplazamiento angular resultante de cualquier punto sobre la caja.

4–37. Posicione gráficamente los eslabones del camión de volteo de basura mostrado en la figura P4.36. Luego, reposicione los eslabones conforme se alarga el cilindro 0.2 m. Determine el desplazamiento angular resultante de cualquier punto sobre la caja.

Análisis analítico del desplazamiento

4–38. Determine analíticamente el desplazamiento de los puntos P y Q, conforme el eslabón mostrado en la figura P4.3 se desplaza 30° en sentido antihorario. Use $\beta = 55°$ y $\gamma = 30°$.

4–39. Determine analíticamente el desplazamiento de los puntos P y Q, conforme el eslabón mostrado en la figura P4.3 se desplaza 40° en sentido horario. Use $\beta = 65°$ y $\gamma = 15°$.

4–40. Determine analíticamente el desplazamiento lineal del pistón del eslabonamiento compresor mostrado en la figura P4.5, conforme la manivela de 45 mm gira 90° a partir de su posición actual en sentido antihorario.

4–41. Determine analíticamente el desplazamiento lineal de la cuchilla del mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7, conforme la manivela de 0.75 in gira 50° a partir de su posición actual en sentido antihorario.

4–42. Determine analíticamente el desplazamiento lineal del sello del mecanismo mostrado en la figura P4.9, conforme el mango gira 20° a partir de su posición actual en el sentido horario.

4–43. Determine analíticamente el desplazamiento lineal de la puerta del horno del mecanismo mostrado en la figura P4.11, conforme el mango de 26 in gira 25° a partir de su posición actual en sentido antihorario.

4–44. Determine analíticamente el desplazamiento angular del ariete del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13, conforme la manivela de 60 mm gira 40° a partir de su posición actual en el sentido horario.

4–45. Determine analíticamente el desplazamiento angular del brazo del limpiador trasero del mecanismo mostrado en la figura P4.15, conforme la manivela de 2 in gira 100° a partir de su posición actual en el sentido horario.

4–46. Determine analíticamente el desplazamiento angular del mango superior de las pinzas mostradas en la figura P4.17, conforme la mordaza superior se abre 25° a partir de su posición actual, en tanto que la mordaza inferior permanece estacionaria.

4–47. Determine analíticamente el desplazamiento angular del ensamble de la rueda del mecanismo impulsor del tren de aterrizaje ilustrado en la figura P4.20, conforme la manivela de 12 in gira 60° a partir de su posición actual en sentido antihorario.

4–48. Determine analíticamente la distancia que se retrae el cilindro de aire en la bomba de pedal mostrada en la figura P4.22, cuando el pedal gira 20° a partir de su posición actual en sentido antihorario. Asimismo, con un diámetro del cilindro igual a 25 mm, calcule el volumen de aire desplazado durante este movimiento.

4–49. Determine analíticamente el desplazamiento angular del eslabón del soporte frontal del elevador del horno de microondas mostrado en la figura P4.24, conforme el actuador lineal se retrae a una longitud de 425 mm.

4–50. Determine analíticamente la distancia vertical que desciende el contenedor del camión de la figura P4.26, si los pernos inferiores se separan de 2.0 a 1.5 m.

4–51. Determine analíticamente la extensión requerida del cilindro hidráulico para elevar la plataforma mostrada en la figura P4.28 una altura de 45 in.

4–52. Determine analíticamente el desplazamiento de la uña del mecanismo de avance de la película mostrado en la figura P4.30, conforme la manivela gira 100° en el sentido horario.

4–53. Determine analíticamente el desplazamiento de la parte inferior del neumático del mecanismo de la suspensión automotriz mostrado en la figura P4.32, conforme el brazo superior de control gira 15° en el sentido horario.

4–54. Determine analíticamente el desplazamiento angular del ariete triturador del mecanismo mostrado en la figura P4.34, conforme la manivela gira 95° en el sentido horario.

4–55. Determine analíticamente el desplazamiento angular de la caja del camión de volteo mostrado en la figura P4.36, conforme el cilindro se acorta 0.1 m.

Posiciones límite (método gráfico)

4–56. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo compresor mostrado en la figura P4.5, para las configuraciones que colocan al pistón en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento lineal máximo (carrera) del pistón.

4–57. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7, de acuerdo con las configuraciones que colocan a la cuchilla en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento lineal máximo (carrera) de la cuchilla.

4–58. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13, de acuerdo con las configuraciones que colocan al triturador en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento angular (desplazamiento) máximo del ariete triturador.

4–59. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de los limpiadores del parabrisas mostrado en la figura P4.15, de acuerdo con las configuraciones que colocan el limpiador en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento angular (desplazamiento) máximo del limpiador.

4–60. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo actuador de la rueda mostrado en la figura P4.20, de acuerdo con las configuraciones que colocan el ensamble de la rueda en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento angular (desplazamiento) máximo del ensamble de la rueda.

4–61. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo de avance de la película mostrado en la figura P4.30, de acuerdo con las configuraciones que colocan el perno de deslizamiento en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento lineal máximo (carrera) del perno.

4–62. Posicione gráficamente los eslabones del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34, de acuerdo con las configuraciones que colocan el ariete en sus posiciones límite. Determine el desplazamiento angular (desplazamiento) máximo del ariete triturador.

Posiciones límite (método analítico)

4–63. Calcule analíticamente el desplazamiento lineal máximo (carrera) del pistón del mecanismo compresor mostrado en la figura P4.5.

4–64. Calcule analíticamente el desplazamiento lineal máximo (carrera) de la cuchilla del mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7.

4–65. Calcule analíticamente el desplazamiento angular máximo (desplazamiento) del ariete del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13.

4–66. Calcule analíticamente el desplazamiento angular máximo (desplazamiento) del mecanismo limpiador del parabrisas mostrado en la figura P4.15.

4–67. Calcule analíticamente el desplazamiento angular máximo (desplazamiento) del ensamble de la rueda del mecanismo actuador de la rueda mostrado en la figura P4.20.

4–68. Calcule analíticamente el desplazamiento lineal máximo (carrera) del perno que se desliza del mecanismo de avance de la película mostrado en la figura P4.30.

4–69. Calcule analíticamente el desplazamiento angular máximo (desplazamiento) del ariete del mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34.

Diagramas de desplazamiento (método gráfico)

4–70. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P4.5, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la posición del pistón, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

4–71. Para el mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la cuchilla, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

4–72. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

4–73. Para el mecanismo limpiador de parabrisas mostrado en la figura P4.15, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la posición angular del limpiador, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

4–74. Para el mecanismo actuador de la rueda mostrado en la figura P4.20, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la posición angular del ensamble de la rueda, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

4–75. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34, elabore gráficamente un diagrama de desplazamiento de la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en el sentido horario.

Diagramas de desplazamiento (método analítico)

4–76. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P4.5, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento para la posición del pistón, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–77. Para el mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento para la posición de la cuchilla, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–78. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento para la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–79. Para el mecanismo limpiador del parabrisas mostrado en la figura P4.15, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento para la posición angular del limpiador, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–80. Para el mecanismo actuador de la rueda mostrado en la figura P4.20, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento para la posición angular del ensamble de la rueda, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–81. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34, elabore analíticamente un diagrama de desplazamiento de la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

Problemas de desplazamiento usando Working Model

4–82. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P4.5, use el software Working Model para crear una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición del pistón, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–83. Para el mecanismo de corte mostrado en la figura P4.7, use el software Working Model para crear una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición de la cuchilla, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–84. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.13, use el software Working Model para crear una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–85. Para el mecanismo limpiador del parabrisas mostrado en la figura P4.15, use el software Working Model para crear una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición angular del limpiador, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–86. Para el mecanismo impulsor de la rueda mostrado en la figura P4.20, use el software Working Model para crear una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición angular del ensamble de la rueda, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

4–87. Para el mecanismo triturador de rocas mostrado en la figura P4.34, use el software Working Model para crear

una simulación y elaborar un diagrama de desplazamiento para la posición angular del ariete, conforme la manivela da un giro completo en sentido antihorario.

ESTUDIOS DE CASOS

4–1. La figura E4.1 muestra un mecanismo que se diseñó para transmitir movimiento en una máquina de deslizamiento. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor comprensión acerca de la operación.

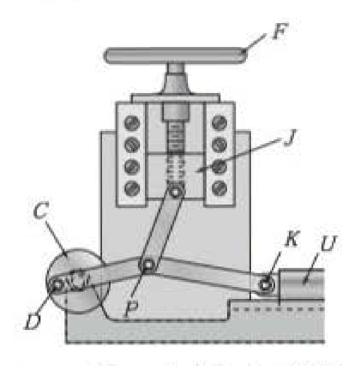


FIGURA E4.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Mientras la rueda *C* gira en el sentido horario y el deslizador *J* permanece inmóvil, ¿qué sucede con el movimiento continuo del perno *D*?
2. ¿Cuál es el movimiento continuo del perno *P*?
3. ¿Cuál es el movimiento continuo del perno *K*?
4. ¿Qué efecto produce el giro del volante *F* sobre el deslizador *J*?
5. ¿Qué efecto produce el giro del volante *F* en el movimiento del mecanismo? Asegúrese de considerar todas las características del movimiento.
6. ¿Cuál es la finalidad de este dispositivo?
7. Elabore un diagrama cinemático y calcule la movilidad del mecanismo.

4–2. La figura E4.2 muestra un interesante sistema de manejo de materiales para colocar piezas pequeñas sobre un riel de suministro. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de la operación.

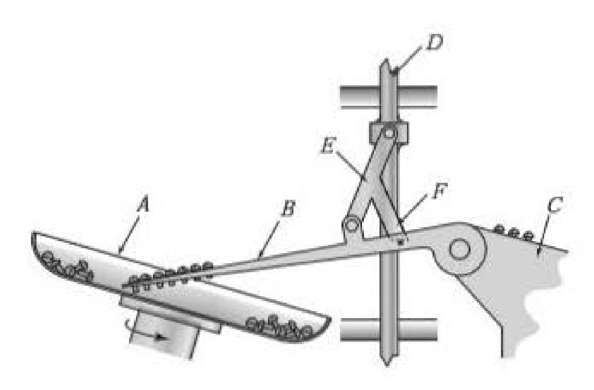


FIGURA E4.2 (Cortesía de Industrial Press).

1. Los tornillos pequeños sin rosca, de cabeza redonda, se alimentan a una máquina para hacer cuerdas mediante los rieles transportadores *B* y *C*. ¿Cómo pasan los tornillos de la bandeja *A* al transportador *B*?
2. Aun cuando no se ve con claridad, el riel *B* tiene un diseño de manecillas paralelas. ¿Por qué se usa un diseño de manecillas paralelas para transportar los tornillos?
3. Conforme un segundo mecanismo eleva intermitentemente el eslabón *D*, ¿cuál es el movimiento del riel *B*?
4. ¿Cuál es la finalidad del eslabón *E*?
5. Conforme un segundo mecanismo eleva intermitentemente el eslabón *D*, ¿cuál es el movimiento de los tornillos?
6. ¿Qué determina que el eslabón *D* pueda viajar a la posición inferior? Observe que las puntas del riel *B* no tocan la parte inferior de la bandeja *A*.
7. Conforme los tornillos se amontonan en el riel de salida *C*, ¿qué ocurre a la manecilla *F* conforme el eslabón *D* es forzado a bajar?
8. Conforme los tornillos se amontonan en el riel de salida *C*, ¿qué ocurre a las puntas del riel *B*?
9. ¿Cuál es el propósito de este dispositivo? Comente sus características principales.
10. ¿Qué tipo de mecanismo podría operar el eslabón *D*?

4–3. La figura E4.3 describe una máquina de traspaso que mueve alojamientos de embragues de una estación a otra. La plataforma *A* soporta el alojamiento durante la transferencia. Examine cuidadosamente la configuración de los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de la operación.

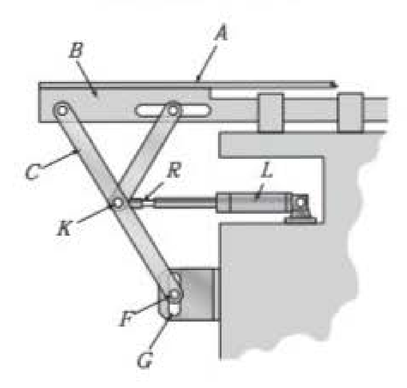


FIGURA E4.3 (Cortesía de Industrial Press).

1. ¿A qué tipo de movimiento está restringida la barra *B*?
2. ¿Qué movimiento realiza el eslabón *C* conforme se acorta el cilindro de aire *L*?
3. ¿Cuál es el movimiento del punto *K* conforme se acorta el cilindro de aire *L*?
4. ¿Qué necesita la unión *F* para desplazarse por la ranura *G*?
5. ¿Cuál es el objetivo de este mecanismo?
6. ¿Qué efecto tiene el giro del extremo *R* de la varilla roscada al alargar la varilla del cilindro?
7. Elabore un diagrama cinemático de este mecanismo.
8. Calcule la movilidad de este mecanismo.

DISEÑO DE MECANISMOS

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Describir la síntesis de un mecanismo.**
2. **Diseñar un mecanismo de manivela-corredera en línea.**
3. **Determinar un ángulo de desequilibrio adecuado, conociendo la razón deseada de tiempo del mecanismo.**
4. **Usar diagramas de tiempo para sincronizar el movimiento, y calcular magnitudes pico de velocidad y aceleración.**
5. **Diseñar mecanismos de manivela-corredera descentrados, manivela-balancín y manivela-cepilladora con métodos gráficos.**
6. **Diseñar un solo eslabón con pivote, que se mueve entre dos posiciones determinadas, utilizando métodos gráficos.**
7. **Diseñar un mecanismo de cuatro barras donde el acoplador se mueve entre dos posiciones establecidas, usando métodos gráficos.**
8. **Diseñar un mecanismo de cuatro barras donde el acoplador se mueve entre tres posiciones establecidas, utilizando métodos gráficos.**

5.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se han analizado básicamente mecanismos existentes. En el capítulo anterior se exploraron métodos para determinar el desplazamiento de un mecanismo donde se conocen las longitudes de sus eslabones. Comparado con este análisis, el diseño de un mecanismo es la tarea opuesta, es decir, se conoce el movimiento deseado y se deben determinar la forma y las dimensiones del mecanismo. *Síntesis* es el término que se usa para describir el proceso de diseño del mecanismo que produce el movimiento de salida deseado, dado un movimiento de entrada. La elección de un mecanismo específico capaz de realizar el movimiento deseado se conoce como *síntesis del tipo*. El objetivo de un diseñador debería ser utilizar el mecanismo más simple capaz de efectuar la tarea deseada. Por tal razón, los mecanismos de manivela-corredera y de cuatro barras son muy favorecidos. Este capítulo se enfoca en estas dos clases de mecanismos.

Después de seleccionar un tipo de mecanismo, se requiere determinar las longitudes adecuadas del eslabón mediante un proceso llamado *síntesis dimensional*. Este capítulo examina la síntesis dimensional. Para diseñar un mecanismo se debe usar la intuición, junto con los métodos de análisis descritos en capítulos anteriores. Esto implica con frecuencia una metodología de análisis-iteración que podría volver ineficiente el proceso, sobre todo cuando el diseñador es inexperto. Sin embargo, este proceso de iteración tiene su mérito, sobre todo en procesos donde los procedimientos de síntesis no existen o no es posible aplicarlos. No obstante, se han desarrollado varios métodos de síntesis dimensional, que suelen ser bastante útiles. Este capítulo sirve como introducción a tales procedimientos. Como en ocasiones las técnicas analíticas se vuelven muy complejas, el estudio se centra en las técnicas gráficas. Como se señala en todo el libro, el empleo de técnicas gráficas en un sistema de CAD da resultados exactos.

5.2 RAZÓN DE TIEMPO

Muchos mecanismos que producen movimiento reciprocante se diseñan para generar movimiento simétrico, es decir, las características del movimiento de la carrera hacia afuera son idénticas a las de la carrera hacia adentro. Con frecuencia tales mecanismos realizan trabajo en ambas direcciones. El mecanismo de un motor de gasolina y de los limpiadores del parabrisas son ejemplos de mecanismos equilibrados cinéticamente.

Sin embargo, otras aplicaciones de diseño de máquinas requieren una velocidad promedio diferente entre la carrera de avance y la carrera de retorno. Estas máquinas normalmente producen trabajo solamente en la carrera de avance, de modo que la carrera de retorno necesita ser tan rápida como sea posible, para que el mayor tiempo de operación esté disponible para la carrera de trabajo. Las máquinas cortadoras y empacadoras son ejemplos de estos mecanismos de retorno rápido.

Una medida de la acción de retorno rápido de un mecanismo es la *razón de tiempo* Q, la cual se define como:

$$Q = \frac{\text{Tiempo de la carrera más lenta}}{\text{Tiempo de la carrera más rápida}} \geq 1 \quad \textbf{(5.1)}$$

El ángulo de desequilibrio β es una propiedad que relaciona la geometría de un mecanismo específico con el tiempo de la carrera. Dicho ángulo se relaciona con la razón de tiempo Q de la manera siguiente:

$$Q = \frac{180^\circ + \beta}{180^\circ - \beta} \quad \textbf{(5.2)}$$

La ecuación 5.2 se replantea para obtener el ángulo de desequilibrio como:

$$\beta = 180^\circ \frac{(Q - 1)}{(Q + 1)} \quad \textbf{(5.3)}$$

Por consiguiente, en la síntesis dimensional de un mecanismo, la razón de tiempo deseada se convierte en una restricción geométrica necesaria a través del ángulo de desequilibrio β.

El tiempo total del ciclo del mecanismo es:

$$\Delta t_{ciclo} = \text{tiempo de la carrera más lenta} + \text{tiempo de la carrera más rápida} \quad (5.4)$$

Para mecanismos que son impulsados a velocidad constante por un actuador que gira, la velocidad requerida de la manivela, $\omega_{manivela}$, se relaciona con el tiempo del ciclo de la siguiente manera:

$$\omega_{manivela} = (\Delta t_{ciclo})^{-1} \quad (5.5)$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 5.1

Se va a diseñar un mecanismo de retorno rápido, donde la carrera de avance debe consumir 1.2 s y la carrera de retorno, 0.8 s. Determine la razón de tiempo, el ángulo de desequilibrio, el tiempo del ciclo y la velocidad a la cual debería impulsar el mecanismo.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la razón de tiempo y el ángulo de desequilibrio***

La razón de tiempo se determina con la ecuación (5.1):

$$Q = \left(\frac{1.2\text{ s}}{0.8\text{ s}}\right) = 1.5$$

El ángulo de desequilibrio resultante se calcula con la ecuación (5.3):

$$\beta = 180^\circ \frac{(1.5 - 1)}{(1.5 + 1)} = 36^\circ$$

2. ***Calcule el tiempo del ciclo del mecanismo***

El tiempo total de la carrera de avance y la de retorno es:

$$\Delta t_{ciclo} = 1.2 + 0.8 = 2.0\text{ s/rev}$$

3. ***Calcule la velocidad requerida de la manivela***

Como un ciclo de operación de la máquina implica tanto la carrera de avance como la de retorno, el tiempo para que la manivela complete una revolución también es de 2.0 s. La velocidad requerida de la manivela, $\omega_{manivela}$, se determina como:

$$\omega_{manivela} = (\Delta t_{ciclo})^{-1}$$
$$= \frac{1}{2\text{ s/rev}} = 0.5\text{ rev/s}\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right)$$
$$= 30\text{ rev/min}$$

En el capítulo 6 se introducirá formalmente el concepto de velocidad angular.

5.3 DIAGRAMAS DE TIEMPO

Los diagramas de tiempo se usan con frecuencia en el proceso de diseño de un mecanismo, como ayuda en la sincronización del movimiento entre mecanismos. Por ejemplo, cuando se utilizan dos mecanismos para transferir paquetes de una banda transportadora a otra, un mecanismo eleva un paquete de la transportadora inferior, en tanto que el otro mecanismo empuja el paquete hacia la transportadora superior, mientras el primero permanece inmóvil. Luego, ambos mecanismos regresan a la posición inicial y ejecutan otro ciclo. Se usa un diagrama de tiempo para desplegar gráficamente esta información. Por otro lado, los diagramas de tiempo sirven para estimar las magnitudes de la velocidad y aceleración de los eslabones seguidores. La velocidad de un eslabón es la razón de tiempo a la cual cambia su posición. La aceleración es la razón de tiempo a la cual su velocidad cambia y está directamente relacionada con las fuerzas requeridas para operar el mecanismo. El capítulo 6 proporciona una cobertura significativa del análisis de velocidad de los mecanismos; el capítulo 7 se enfoca en la aceleración de los mecanismos. Tanto la velocidad como la aceleración son cantidades vectoriales; no obstante, tan solo sus magnitudes, v y a, se utilizan en los diagramas de tiempo.

Los diagramas de tiempo que se usan para sincronizar el movimiento de mecanismos múltiples, por lo general suponen aceleración constante. Mientras que los valores de la aceleración real producida en el mecanismo podrían ser muy diferentes (como se verá en el capítulo 7), el supuesto de aceleración constante genera ecuaciones polinomiales de la velocidad y la posición en función del tiempo. El diagrama de tiempo implica la graficación de la magnitud de la velocidad de salida contra el tiempo. Suponiendo aceleración constante, la gráfica de veloci-

dad-tiempo muestra únicamente líneas rectas. El desplazamiento se relaciona con la velocidad máxima, la aceleración y el tiempo mediante las siguientes ecuaciones.

$$\Delta R = \frac{1}{2} v_{\text{pico}} \Delta t \qquad \textbf{(5.6)}$$

$$\Delta R = \frac{1}{4} a(\Delta t)^2 \qquad \textbf{(5.7)}$$

Para el escenario del movimiento de paquetes descrito anteriormente, se desea que el mecanismo de levantamiento se eleve 8.0 in en 1.5 s, que permanezca inmóvil por 1.0 s y que regrese en 1.0 s. El mecanismo de empuje debería permanecer inmóvil durante 1.5 s, empujar 6.0 in en 1.0 s y regresar en 1.0 s. Los diagramas de tiempo de ambos mecanismos se muestran en la figura 5.1. Las figuras indican que cuando un mecanismo se eleva (la velocidad aparece como un triángulo), el otro permanece inmóvil (sin velocidad). Además, mientras el segundo mecanismo empuja, el primero permanece inmóvil. Por lo tanto, la sincronización está comprobada; también la velocidad máxima y la aceleración se relacionan con el desplazamiento y el tiempo del movimiento, por lo que se reescriben las ecuaciones (5.6) y (5.7), respectivamente. Para el mecanismo elevador,

$$\text{Carrera de elevación: } v_{\text{pico}} = 2\frac{\Delta R}{\Delta t} = 2\frac{(8.0\text{ in})}{(1.5\text{ s})} = 10.67\text{ in/s}$$

$$a = 4\frac{\Delta R}{\Delta t^2} = 4\frac{(8.0\text{ in})}{(1.5\text{ s})^2} = 14.22\text{ in/s}^2$$

Con cálculos similares, la velocidad pico del retorno es −16.00 in/s y la aceleración es de −32.00 in/s^2. Para el mecanismo de empuje, la velocidad pico de la carrera de empuje es igual a 12.00 in/s, en tanto que la aceleración es igual a 24.00 in/s^2. Para el mecanismo de empuje, la velocidad pico del retorno es de −12.00 in/s y la aceleración es de −24.00 in/s^2.

Se observa que como la velocidad es la razón de tiempo del cambio de posición, los principios de cálculo indican que el desplazamiento del mecanismo es el área bajo la línea del diagrama *v-t*. Lo anterior se observa en la ecuación (5.6), donde el desplazamiento es el área del triángulo de velocidad: $1/2(v_{\text{pico}}\Delta t)$. En la figura 5.1 se identifica el desplazamiento de cada movimiento. Se debe hacer énfasis en que aun cuando la velocidad y la aceleración son estimaciones, son útiles en la etapa inicial de diseño, como se advierte en el siguiente problema de ejemplo.

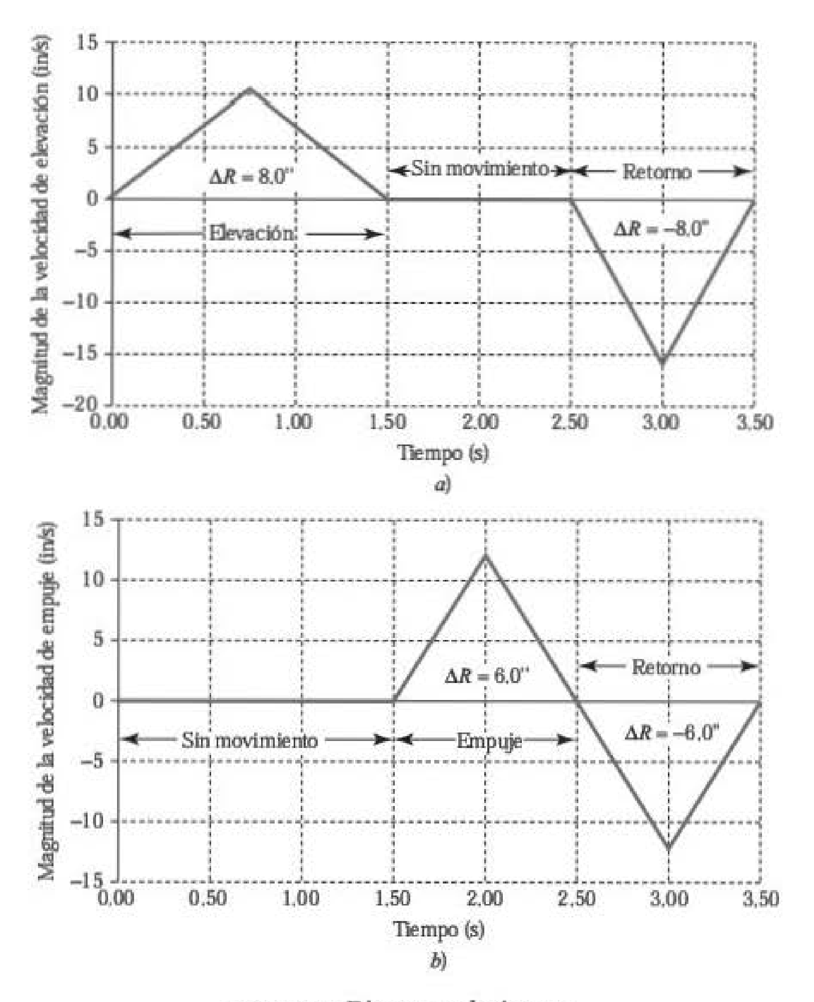


FIGURA 5.1 Diagramas de tiempo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 5.2

El proceso de inserción del mango de un cojinete requiere que una transportadora se mueva 8 in en 0.4 s y que se detenga mientras el cojinete se presiona hacia un alojamiento sobre la transportadora. El cojinete debe viajar 4 in para encontrar el alojamiento y, luego, se presiona 2.0 in hacia el alojamiento. La carrera de presión completa debería tomar 0.6 s y el retorno 0.4 s, mientras la transportadora está funcionando.

a) Determine la razón de tiempo, el tiempo del ciclo y la velocidad del motor del mecanismo de presión.

b) Elabore los diagramas de tiempo de sincronización.

c) Calcule la velocidad pico y la aceleración del alojamiento de la transportadora.

d) Determine la velocidad pico y la aceleración del movimiento de presión del cojinete.

e) Calcule la velocidad pico y la aceleración del retorno después de presionar el cojinete.

f) Optimice el movimiento de modo que la aceleración máxima de cualquier parte sea menor de $1g$ ($1g = 386.4$ in/s^2).

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la razón de tiempo, el tiempo del ciclo y la velocidad de la manivela***

La razón de tiempo se determina con la ecuación (5.1):

$$Q = \left(\frac{0.6 \text{ s}}{0.4 \text{ s}}\right) = 1.5$$

El tiempo total de la carrera de avance y el retorno se calculan como sigue:

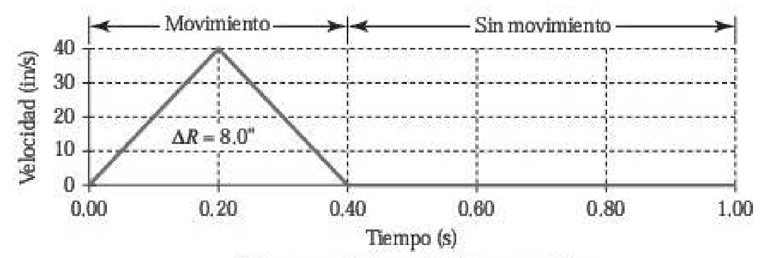
$$\Delta t_{\text{ciclo}} = 0.6 + 0.4 \text{ s/rev}$$

Como un ciclo de operación de la máquina requiere tanto la carrera de avance como el retorno, el tiempo para que la manivela complete una revolución es de 1.0 s. La velocidad requerida de la manivela se determina de la manera siguiente:

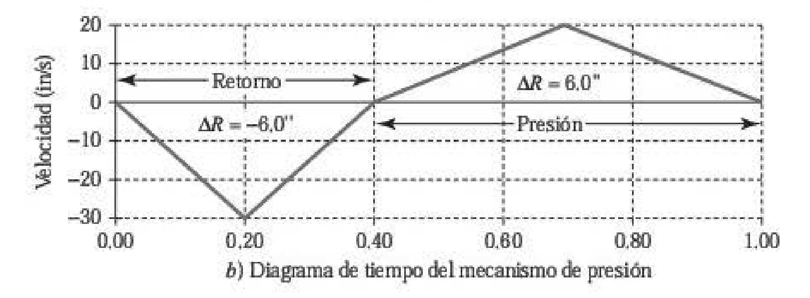
$$\begin{aligned}\omega_{\text{manivela}} &= \left(\Delta t_{\text{ciclo}}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{1.0 \text{ s/rev}} = 1.0 \text{ rev/s}\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) \\ &= 60.0 \text{ rev/min}\end{aligned}$$

2. ***Elabore los diagramas de tiempo***

Se construyeron los diagramas de tiempo que se muestran en la figura 5.2.



a) Diagrama de tiempo de la transportadora



b) Diagrama de tiempo del mecanismo de presión

FIGURA 5.2 Diagramas de tiempo del problema de ejemplo 5.2.

3. ***Calcule los parámetros de movimiento del alojamiento sobre la transportadora***

Las magnitudes estimadas de velocidad y aceleración del alojamiento sobre la transportadora son:

$$v_{\text{pico}} = 2\frac{\Delta R}{\Delta t_1} = 2\frac{(8.0\text{ in})}{(0.4\text{ s})} = 40.00\text{ in/s}$$

$$a = 4\frac{\Delta R}{\Delta t_1^2} = 4\frac{(8.0\text{ in})}{(0.4\text{ s})^2} = 200.00\text{ in/s}^2$$

4. ***Calcule los parámetros de movimiento de la carrera de retorno de presión sobre el cojinete***

Las magnitudes estimadas de velocidad y aceleración de la carrera de retorno de presión sobre el cojinete son:

$$v_{\text{pico}} = 2\frac{\Delta R}{\Delta t_1} = 2\frac{(-6.0\text{in})}{(0.4\text{ s})} = -30.00\text{ in/s}$$

$$a = 4\frac{\Delta R}{\Delta t_1^2} = 4\frac{(-6.0\text{ in})}{(0.4\text{ s})^2} = -150.00\text{ in/s}^2$$

5. ***Calcule los parámetros de movimiento de la carrera de trabajo de presión sobre el cojinete***

Las magnitudes estimadas de velocidad y aceleración de la carrera de trabajo de presión sobre el cojinete son:

$$v_{\text{pico}} = 2\frac{\Delta R}{\Delta t_2} = 2\frac{(6.0\text{in})}{(0.6\text{ s})} = 20.00\text{ in/s}$$

$$a = 4\frac{\Delta R}{\Delta t_2^2} = 4\frac{(6.0\text{in})}{(0.6\text{ s})^2} = 66.67\text{ in/s}^2$$

6. ***Optimice el movimiento***

La mayor magnitud de aceleración es de 200 in/s^2 = 200/386.4 = 0.517g, correspondiente al alojamiento del transportador. El movimiento se puede optimizar e incrementar la producción, sustituyendo a = 386.4 in/s^2 (1g) en la ecuación (5.7), para obtener un tiempo de movimiento menor en la transportadora.

$$\Delta t_1 = \sqrt{4\frac{\Delta R}{a}} = \sqrt{4\frac{(8.0\text{in})}{(386.4\text{ in/s}^2)}} = 0.288\text{ s}$$

Manteniendo igual la razón de tiempo, la carrera reducida de la presión sobre el soporte se determina replanteando la ecuación (5.1).

$$\Delta t_2 = Q\Delta t_1 = 1.5(0.288\text{ s}) = 0.432\text{ s}$$

La velocidad incrementada de la manivela se determina con la ecuación 5.5:

$$\omega_{\text{manivela}} = (0.288 + 0.432\text{ s})^{-1}$$

$$= \frac{1}{0.720\text{ s/rev}}$$

$$= 1.389\text{ rev/s}\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right) = 83.3\text{ rev/min}$$

Como la velocidad de producción está relacionada con la velocidad de la línea, la producción se incrementa 39% usando diagramas de tiempo y optimizando el movimiento, mientras se mantenga dentro de límites de aceleración aceptables.

5.4 DISEÑO DE MECANISMOS DE MANIVELA-CORREDERA

Muchas aplicaciones requieren una máquina con movimiento de deslizamiento lineal reciprocante de una componente. Los motores de gasolina y los compresores necesitan que un pistón se mueva una distancia precisa, llamada carrera, conforme la manivela gira en forma constante. Otras aplicaciones, como las máquinas de coser y las sierras de potencia para metal, requieren un movimiento lineal reciprocante similar. Esta es una forma de utilizar el mecanismo de manivela-corredera prácticamente en todas las aplicaciones.

5.4.1 Mecanismo de manivela-corredera en línea

Un mecanismo de manivela-corredera en línea tiene el pivote de la manivela en el mismo eje de deslizamiento del perno del pistón. En la figura 5.3 se ilustra un mecanismo de manivela-corredera en línea. La *carrera* $|\Delta \mathbf{R}_4|_{\text{máx}}$ se describe como la distancia lineal que recorre el eslabón que se desliza entre las posiciones extremas. Como el movimiento de la manivela (L_2) y el brazo conector (L_3) es simétrico en relación con el eje de deslizamiento, el ángulo de la manivela requerido para realizar la carrera de avance es el mismo que el requerido para el retorno. Por

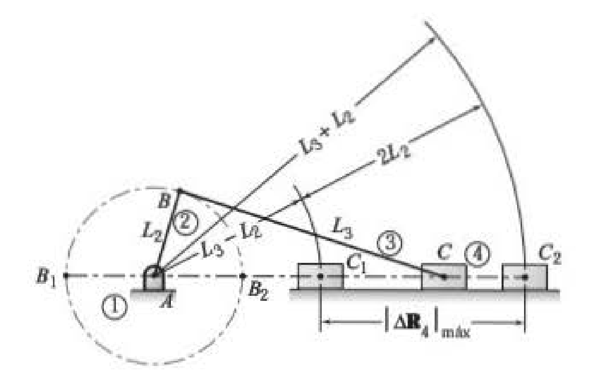


FIGURA 5.3 Mecanismo de manivela-corredera en línea.

tal razón, el mecanismo de manivela-corredera en línea produce un movimiento equilibrado. Si se supone que la manivela se impulsa con una fuente de velocidad constante, como un motor eléctrico, el tiempo transcurrido durante la carrera de avance es igual al tiempo de retorno.

El diseño de un mecanismo de manivela-corredera en línea implica la definición de la longitud adecuada de los dos eslabones, L_2 y L_3, para lograr la carrera deseada, $|\Delta R_4|_{máx}$. Como se observa en la figura 5.3, la carrera del mecanismo de manivela-corredera en línea es del doble de la longitud de la manivela, es decir, la distancia entre B_1 y B_2 es la misma que la distancia entre C_1 y C_2. Por lo tanto, la longitud de la manivela, L_2, en un mecanismo de manivela-corredera en línea se determina de la siguiente manera:

$$L_2 = \frac{|\Delta R_4|_{máx}}{2} \tag{5.8}$$

La longitud del brazo conector, L_3, no afecta la carrera de un mecanismo de manivela-corredera en línea. Sin embargo, un brazo conector pequeño produce mayores valores de aceleración. La figura 5.4 muestra el efecto de la longitud del brazo conector y la distancia del descentrado (si existe), sobre la aceleración máxima del eslabón deslizante. Estos datos indican claramente que la longitud del brazo conector debería ser tan grande como sea posible. (Observe que en una manivela-corredera en línea el valor del descentrado L_1 es igual a cero.) Como regla práctica general, el brazo conector debería ser por lo menos tres veces mayor que la longitud de la manivela. Se tiene que llevar a cabo un análisis detallado, como el que se presenta en el capítulo 7, para determinar las aceleraciones exactas de los eslabones y la resultante de las cargas inerciales.

5.4.2 Mecanismo de manivela-corredera descentrado

El mecanismo ilustrado en la figura 5.5a es un mecanismo de manivela-corredera descentrado, donde se introduce la distancia del descentrado. Este descentrado L_1 es la distancia entre el pivote de la manivela y el eje de deslizamiento. Con la presencia del descentrado, el movimiento de la manivela y el brazo conector deja de ser simétrico en relación con el eje de deslizamiento, de modo que el ángulo de la manivela requerido para efectuar la carrera de avance es diferente del ángulo de la manivela necesario para el retorno. Un mecanismo de manivela-corredera con descentrado produce un retorno rápido cuando se requiere un avance de trabajo más lento.

En la figura 5.5a, se observa que A, C_1 y C_2 no son colineales. Por consiguiente, la carrera de un mecanismo de manivela-corredera con descentrado siempre es mayor del doble de la longitud de la manivela. Conforme el descentrado se incrementa, la carrera se vuelve más grande. Si se examina la figura 5.5a, se verá que el rango posible del descentrado se expresa como:

$$L_1 < L_3 - L_2 \tag{5.9}$$

En la figura 5.5a se muestran las posiciones límite del eslabón deslizante, que se analizaron en el capítulo 4. El diseño de un mecanismo de manivela-corredera requiere el cálculo del descentrado (la distancia L_1) y las longitudes de los dos eslabones, L_2 y L_3, para obtener la carrera deseada $|\Delta R_4|_{máx}$ y el

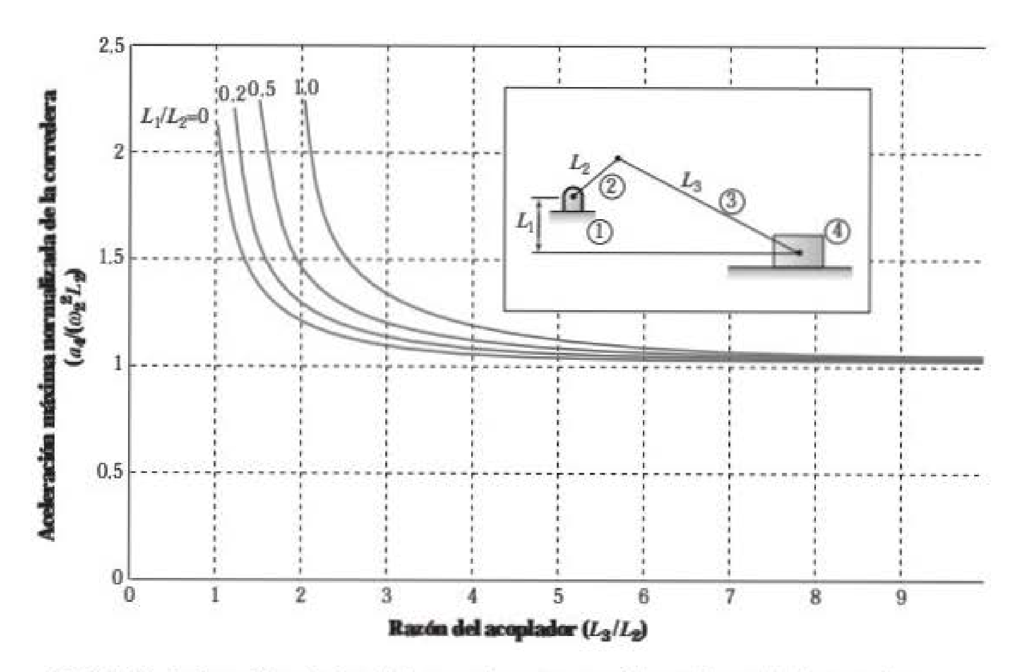
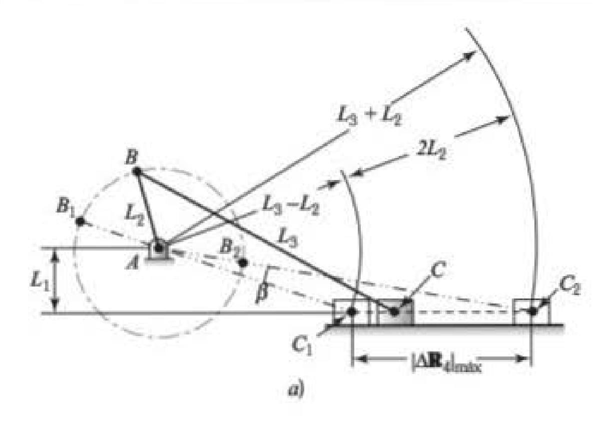
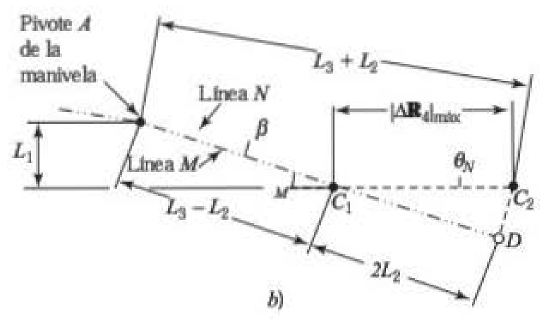


FIGURA 5.4 Aceleración máxima de la corredera en mecanismos de manivela-corredera.





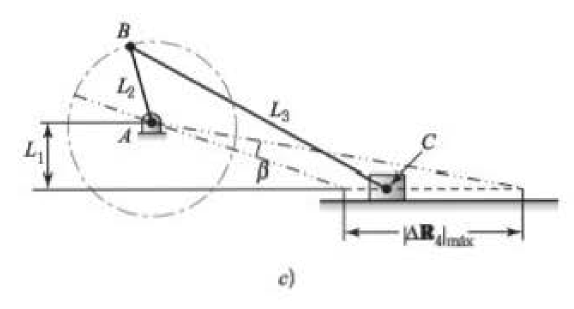


FIGURA 5.5 Mecanismo de manivela-corredera con descentrado.

ángulo de desequilibrio β. El procedimiento gráfico de síntesis de un mecanismo de manivela-corredera es el siguiente:

1. Localizar el eje de la unión de perno sobre el eslabón deslizante. Esta unión se identifica como el punto C en la figura 5.5a.
2. Dibujar las posiciones extremas del eslabón deslizante, separadas por la carrera $|\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}$.
3. Construir, en una de las posiciones extremas, una línea M *cualquiera* que pase por la unión de perno del eslabón deslizante, inclinada un ángulo θ_M. Este punto se identifica como C_1 en la figura 5.5b.
4. Dibujar, en la otra posición extrema, una línea N que pase a través de la unión de perno del eslabón deslizante, identificada como C_2 en la figura 5.5b, inclinada a un ángulo β en relación con la línea M. Observe que $\theta_N = \theta_M - \beta$.
5. La intersección de las líneas M y N define el punto pivote de la manivela, el punto A. El descentrado L_1 se obtiene a partir de la construcción con la escala adecuada (figura 5.5b).
6. En la construcción de las posiciones límite, se observa que la longitud entre C_1 y D es $2L_2$. Observe que el arco C_2D tiene su centro en el punto A. Como ambas líneas (M y N) son radios del mismo arco, el radio AC_2 es igual a las longitudes $AC_1 + C_1D$. Replanteando esta relación,

$$C_1D = AC_2 - AC_1$$

Sustituyendo y reagrupando, la longitud de la manivela L_2 de este mecanismo de manivela-corredera con descentrado se determina como

$$L_2 = \frac{1}{2}(AC_2 - AC_1) \tag{5.10}$$

7. En la construcción de las posiciones límite también se observa que

$$AC_1 = L_3 - L_2$$

Reagrupando, la longitud L_3 del acoplador para este mecanismo de manivela-corredera con descentrado es

$$L_3 = AC_1 + L_2 \tag{5.11}$$

En la figura 5.5c se muestra el mecanismo completo. Con el procedimiento de diseño implementado en un sistema de CAD, se obtienen resultados exactos.

Observe que es posible dibujar una línea M cualquiera a través del punto C_1 con un ángulo de inclinación arbitraria θ_M. Por lo tanto, se podría diseñar un número infinito de mecanismos funcionales. En general, el mecanismo que genera el brazo conector más grande tiene aceleraciones más bajas y, en consecuencia, menores fuerzas inerciales. La figura 5.4 sirve para determinar las repercusiones al usar un brazo conector corto. Como regla práctica general, el brazo conector debe ser por lo menos tres veces mayor que la longitud de la manivela. Se debe efectuar un análisis detallado de aceleración, como el que se realiza en el capítulo 7, para determinar las cargas inerciales intrínsecas.

Se dispone de métodos analíticos utilizando el triángulo de la figura 5.5b, para obtener expresiones para las longitudes L_1, L_2 y L_3, como una función de la carrera $|\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}$, el ángulo de desequilibrio β y la inclinación de la línea arbitraria M (θ_M).

$$L_1 = |\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}\left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_M)\operatorname{sen}(\theta_M - \beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}\right] \tag{5.12}$$

$$L_2 = |\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}\left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_M) - \operatorname{sen}(\theta_M - \beta)}{2\operatorname{sen}(\beta)}\right] \tag{5.13}$$

$$L_3 = |\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}\left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_M) + \operatorname{sen}(\theta_M - \beta)}{2\operatorname{sen}(\beta)}\right] \tag{5.14}$$

5.5 DISEÑO DE MECANISMOS DE MANIVELA-BALANCÍN

También se ha analizado en varias ocasiones el mecanismo de manivela-balancín. Es común en muchas aplicaciones donde se requieren oscilaciones repetitivas. La figura 5.6a muestra la geometría de un mecanismo de manivela-balancín. Semejante a la carrera de un mecanismo de manivela-corredera, el mecanismo de manivela-balancín tiene un *ángulo de desplazamiento* $(\Delta\theta_4)_{máx}$ (figura 5.6), a el cual se define como el ángulo entre las posiciones extremas del balancín.

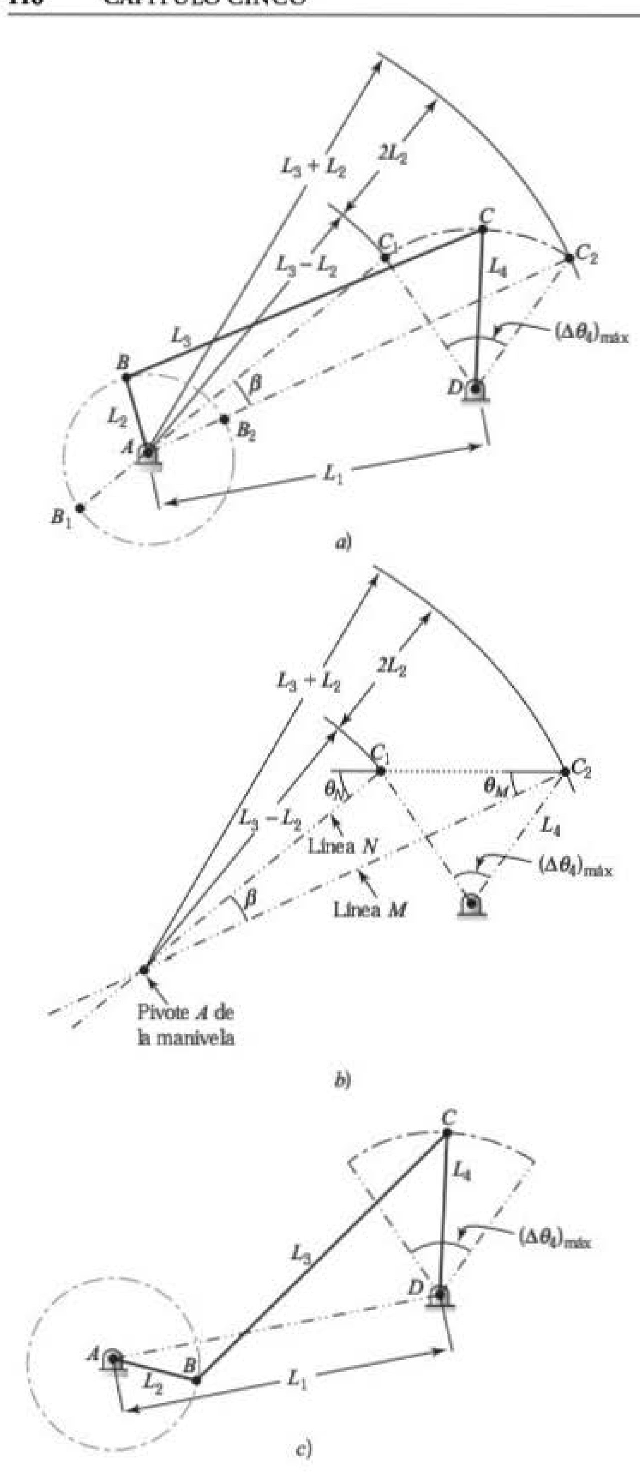


FIGURA 5.6 Mecanismo de manivela-balancín.

Al igual que el mecanismo de manivela-corredera con descentrado, el de manivela-balancín se utiliza como un mecanismo de retorno rápido. La razón de tiempo definida en las ecuaciones (5.1) y (5.2) se aplica del mismo modo en un mecanismo de manivela-balancín. El ángulo de desequilibrio β, de un mecanismo de manivela-balancín también se presenta en la figura 5.6a.

En la figura 5.6a se muestran las posiciones límite del mecanismo de manivela-balancín, las cuales se analizaron ampliamente en el capítulo 4. Observe que la longitud radial entre las dos posiciones extremas es del doble de la longitud de la manivela. Este conocimiento es importante cuando se diseña un mecanismo de manivela-balancín.

El diseño de un mecanismo de manivela-balancín implica la definición de las longitudes adecuadas de los cuatro eslabones para obtener el ángulo de desplazamiento deseado $(\Delta\theta_4)_{máx}$ y el ángulo de desequilibrio β. El procedimiento gráfico de la síntesis de un mecanismo de manivela-balancín es como sigue:

1. Ubicar el pivote D del balancín en la figura 5.6b.
2. Elegir una longitud posible L_4 *cualquiera* del balancín. La longitud generalmente está restringida por la tolerancia espacial del mecanismo.
3. Dibujar las dos posiciones del balancín, separadas por el ángulo de desplazamiento $(\Delta\theta_4)_{máx}$.
4. En una de las posiciones extremas, construir una línea M *cualquiera* a través del extremo del balancín, inclinada a un ángulo θ_M. Este punto se identifica como C_2 en la figura 5.6b.
5. En la otra posición extrema, dibujar una línea N a través del extremo del balancín, el cual está inclinado a un ángulo β en relación con la línea M. Observe que $\theta_N = \theta_M - \beta$.
6. La intersección de las líneas M y N define el punto pivote de la manivela, el punto A. La longitud L_1 entre los dos pivotes, L_1, se obtiene midiendo la construcción con la escala adecuada (figura 5.6c). En los casos donde se requiere un ritmo de balanceo equilibrado ($Q = 1$), las líneas M y N son colineales. Así, el punto pivote A de la manivela se ubica en cualquier parte a lo largo de las líneas M y N.
7. Al construir las posiciones límite, se observa que la longitud entre C_1 y E es $2L_2$. Observe que este arco C_2E tiene su centro en A. Como ambas líneas (M y N) son arcos del mismo radio, el radio AC_2 es igual a las longitudes $AC_1 + C_1E$. Reagrupando esta relación se tiene:

   $$C_1E = AC_2 - AC_1$$

   Al sustituir y reagrupar, la longitud de la manivela L_2 de este mecanismo de manivela-balancín se determina como

   $$L_2 = \frac{1}{2}(AC_2 - AC_1) \qquad \textbf{(5.15)}$$

8. A partir de la construcción de las posiciones límite, se observa que

   $$AC_1 = L_3 - L_2$$

   Reagrupando, la longitud L_3 del acoplador de este mecanismo de manivela-balancín es

   $$L_3 = AC_1 + L_2 \qquad \textbf{(5.16)}$$

En la figura 5.6c se ilustra el mecanismo completo. En el paso 4, la línea M se dibuja a través del punto C_2, con un ángulo de inclinación arbitraria θ_M. Por lo tanto, es posible diseñar un número infinito de mecanismos funcionales para obtener el ángulo de desplazamiento y la razón de tiempo deseados. Como en los mecanismos de manivela-corredera, los mecanismos de cuatro barras que incluyen acopladores más grandes tendrán aceleraciones menores y, en consecuencia, fuerzas inerciales más bajas.

Una medida adicional de la "calidad" de un mecanismo de cuatro barras es el *ángulo de transmisión* γ, que es el ángulo entre el acoplador y el balancín, como se ilustra en la figura 5.6c. Una función común en un mecanismo de cuatro barras es convertir

el movimiento giratorio en oscilatorio. En tales aplicaciones, con frecuencia es necesario transmitir grandes fuerzas. En situaciones así, el ángulo de transmisión es de vital importancia. Cuando el ángulo de transmisión es pequeño, se requieren fuerzas grandes para impulsar el brazo del balancín. Para obtener los mejores resultados, el ángulo de transmisión debería estar lo más cerca posible de 90° durante el giro completo de la manivela. Así se reducirá la flexión en los eslabones y producirá las condiciones más favorables de transmisión de la fuerza. Los valores extremos del ángulo de transmisión se presentan cuando la manivela se encuentra a lo largo de la línea de la bancada. Una regla práctica común es que no se debería utilizar un mecanismo de cuatro barras cuando el ángulo de transmisión está fuera de los límites de 45° y 135°. Se recomienda usar el análisis de fuerza que se presenta en los capítulos 13 y 14, para determinar el efecto del ángulo de transmisión real obtenido.

En ciertos casos, la longitud de un eslabón debe tener una dimensión específica. Es muy común que se especifique una longitud meta (L_1) de la bancada. Sin embargo, tan solo la longitud (L_4) del balancín está especificada directamente en el procedimiento que se acaba de describir. Como el mecanismo de cuatro barras se diseñó para obtener resultados angulares específicos, la longitud de todos los eslabones se debe medir con la escala adecuada para lograr la dimensión deseada del eslabón y mantener el objetivo de diseño. Todos los sistemas de CAD tienen la capacidad de aplicar la escala adecuada a la geometría construida de la figura 5.6b.

Se deben agregar métodos analíticos para analizar los triángulos de la figura 5.6b y obtener expresiones para las longitudes de los eslabones L_2, L_3 y L_4 en función del desplazamiento $(\Delta\theta_4)_{máx}$, de la longitud (L_1) de la bancada, del ángulo de desequilibrio β y de la inclinación θ_M de la línea arbitraria M.

$$L_4 = \frac{L_1 \text{sen}\,\beta}{\sqrt{\kappa}} \quad \textbf{(5.17)}$$

Donde:

$$\kappa = \text{sen}^2\beta + 4\,\text{sen}^2\big((\Delta\theta_4)_{máx}/2\big)\text{sen}^2(\theta_M + \beta)$$

$$- \; 4\text{sen}\beta\text{sen}\big((\Delta\theta_4)_{máx}/2\big)\text{sen}(\theta_M + \beta)$$
$$\text{sen}\big((\Delta\theta_4)_{máx}/2 + \theta_M\big)\big)$$

$$L_3 = \frac{L_4\,\text{sen}\big((\Delta\theta_4)_{máx}/2\big)}{\text{sen}\,\beta}\big[\text{sen}\,\theta_M + \text{sen}(\theta_M + \beta)\big] \quad \textbf{(5.18)}$$

$$L_2 = L_3 - \frac{2\,L_4\text{sen}\big((\Delta\theta_4)_{máx}/2\big)\,\text{sen}\,\theta_M}{\text{sen}\beta} \quad \textbf{(5.19)}$$

5.6 DISEÑO DE MECANSMOS DE MANIVELA-CEPILLO

En la figura 5.7 se muestra un mecanismo de manivela-cepillo que tiene la capacidad para razones de tiempo más altas. Se le llama así por su uso en máquinas cepilladoras limadoras de metal, donde una carrera de corte lento va seguida por un retorno rápido cuando no se efectúa trabajo. El diseño de un mecanismo de manivela-cepillo implica la obtención de la longitud adecuada de los tres eslabones principales (L_1, L_2 y L_3)

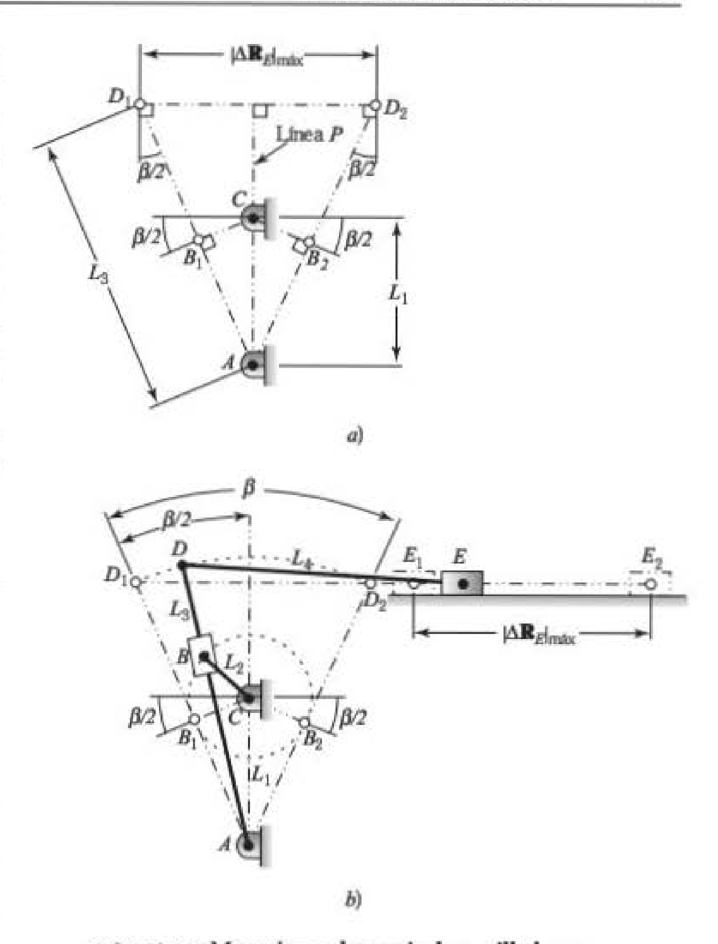


FIGURA 5.7 Mecanismo de manivela-cepilladora.

para lograr la carrera deseada $|\Delta R_E|_{máx}$. El procedimiento gráfico de síntesis de un mecanismo de manivela-cepillo es como sigue:

1. Construir una línea cuya longitud sea igual a la carrera $|\Delta R_E|_{máx}$ deseada. Los puntos extremos se identifican como D_1 y D_2, como se indica en la figura 5.7a.
2. Construir una línea inclinada a partir de D_1 y otra a partir de D_2 con un ángulo igual a $\beta/2$ como en la figura 5.7a.
3. La intersección de las dos líneas inclinadas ubica el pivote del balancín, el punto A en la figura 5.7a. La línea entre los puntos A y D_1 o entre A y D_2 representa el balancín y se designa como L_3.
4. Dibujar una línea perpendicular a la línea D_1D_2 a través de A. Esta línea se identifica como la línea P en la figura 5.7a.
5. El pivote de la manivela, el punto C, se ubica en cualquier lugar de la línea P. La distancia entre los puntos A y C representa la bancada y se designa como L_1.
6. Dibujar una línea perpendicular a la línea AD_1 a través del punto C. La intersección se designa como B_1 (figura 5.5a). La línea B_1C representa la manivela y se designa como L_2. De manera similar, se dibuja una línea perpendicular a la línea AD_2 a través del punto C. La intersección se designa como B_2.
7. La longitud de L_4, como se indica en la figura 5.7b, se hace igual a un valor adecuado para que se ajuste a la aplicación. Como en los mecanismos de manivela-corredera, las longitudes más grandes reducirán las aceleraciones máximas.

Observe que el pivote de la manivela, el punto C, se ubica a lo largo de la línea P, de modo que es posible diseñar un número infinito de mecanismos funcionales. Una L_1 más grande producirá una manivela L_2 más grande, la cual presentará menos fuerza en la unión B, aunque mayores velocidades de deslizamiento. Es común colocar y seleccionar el punto C cerca de la mitad de la línea P.

Se pueden agregar métodos analíticos para analizar el triángulo de la figura 5.7a, al generar expresiones para las longitudes de los eslabones L_2 y L_3 en función de la carrera $|\Delta \mathbf{R}_E|_{máx}$, el ángulo de desequilibrio β y la longitud L_1 de la bancada seleccionada. Como se mencionó, L_4 debería ser tan grande como lo permita la aplicación.

$$L_3 = \frac{|\Delta \mathbf{R}_E|_{máx}}{2\,\mathrm{sen}(\beta/2)} \tag{5.20}$$

$$L_2 = L_1\,\mathrm{sen}(\beta/2) \tag{5.21}$$

5.7 MECANISMO PARA MOVER UN ESLABÓN ENTRE DOS POSICIONES

En las máquinas que manipulan materiales, resulta común tener un eslabón que se mueve de una posición cualquiera a otra. Cuando se especifican dos posiciones para un eslabón, los problemas de diseño que se generan se conocen como *síntesis de dos posiciones*. La tarea se realiza girando un eslabón alrededor de un punto pivote único, o bien, usando el acoplador de un mecanismo de cuatro barras.

5.7.1 Síntesis de dos posiciones con un eslabón que pivota

La figura 5.8a ilustra dos puntos, A y B, que se encuentran sobre un eslabón común y se mueven de A_1B_1 a A_2B_2. Se podría diseñar un solo eslabón para generar este desplazamiento. El problema se reduce a la obtención del punto pivote de este eslabón y al ángulo que debe girar para obtener el desplazamiento deseado.

El procedimiento gráfico de síntesis para diseñar un eslabón que pivota para alcanzar dos posiciones es el siguiente:

1. Construir dos líneas que conecten respectivamente A_1 con A_2 y B_1 con B_2.
2. Construir una bisectriz perpendicular a A_1A_2.
3. Construir una bisectriz perpendicular a B_1B_2.
4. La intersección de estas dos bisectrices es la ubicación que se requiere para el pivote del eslabón, que se identifica como el punto C en la figura 5.8b. El centro de giro entre las dos posiciones requeridas se conoce como *polo de desplazamiento*. El punto C es el polo de desplazamiento de las posiciones 1 y 2.
5. El ángulo entre el punto pivote C, A_1 y A_2 es el ángulo requerido que el eslabón debe girar para producir el desplazamiento deseado. Este ángulo se identifica como $\Delta\theta$ en la figura 5.8c. Se diseña en seguida un eslabonamiento del tipo manivela-balancín para obtener este movimiento giratorio, si se desea impulsar el mecanismo con el giro continuo de una manivela.

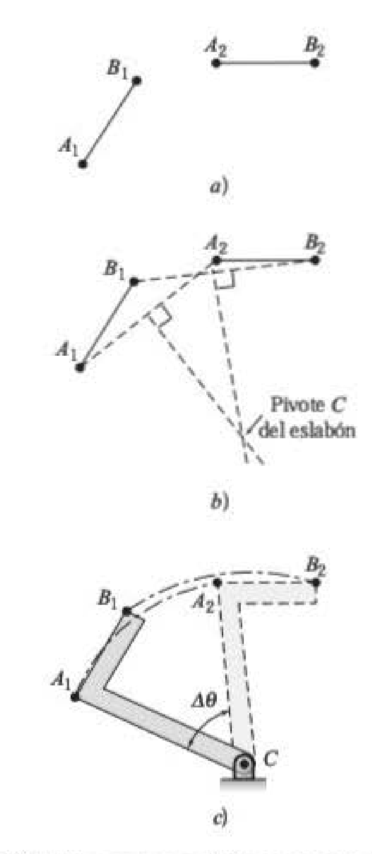


FIGURA 5.8 Síntesis para dos posiciones con un eslabón que pivota.

5.7.2 Síntesis de dos posiciones con un acoplador de un mecanismo de cuatro barras

La figura 5.9a muestra dos puntos, A y B, en un problema idéntico al presentado en la sección anterior, que se deben situar sobre un eslabón y moverse de A_1B_1 a A_2B_2. En algunas aplicaciones quizá sea imposible usar un solo eslabón con un pivote, por ejemplo cuando el punto pivote es inaccesible. En tales casos, se puede diseñar un acoplador de un mecanismo de cuatro barras y producir así el desplazamiento requerido. Se deben determinar las longitudes correctas de los cuatro eslabones y la ubicación de los puntos pivote, de modo que el acoplador logre el desplazamiento deseado.

El procedimiento gráfico para diseñar un mecanismo de cuatro barras para la síntesis de dos posiciones es como sigue:

1. Construir dos líneas que conecten A_1 con A_2 y B_1 con B_2, respectivamente.
2. Construir una bisectriz perpendicular a A_1A_2.
3. Construir una bisectriz perpendicular a B_1B_2.
4. Los puntos pivote de los eslabones de entrada y salida se ubican en cualquier lugar de la bisectriz perpendicular correspondiente. Estos puntos pivote se indican como los puntos C y D en la figura 5.9b.
5. La longitud de los dos eslabones que pivotan se determina midiendo las longitudes A_1C y B_1D con la escala adecuada (figura 5.9c).

En la figura 5.9c se ilustra el mecanismo completo. Como los puntos pivote C y D se pueden ubicar en cualquier lugar a lo

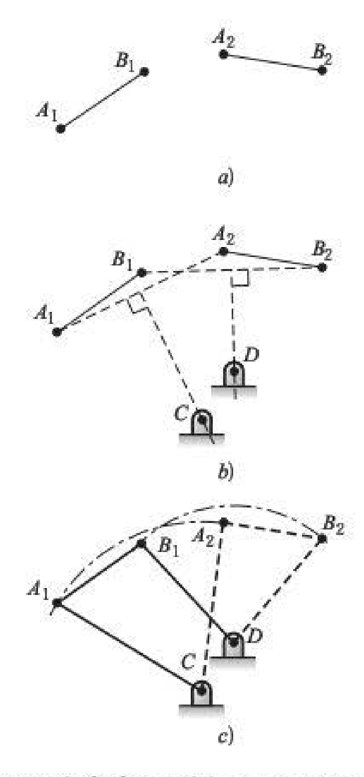


FIGURA 5.9 Síntesis de dos posiciones con un acoplador.

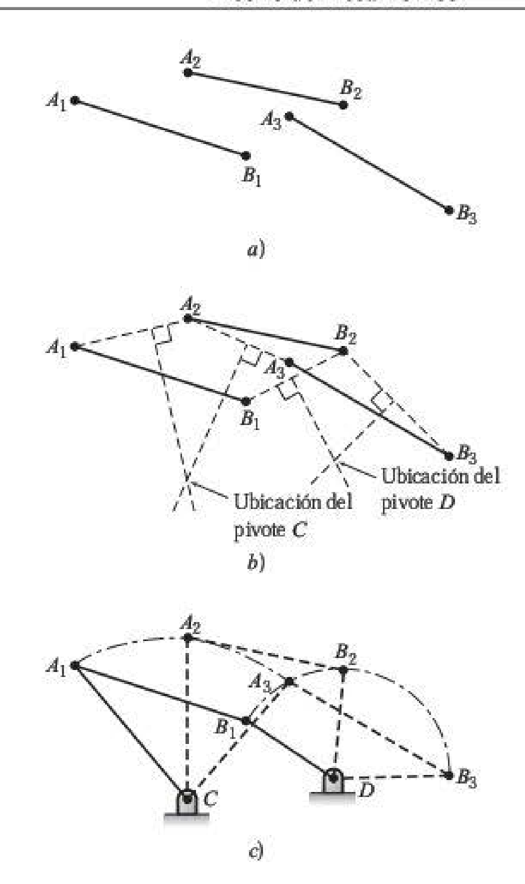


FIGURA 5.10 Síntesis de tres posiciones con un acoplador.

largo de las bisectrices perpendiculares, es posible diseñar un número infinito de mecanismos para realizar el desplazamiento deseado. Advierta que los eslabones más grandes que pivotan giran a ángulos más pequeños para mover el acoplador entre las dos posiciones deseadas. Esto produce mayores ángulos de transmisión y reduce la fuerza requerida para impulsar el eslabonamiento. Un sistema de CAD produce resultados exactos.

5.8 MECANISMO PARA MOVER UN ESLABÓN ENTRE TRES POSICIONES

En algunas máquinas que manipulan materiales, se desea mover un eslabón entre tres posiciones. Cuando se especifican tres posiciones para un eslabón, los problemas de diseño que se generan se conocen como *síntesis de tres posiciones*. Generalmente no es posible utilizar un solo eslabón que pivote en la síntesis de tres posiciones. Esta tarea se realiza con el acoplador de un mecanismo de cuatro barras.

La figura 5.10a muestra dos puntos, A y B, que permanecen sobre un eslabón y se mueven de A_1B_1 a A_2B_2 y a A_3B_3. Se deben determinar las longitudes adecuadas de los cuatro eslabones y la ubicación de los puntos pivote, de modo que el acoplador produzca el desplazamiento deseado.

El procedimiento gráfico para diseñar un mecanismo de cuatro barras para la síntesis de tres puntos es como sigue:

1. Construir cuatro líneas que unan A_1 con A_2, B_1 con B_2, A_2 con A_3 y B_2 con B_3.
2. Construir una bisectriz perpendicular a A_1A_2, una bisectriz perpendicular a B_1B_2, una bisectriz perpendicular a A_2A_3 y una bisectriz perpendicular a B_2B_3.
3. La intersección de la bisectriz perpendicular a A_1A_2 y la bisectriz perpendicular a A_2A_3 ubica un punto pivote, el cual se muestra como el punto C en la figura 5.10b.
4. La intersección de la bisectriz perpendicular a B_1B_2 y la bisectriz perpendicular a B_2B_3 ubica el otro punto pivote. Este se muestra como el punto D en la figura 5.10b.
5. La longitud de los dos eslabones que pivotan se determina midiendo las longitudes A_1C y B_1D con la escala adecuada, como se indica en la figura 5.7c.

El eslabonamiento completo se ilustra en la figura 5.10c. Otra vez, un sistema de CAD produce resultados exactos.

5.9 DEFECTOS DE CIRCUITO Y DE RAMIFICACIÓN

Como se vio en el capítulo 4, los circuitos de ensamble son todas las configuraciones posibles que pueden producir los eslabones de un mecanismo sin desarmar las uniones. La figura 4.24 presenta dos circuitos de ensamble para un mecanismo de cuatro barras. Cuando se sigue el procedimiento de las secciones 5.5 y 5.6, es posible que una posición se encuentre en un circuito de ensamble diferente, como las demás posiciones. Esto se conoce como *defecto de circuito*, lo cual es un error grave en el diseño de un mecanismo. Una vez que se sintetiza un mecanismo de cuatro barras, se debería efectuar un análisis de posición para verificar que la posición meta se logre a partir de la configuración inicial sin desarmar las uniones.

Ocurre un *defecto de ramificación* cuando el mecanismo alcanza una posición de bloqueo entre posiciones meta. A diferencia del defecto de circuito, un defecto de ramificación depende de la selección del eslabón impulsor. En una configuración de bloqueo, el mecanismo se bloquea y el eslabón impulsor es incapaz de actuar. El defecto de ramificación quizá no sea un error grave en el diseño, si un eslabón alterno se activa para impulsar el mecanismo entre las posiciones meta.

PROBLEMAS

Cálculo de razones de tiempo

En los problemas 5-1 a 5-3 se va a diseñar un mecanismo de retorno rápido, donde la carrera de avance toma un tiempo t_1 y el retorno consume un tiempo t_2. Determine la razón de tiempo, el ángulo de desequilibrio y la velocidad a la cual debería impulsarse el mecanismo.

5–1. $t_1 = 1.1\,\text{s}; t_2 = 0.8\,\text{s}.$

5–2. $t_1 = 0.35\,\text{s}; t_2 = 0.20\,\text{s}.$

5–3. $t_1 = 0.041\,\text{s}; t_2 = 0.027\,\text{s}.$

En los problemas 5-4 a 5-6, un mecanismo de retorno rápido se impulsa a ω rpm y tiene un ángulo de desequilibrio β. Determine la razón de tiempo y el tiempo para completar las carreras de avance y de retorno.

5–4. $\omega = 180\,\text{rpm}; \beta = 25°.$

5–5. $\omega = 75\,\text{rpm}; \beta = 37°.$

5–6. $\omega = 500\,\text{rpm}; \beta = 20°.$

Diagramas de tiempo

5-7. Una sierra reciprocante necesita mover su hoja 0.75 in hacia abajo en 0.10 s y lograr su retorno en 0.08 s. Determine la razón de tiempo y la velocidad de la manivela. Asimismo, elabore el diagrama de tiempo, luego calcule la velocidad y la aceleración pico del movimiento.

5-8. Una prensa troqueladora necesita mover un troquel 1.5 in hacia abajo en 0.60 s y su retorno en 0.35 s. Determine la razón de tiempo y la velocidad de la manivela. Asimismo, elabore el diagrama de tiempo, luego calcule la velocidad y la aceleración pico del movimiento.

5-9. Un proceso requiere una transportadora para mover paquetes 6.0 in en 0.6 s y que se detenga mientras se aplica un sello al paquete. La cabeza del sello debe recorrer 8.0 in para hacer contacto con el paquete. La carrera completa del sello debería durar 0.8 s. Determine la razón de tiempo y la velocidad de la manivela del mecanismo. Asimismo, elabore los diagramas de sincronización de tiempo, luego calcule la velocidad y la aceleración pico de los diferentes elementos móviles.

5-10. Un proceso requiere una transportadora para mover latas 2.0 in en 0.12 s y que el movimiento se detenga mientras se aplica una tapa a presión sobre la lata. La tapa debe recorrer 3.0 in para llegar a la lata. La carrera completa de la tapa debería durar 0.25 s. Determine la razón de tiempo y la velocidad de la manivela del mecanismo. Asimismo, elabore los diagramas de sincronización de tiempo, luego calcule la velocidad y la aceleración pico de los diferentes elementos móviles.

Diseño de mecanismos de manivela-corredera

En los problemas 5-11 a 5-18, diseñe un mecanismo de manivela-corredera con una razón de tiempo Q, una carrera $|\Delta \mathbf{R}_4|_{máx}$ y un tiempo por ciclo t. Use el método gráfico o el método analítico. Especifique las longitudes de los eslabones L_2, L_3, el descentrado L_1 (si existe) y la velocidad de la manivela.

5–11. $Q = 1; |\Delta R_4|_{máx} = 2\,\text{in}; t = 1.2\,\text{s}$

5–12. $Q = 1; |\Delta R_4|_{máx} = 8\,\text{mm}; t = 0.08\,\text{s}$

5–13. $Q = 1; |\Delta R_4|_{máx} = 0.9\,\text{mm}; t = 0.4\,\text{s}$

5–14. $Q = 1.25; |\Delta R_4|_{máx} = 2.75\,\text{in}; t = 0.6\,\text{s}$

5–15. $Q = 1.37; |\Delta R_4|_{máx} = 46\,\text{mm}; t = 3.4\,\text{s}$

5–16. $Q = 1.15; |\Delta R_4|_{máx} = 1.2\,\text{in}; t = 0.014\,\text{s}$

5–17. $Q = 1.20; |\Delta R_4|_{máx} = 0.375\,\text{in}; t = 0.025\,\text{s}$

5–18. $Q = 1.10; |\Delta R_4|_{máx} = 0.625\,\text{in}; t = 0.033\,\text{s}$

Diseño de mecanismos de manivela-balancín

En los problemas 5-19 a 5-28, diseñe un mecanismo de manivela-balancín con una razón de tiempo Q, una ángulo de desplazamiento $(\Delta\theta_4)_{máx}$ y un tiempo por ciclo t. Use el método gráfico o el método analítico. Especifique las longitudes de los eslabones L_1, L_2, L_3, L_4 y la velocidad de la manivela.

5–19. $Q = 1; (\Delta\theta_4)_{máx} = 78°; t = 1.2\,\text{s}$

5–20. $Q = 1; (\Delta\theta_4)_{máx} = 100°; t = 3.5\,\text{s}$

5–21. $Q = 1.15; (\Delta\theta_4)_{máx} = 55°; t = 0.45\,\text{s}$

5–22. $Q = 1.24; (\Delta\theta_4)_{máx} = 85°; t = 1.8\,\text{s}$

5–23. $Q = 1.36; (\Delta\theta_4)_{máx} = 45°; t = 1.2\,\text{s}$

5–24. $Q = 1.20; (\Delta\theta_4)_{máx} = 96°; t = 0.3\,\text{s}$

5–25. $Q = 1.18; (\Delta\theta_4)_{máx} = 72°; t = 0.08\,\text{s}; L_1 = 8.0\,\text{in}$

5–26. $Q = 1.10; (\Delta\theta_4)_{máx} = 115°; t = 0.2\,\text{s}; L_1 = 6.5\,\text{in}$

5–27. $Q = 1.22; (\Delta\theta_4)_{máx} = 88°; t = 0.75\,\text{s}; L_1 = 8.0\,\text{in}$

5–28. $Q = 1.08; (\Delta\theta_4)_{máx} = 105°; t = 1.50\,\text{s};$
$L_1 = 100.0\,\text{mm}$

Diseño de mecanismos de manivela-cepillo

En los problemas 5-29 a 5-32, diseñe un mecanismo de manivela-cepillo con una razón de tiempo Q, una carrera $|\Delta \mathbf{R}_E|_{max}$ y un tiempo por ciclo t. Use el método gráfico o el método analítico. Especifique las longitudes de los eslabones L_1, L_2, L_3, L_4 y la velocidad de la manivela.

5–29. $Q = 1.50; |\Delta R_E|_{máx} = 2.75\,\text{in}; t = 0.6\,\text{s}$

5–30. $Q = 1.75; |\Delta R_E|_{máx} = 46\,\text{mm}; t = 3.4\,\text{s}$

5–31. $Q = 2.00; |\Delta R_E|_{máx} = 0.375\,\text{in}; t = 0.014\,\text{s}$

5–32. $Q = 1.80; |\Delta R_E|_{máx} = 1.2\,\text{in}; t = 0.25\,\text{s}$

Síntesis de dos posiciones, pivote único

En los problemas 5-33 a 5-36, un eslabón que contiene los puntos A y B debe suponer las posiciones listadas en la tabla de cada problema. Determine gráficamente la ubicación de un pivote fijo, para un solo eslabón que pivota y permita el movimiento listado. Determine también los grados que debe girar el eslabón para moverse de la posición 1 a la posición 2.

5–33.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	0.0000	9.0000	5.0000	9.0000
Posición 2	6.3600	6.3600	9.9005	2.8295

5–34.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	2.2800	5.3400	6.8474	7.3744
Posición 2	9.7400	8.5000	12.5042	4.336

5–35.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	−53.000	41.000	75.205	19.469
Posición 2	−36.000	40.000	87.770	−8.112

5–36.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	25.507	47.312	83.000	11.000
Posición 2	97.000	30.000	150.676	71.748

Síntesis de dos posiciones, dos pivotes

En los problemas 5–37 a 5–40, un eslabón que contiene los puntos *A* y *B* debe suponer las posiciones listadas en la tabla de cada problema. Determine gráficamente la ubicación de dos pivotes fijos y las longitudes de los cuatro eslabones del mecanismo con un acoplador que tenga el movimiento listado. Determine también la cantidad que deben girar los eslabones que pivotan para mover el acoplador de la posición 1 a la posición 2.

5–37.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	−0.3536	4.8501	4.4000	3.3000
Posición 2	−3.1000	3.2000	1.5562	5.0220

5–38.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	0.9000	4.5000	9.0380	7.7150
Posiición 2	−1.0000	5.6000	5.5727	11.3760

5–39.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	−40.000	−60.000	28.936	−30.456
Posición 2	−65.350	−26.352	8.000	−42.000

5–40.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	−37.261	−2.041	−18.000	1.000
Posición 2	−18.000	−3.000	0.858	−7.963

Síntesis de tres posiciones

En los problemas 5–41 a 5–44, un eslabón que contiene los puntos *A* y *B* debe suponer las tres posiciones listadas en la tabla de cada problema. Determine gráficamente la ubicación de dos pivotes fijos y las longitudes de los cuatro eslabones del mecanismo con un acoplador que tenga el movimiento listado. Determine también la cantidad que deben girar los eslabones que pivotan para mover el acoplador de la posición 1 a la posición 2 y, luego, de la posición 2 a la posición 3.

5–41.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	−1.0000	−0.9000	5.2862	−1.7980
Posición 2	−2.7000	−1.3000	3.6428	−0.9980
Posición 3	−4.4000	−2.0000	1.7719	−0.5068

5–42.

Coordenadas:	A_x (in)	A_y (in)	B_x (in)	B_y (in)
Posición 1	−5.5000	−0.1000	7.9836	5.2331
Posición 2	−2.4000	0.5000	12.0831	1.1992
Posición 3	−0.6000	1.6000	13.6483	−1.0902

5–43.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	0.000	40.000	54.774	44.980
Posición 2	21.000	51.000	72.204	30.920
Posición 3	39.000	49.000	82.143	14.887

5–44.

Coordenadas:	A_x (mm)	A_y (mm)	B_x (mm)	B_y (mm)
Posición 1	43.000	−76.000	149.890	−50.027
Posición 2	3.000	−52.000	111.127	−72.211
Posición 3	−12.000	−33.000	91.840	−69.294

ESTUDIOS DE CASO

5–1. La figura E5.1 presenta un mecanismo que impulsa el bloque *I* deslizante, el cual a su vez mueve la cuchilla de una sierra de potencia para metales. Examine cuidadosamente la configuración de las componentes del mecanismo. Luego, conteste las preguntas siguientes para obtener una mayor comprensión acerca de la operación del mecanismo.

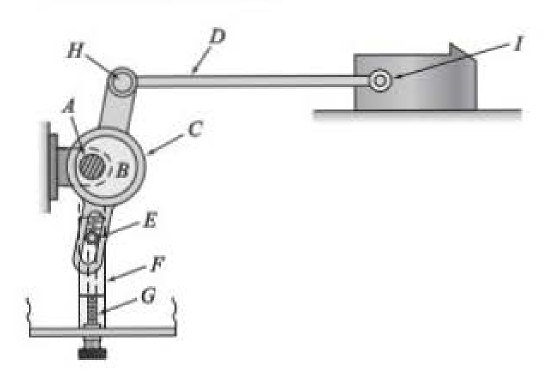


FIGURA E5.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme la manivela *A* gira 90° en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del lóbulo *B* que está sujeto a la manivela *A*?

2. Conforme la manivela *A* gira 90º en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del eslabón *C*?
3. ¿Se necesita una ranura en el rodillo *E*?
4. Conforme la manivela *A* gira 90º en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del perno *H*?
5. Conforme la manivela *A* gira 90º en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del perno *I*?
6. Determine la movilidad de este mecanismo.
7. Conforme la cuerda *G* gira para jalar al rodillo *E* hacia abajo, ¿cómo modifica eso el movimiento del eslabón *C*?
8. Conforme la cuerda *G* gira para jalar al rodillo *E* hacia abajo, ¿cómo modifica eso el movimiento del eslabón *H*?
9. ¿Cuál es el objetivo de este mecanismo?

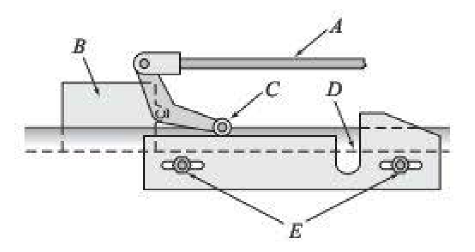


FIGURA E5.2 (Cortesía de Industrial, Press).

5–2. La figura E5.2 ilustra un mecanismo que también impulsa un bloque *B* deslizante. Este bloque, a la vez, impulsa una herramienta de corte. Examine cuidadosamente la configuración de las componentes del mecanismo. Luego, conteste las siguientes preguntas para obtener una mayor comprensión sobre la operación del mecanismo.

1. Conforme la varilla *A* se mueve hacia la derecha, ¿cuál es el movimiento del bloque *B* deslizante?
2. Describa el movimiento del bloque *B* deslizante cuando el rodillo *C* llega a la ranura *D*.
3. Describa el movimiento del bloque *B* deslizante conforme la varilla *A* se mueve a la izquierda, llevando a *C* fuera de la ranura *D*.
4. Describa el movimiento continuo del bloque que *B* deslizante conforme la varilla *A* oscila horizontalmente.
5. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?
6. Describa un dispositivo que impulse la varilla *A* hacia la izquierda y hacia la derecha.
7. ¿Qué característica dan al mecanismo las ranuras de ajuste en *E*?

ANÁLISIS DE VELOCIDAD

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Definir velocidades lineales, de giro y relativa.**
2. **Convertir velocidades lineales a velocidades angulares y viceversa.**
3. **Utilizar el método de velocidad relativa para obtener gráficamente la velocidad de un punto sobre un eslabón, conociendo la velocidad de otro punto sobre el mismo eslabón.**
4. **Usar el método de velocidad relativa para determinar, gráfica y analíticamente, la velocidad de un punto de interés sobre un eslabón flotante.**
5. **Utilizar el método de velocidad relativa para obtener analíticamente la velocidad de un punto sobre un eslabón, conociendo la velocidad de otro punto sobre ese mismo eslabón.**
6. **Usar el método del centro instantáneo para determinar gráfica y analíticamente la velocidad de un punto.**
7. **Construir una curva de velocidad para localizar los valores extremos de velocidad.**

6.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de velocidad implica calcular "qué tan rápido" viajan ciertos puntos sobre los eslabones de un mecanismo. La velocidad es importante porque asocia el movimiento de un punto sobre un mecanismo con el tiempo. Con frecuencia, la sincronización es crítica en una máquina.

Por ejemplo, el mecanismo que "jala" la película de video a través de un proyector de cine debe avanzar la película a una velocidad de 30 cuadros por segundo. El mecanismo que alimenta material de paquetería en una caja de embalaje tiene que operar en tándem con la transportadora que mueve las cajas de embalaje. El mecanismo de un limpiador de parabrisas que funciona a alta velocidad debería arrastrar el limpiador sobre el cristal por lo menos 45 veces por minuto.

La determinación de la velocidad en un eslabonamiento es el objetivo de este capítulo. Se examinarán dos procedimientos de análisis comunes: el método de la velocidad relativa y el método del centro instantáneo. En congruencia con otros capítulos de este libro, se incluyen tanto técnicas gráficas como analíticas.

6.2 VELOCIDAD LINEAL

La *velocidad lineal* **V** de un punto es el desplazamiento lineal de ese punto por unidad de tiempo. Recuerde que el desplazamiento lineal $\Delta\mathbf{R}$ de un punto es un vector, que se definió como el cambio en la posición de ese punto. Su concepto se introdujo en la sección 4.3.

Como se describió en el capítulo 4, el desplazamiento de un punto se considera una traslación, lo cual ya se analizó en términos lineales. Por definición, un punto únicamente puede tener desplazamiento lineal. Cuando se considera el tiempo transcurrido durante un desplazamiento, es posible determinar la velocidad.

Como el desplazamiento, la velocidad también es un vector. Recuerde que los vectores se representan con caracteres alfabéticos en negritas. A la magnitud de la velocidad se le denomina con frecuencia "rapidez" y se representa como $v = |\mathbf{V}|$. Para conocer la dirección de la velocidad lineal, se requiere determinar la dirección en que se mueve un punto en un instante específico.

Matemáticamente, la velocidad lineal de un punto se expresa como:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\mathbf{R}}{dt} \qquad \textbf{(6.1)}$$

y para periodos de tiempo cortos como:

$$\mathbf{V} \cong \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} \qquad \textbf{(6.2)}$$

Como el desplazamiento es un vector, la ecuación (6.1) indica que la velocidad también es un vector. Como con todos los vectores, para definir completamente la velocidad se requiere también una dirección. La velocidad lineal se expresa en unidades de longitud divididas entre el tiempo. En el sistema tradicional de Estados Unidos, las unidades comunes que se utilizan son pies por segundo (ft/s o fps), pies por minuto (ft/min o fpm) o pulgadas por segundo (in/s o ips). En el sistema internacional, las unidades comunes que se usan son metros por segundo (m/s) o milímetros por segundo (mm/s).

6.2.1 Velocidad lineal de puntos rectilíneos

Un punto se puede mover a lo largo de una trayectoria recta o una trayectoria curva. Como se vio en capítulos anteriores, muchos eslabones están restringidos a un movimiento en línea recta (rectilíneo). Para puntos que están sobre un eslabón limitado a movimiento rectilíneo, se utilizan las ecuaciones (6.1) y (6.2) para calcular la magnitud de la velocidad. La orientación del vector de velocidad lineal simplemente está en la dirección del movimiento, la cual generalmente es evidente.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.1

Las cajas de embalaje que se encuentran sobre la banda transportadora de la figura 6.1, se mueven hacia la izquierda a velocidad constante. Le toma 40 s recorrer los 25 ft de la banda transportadora. Determine la velocidad lineal de la caja.

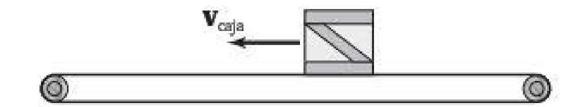


FIGURA 6.1 Traslado de la caja del problema de ejemplo 6.1.

SOLUCIÓN: Como las cajas de embalaje viajan a velocidad constante, se utiliza la ecuación (6.2) para determinar la velocidad lineal de la caja.

$$\mathbf{V}_{caja} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{25 \text{ ft}}{40 \text{ s}} = .625 \text{ ft/s}\left(\frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}}\right) = 7.5 \text{ in/s} \leftarrow$$

6.2.2 Velocidad lineal de un punto cualquiera

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) aún son válidas en general para puntos sobre un eslabón en movimiento. La dirección de la velocidad lineal de un punto es la misma que la dirección de su movimiento instantáneo. La figura 6.2 muestra la velocidad de dos puntos sobre un eslabón. Las velocidades de los puntos *A* y *B* se denotan respectivamente con $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_B$. Observe que aunque están sobre el mismo eslabón, ambos puntos pueden tener velocidades lineales diferentes. Los puntos que están más lejos del pivote viajan más rápido, lo cual se "siente" al sentarse en los asientos exteriores de un juego mecánico que gira en un parque de diversiones.

Examinando la figura 6.2, se ve que la velocidad del punto *A*, $\mathbf{V}_A$, está dirigida a lo largo de la trayectoria en que se mueve el punto *A* en ese instante, es decir, tangente a un arco con centro en *O*, la cual también es perpendicular al eslabón *OA*. En términos casuales, si el punto *A* se desprendiera del eslabón 2 en ese momento, el punto *A* viajaría en la dirección de su velocidad lineal.

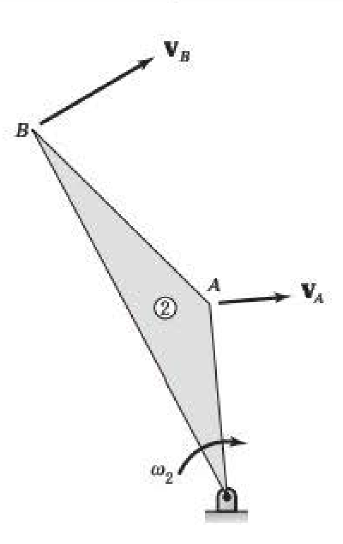


FIGURA 6.2 Velocidades lineales de puntos sobre un eslabón.

6.2.3 Perfil de velocidad del movimiento lineal

Los avances tecnológicos han permitido el control preciso del movimiento en muchas aplicaciones, como las de automatización, prueba y equipo de medición. Estos sistemas tienen incorporados servomotores controlados por un microprocesador. El movimiento deseado se especifica en un controlador. Los sensores monitorean el movimiento del eslabón móvil y proporcionan retroalimentación al controlador. Si se detecta una diferencia entre el movimiento deseado y el movimiento real, el controlador modificará la señal que va al motor y corregirá la desviación. Por su precisión, sensibilidad y bajo costo, el uso de servosistemas está creciendo con rapidez.

Para un control de movimiento óptimo, es deseable movimiento de alta velocidad suave, con un mínimo esfuerzo del motor. El controlador debe dirigir el motor para cambiar la velocidad acertadamente y obtener los mejores resultados. En un sistema servo lineal, las características del movimiento de traslación de la componente de una máquina se especifican generalmente con un perfil de velocidad modelado. El perfil de velocidad establece los lapsos de aceleración, estado estable y desaceleración en la traslación del eslabón. El desplazamiento real se calcula a partir del perfil de velocidad. Replanteando la ecuación (6.1),

$$d\mathbf{R} = \mathbf{V}\ dt$$

Al despejar para obtener el desplazamiento $\Delta\mathbf{R}$, se obtiene:

$$\Delta\mathbf{R} = \int \mathbf{V}\ dt \qquad \textbf{(6.3)}$$

Con un conocimiento elemental de cálculo, se sabe que la ecuación (6.3) indica que el desplazamiento para cierto intervalo de tiempo es el área debajo de la curva *v-t* para ese intervalo de tiempo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.2

Los servoactuadores asistidos se programan para moverse de acuerdo con un perfil de velocidad especificado. El actuador lineal mostrado en la figura 6.3a fue programado para extenderse, de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura 6.3b. Determine el desplazamiento total durante este movimiento programado.

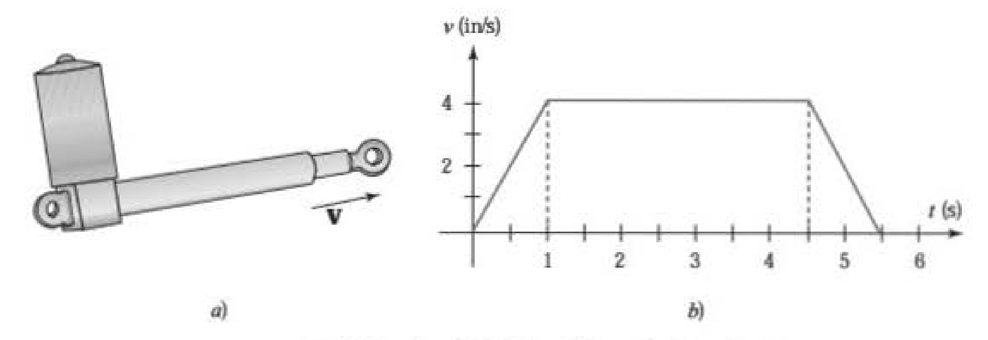


FIGURA 6.3 Perfil de velocidad del problema de ejemplo 6.2.

SOLUCIÓN:

1. ***Desplazamiento durante el lapso de aceleración del movimiento***

Durante el primer segundo del movimiento, el actuador acelera hasta su estado estable de velocidad. El área debajo de la curva *v-t* forma un triángulo y se calcula como

$$\Delta \mathbf{R}_{\text{aceleración}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{V}_{\text{estado-estable}}\right)\left(\Delta t_{\text{aceleración}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(4 \text{ in/s}\right) [(1-0) \text{ s}] = 2 \text{ in} \longrightarrow$$

2. ***Desplazamiento durante el lapso de movimiento estable***

Durante el intervalo de tiempo de 1 a 4.5 s, el actuador se mueve con velocidad estable. El área debajo de la curva *v-t* forma un rectángulo y se calcula como

$$\Delta \mathbf{R}_{\text{estado-estable}} = \left(\mathbf{V}_{\text{estado-estable}}\right)\left(\Delta t_{\text{estado-estable}}\right) = \left(4 \text{ in/s}\right) [(4.5-1) \text{ s}] = 14 \text{ in} \longrightarrow$$

3. ***Desplazamiento durante el lapso de desaceleración del movimiento***

Durante el intervalo de tiempo de 4.5 a 5.5 s, el actuador desacelera a partir de su estado estable de velocidad. El área debajo de la curva *v-t* forma un triángulo y se calcula como

$$\Delta \mathbf{R}_{\text{desaceleración}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{V}_{\text{estado-estable}}\right)\left(\Delta t_{\text{desaceleración}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(4 \text{ in/s}\right) [(5.5-4.5) \text{ s}] = 2 \text{ in} \longrightarrow$$

4. ***Desplazamiento total durante el movimiento programado***

El desplazamiento total durante el movimiento programado es la suma de los desplazamientos durante la aceleración, el estado estable y la desaceleración del movimiento.

$$\Delta \mathbf{R}_{\text{total}} = \Delta \mathbf{R}_{\text{aceleración}} + \Delta \mathbf{R}_{\text{estado-estable}} + \Delta \mathbf{R}_{\text{desaceleración}} = 2 + 14 + 2 = 18 \text{ in} \longrightarrow \text{ (extensión)}$$

6.3 VELOCIDAD DE UN ESLABÓN

Diferentes puntos sobre un eslabón pueden tener velocidades lineales significativamente diferentes. Esto es válido sobre todo cuando el eslabón gira simplemente alrededor de un punto fijo, como en la figura 6.2. En general, el movimiento de un eslabón suele ser bastante complejo cuando se mueve (se traslada) y da vueltas (rota).

Cualquier movimiento, incluso el complejo, puede ser visto como una combinación de movimiento en línea recta y movimiento giratorio. La descripción completa del movimiento de un eslabón consiste en la identificación del movimiento lineal de un punto y el movimiento giratorio del eslabón.

Aun cuando varios puntos de un eslabón pueden tener diferentes velocidades lineales, como se trata de un cuerpo rígido, el eslabón completo tiene la misma velocidad angular. La *velocidad angular* ω de un eslabón es el desplazamiento angular de ese eslabón por unidad de tiempo. Recuerde que el desplazamiento giratorio $\Delta\theta$ de un eslabón se define como el cambio angular en la orientación de ese eslabón. Esto se vio en la sección 4.3.

Matemáticamente, la velocidad angular de un eslabón se expresa como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (6.4)$$

y para periodos cortos de tiempo, o cuando la velocidad se supone como lineal,

$$\omega \cong \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (6.5)$$

La dirección de la velocidad angular es la dirección del giro del eslabón. En análisis planar, se describe completamente especificando el término *sentido horario* o *sentido antihorario*. Por ejemplo, el eslabón mostrado en la figura 6.2 tiene una velocidad angular que es consistente con las velocidades lineales de los puntos que están en el eslabón. Por lo tanto, el eslabón tiene una velocidad de giro en sentido horario.

La velocidad angular se expresa en unidades angulares divididas entre el tiempo. Tanto en el sistema estadounidense como en el sistema internacional, las unidades de uso común son las revoluciones por minuto (rpm), los grados por segundo (deg/s) o los radianes por segundo (rad/s o rps).

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.3

El engrane mostrado en la figura 6.4 gira en sentido antihorario a velocidad constante. Se mueve 300° en 0.5 s. Determine la velocidad angular del engrane.

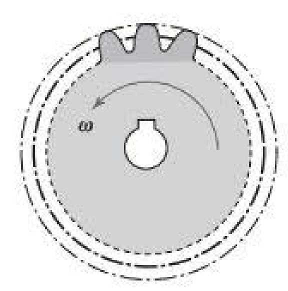


FIGURA 6.4 Engrane giratorio del problema de ejemplo 6.3.

SOLUCIÓN: Como el engrane gira a velocidad constante, se usa la ecuación (6.4) para determinar la velocidad angular del engrane.

$$\omega_{\text{engrane}} = \frac{\Delta\theta_{\text{engrane}}}{\Delta t} = \frac{300°}{0.5\text{ s}} = 600\text{ deg/s}\left(\frac{1\text{ rev}}{360\text{ deg}}\right)\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right) = 50\text{ rpm, en sentido antihorario}$$

6.4 RELACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES LINEAL Y ANGULAR

En un eslabón con rotación pura, la magnitud de la velocidad lineal de cualquier punto del eslabón se relaciona con la velocidad angular del eslabón. Esta relación se expresa como

$$v = r\omega \qquad \textbf{(6.6)}$$

donde:

$v = |V|$ = magnitud de la velocidad lineal del punto en consideración

r = distancia del centro de rotación al punto en consideración

ω = velocidad angular del eslabón giratorio que contiene el punto en consideración

La velocidad lineal siempre es perpendicular a la línea que une el centro de rotación del eslabón con el punto en consideración. Por consiguiente, la velocidad lineal de un punto sobre un eslabón con rotación pura se conoce con frecuencia como *velocidad tangencial*. Lo anterior se debe a que la velocidad lineal es tangente a la trayectoria circular del punto, o bien, perpendicular a la línea que une el punto con el pivote.

Es extremadamente importante recordar que la velocidad angular ω en la ecuación (6.6), se debe expresar en radianes por unidad de tiempo. El radián es una unidad adimensional de medición angular que puede omitirse. La velocidad lineal se expresa en unidades de longitud por tiempo y no como lo sugeriría la ecuación (6.6) en radianes las unidades de longitud por unidad de tiempo.

Generalmente se tiene que hacer la conversión a la unidad más común de revoluciones por minuto (rpm):

$$\omega(\text{rad/min}) = [\omega(\text{rad/min})]\left[\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}}\right] = 2\pi\,[\omega(\text{rad/min})] \qquad \textbf{(6.7)}$$

y

$$\omega(\text{rad/s}) = [\omega(\text{rev/min})]\left[\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\right] = \frac{\pi}{30}[\omega(\text{rev/min})] \qquad \textbf{(6.8)}$$

Como se mencionó, un radián es una medida adimensional de un ángulo. Para ser precisos, un ángulo expresado en radianes es la razón de la longitud del arco barrido por el ángulo al radio. Cuando un ángulo expresado en radianes se multiplica por otro valor, se omite la designación del radián.

Como se estableció en la sección anterior, la velocidad angular del eslabón y las velocidades lineales de los puntos sobre el eslabón son consistentes, es decir, las velocidades (rotacional o lineal) están en la dirección en la que el objeto (eslabón o punto) se mueve instantáneamente. Como se indicó, la velocidad lineal siempre es perpendicular a la línea que une el centro de rotación del eslabón con el punto en consideración.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.4

La figura 6.5 ilustra un mecanismo de leva que sirve para impulsar la válvula de escape de un motor de combustión interna. El punto B es un punto de interés sobre el balancín. En este instante, la leva fuerza al punto B hacia arriba a 30 mm/s. Determine la velocidad angular del balancín y la velocidad del punto C.

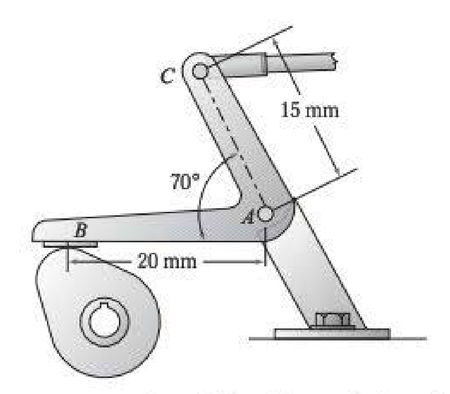


FIGURA 6.5 Mecanismo del problema de ejemplo 6.4.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático y calcule los grados de libertad***

El balancín está conectado a la bancada con una unión de perno en el punto A. La velocidad del punto B es un vector dirigido hacia arriba con una magnitud igual a 30 mm/s. La figura 6.6 muestra el diagrama cinemático.

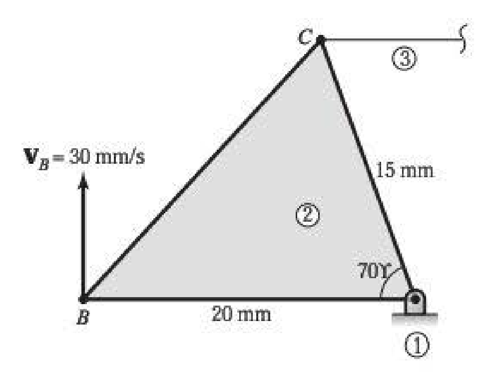


FIGURA 6.6 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.4.

2. ***Calcule la velocidad angular del eslabón 2***

Es claro que como el punto B viaja hacia arriba, el balancín (eslabón 2) se fuerza a girar en sentido horario. Por lo tanto, como el punto B tiene velocidad lineal hacia arriba, el balancín debe tener velocidad angular en sentido horario. La magnitud de la velocidad angular se calcula reagrupando la ecuación (6.5):

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_{AB}} = \frac{30 \text{ mm/s}}{20 \text{ mm}} = 1.5 \text{ rad/s}$$

Esto se convierte a rpm al reagrupar la ecuación (6.6):

$$\omega_2(\text{rev/min}) = \frac{30}{\pi}\left[\omega_2(\text{rad/s})\right] = \frac{30}{\pi}[1.5 \text{ rad/s}] = 14.3 \text{ rpm}$$

El resultado incluyendo la dirección es:

$$\omega_2 = 1.5 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

3. ***Calcule la velocidad lineal del punto C***

La velocidad lineal del punto C también se calcula con la ecuación (6.5):

$$v_C = r_{AC}\omega_2 = (15 \text{ mm})(1.5 \text{ rad/s}) = 22.5 \text{ mm/s}$$

La dirección de la velocidad lineal de C debe ser consistente con la velocidad angular del eslabón 2. La velocidad también es perpendicular a la línea que une el centro de rotación del eslabón 2, el punto A, con el punto C. Por consiguiente, la velocidad del punto C está dirigida 20° (90° – 70°) por encima de la horizontal. Incluyendo la dirección, el resultado es

$$\mathbf{V}_C = 22.5 \text{ mm/s} \angle 20^\circ$$

6.5 VELOCIDAD RELATIVA

La diferencia entre el movimiento de dos puntos se conoce como *movimiento relativo*. Considere una situación donde dos automóviles viajan en una carretera interestatal. El automóvil del carril izquierdo viaja a 65 millas por hora (mph); y el automóvil del carril derecho, a 55 mph. Las velocidades se miden en relación con un radar estacionario, de manera que son mediciones de *movimiento absoluto*.

Aun cuando ambos se mueven hacia adelante, a las personas del automóvil más rápido les parece que el otro automóvil se mueve realmente hacia atrás; es decir, el movimiento relativo del automóvil más lento va en dirección opuesta al movimiento absoluto del automóvil más rápido. Por el contrario, a las personas del automóvil más lento les parece que el automóvil más rápido viaja a 10 mph. Es decir, la velocidad relativa del automóvil más rápido es de 10 mph respecto del automóvil más lento.

Velocidad relativa es un término que se utiliza cuando la velocidad de un objeto se relaciona con otro objeto de referencia, que también se puede estar moviendo. La notación siguiente diferencia la velocidad absoluta de la velocidad relativa.

$\mathbf{V}_A$ = velocidad absoluta del punto A

$\mathbf{V}_B$ = velocidad absoluta del punto B

$\mathbf{V}_{B/A}$ = velocidad relativa del punto B con respecto a A
= velocidad del punto B "observada" desde el punto A

El movimiento relativo, esto es, la diferencia entre el movimiento de dos puntos, se expresa matemáticamente como

$$\mathbf{V}_{B/A} = \mathbf{V}_B - > \mathbf{V}_A \qquad (6.9)$$

o se replantea como

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + > \mathbf{V}_{B/A} \qquad (6.10)$$

Observe que las ecuaciones (6.9) y (6.10) son ecuaciones vectoriales. Por lo tanto, para usar las ecuaciones, se deben elaborar polígonos vectoriales de acuerdo con las ecuaciones. Para el manejo de estas ecuaciones se recomienda emplear las técnicas analizadas en la sección 3.16.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.5

La figura 6.7 ilustra el mecanismo para elevar carga de un camión repartidor. En este instante, el punto A tiene una velocidad de 12 in/s en la dirección mostrada, en tanto que el punto B tiene una velocidad de 10.4 in/s en la dirección mostrada. Determine la velocidad angular del eslabón más bajo y la velocidad relativa del punto B con respecto al punto A.

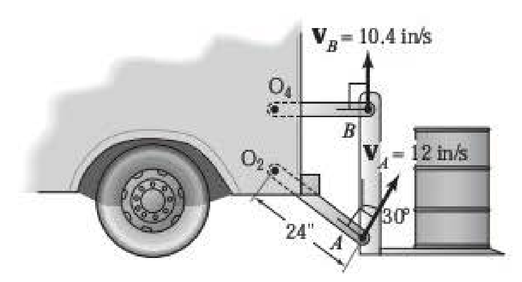


FIGURA 6.7 Mecanismo del problema de ejemplo 6.5.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore un diagrama cinemático e identifique la movilidad***

La figura 6.8a muestra el diagrama cinemático de este mecanismo. Observe que se trata del conocido mecanismo de cuatro barras que tiene un grado de libertad.

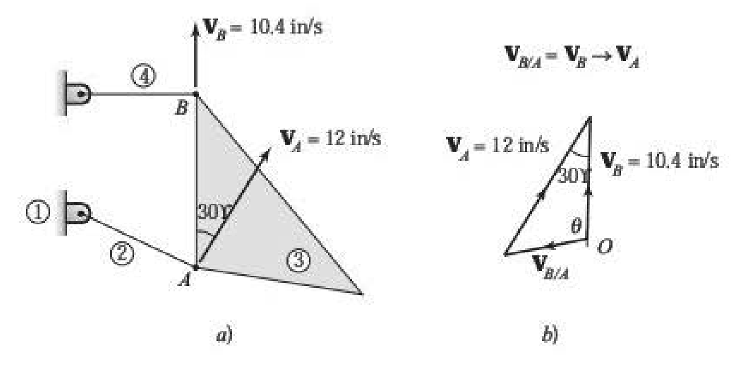


FIGURA 6.8 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.5.

2. ***Calcule la velocidad angular del eslabón 2***

Partiendo del diagrama cinemático, resulta claro que el punto *A* viaja hacia arriba y a la derecha, en tanto que el eslabón 2 gira en sentido antihorario. Entonces, el eslabón 2 tiene una velocidad angular en sentido antihorario. La magnitud de la velocidad angular se calcula reagrupando la ecuación (6.6), como sigue:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_{AO_2}} = \frac{(12 \text{ in/s})}{(24 \text{ in})} = 0.5 \text{ rad/s}$$

Esto se convierte a rpm reagrupando la ecuación (6.7) como

$$\omega_2(\text{rev/min}) = \frac{30}{\pi}\left[\omega_2(\text{rad/s})\right] = \frac{30}{\pi}[0.5 \text{ rad/s}] = 4.8 \text{ rpm}$$

Incluyendo la dirección,

$$\omega_2 = 4.8 \text{ rpm, en sentido antihorario}$$

3. ***Calcule la velocidad lineal del punto B en relación con el punto A***

La velocidad relativa de *B* con respecto a *A* se calcula con la ecuación (6.9):

$$\mathbf{V}_{B/A} = \mathbf{V}_B -> \mathbf{V}_A$$

Se crea un polígono vectorial a partir de esta ecuación, que se muestra en la figura 6.8b. Observe que este es un triángulo cualquiera. Tanto la solución gráfica como la analítica sirven para determinar el vector $v_{B/A}$.

Al usar el método analítico, la magnitud de la velocidad $v_{B/A}$ se calcula con la ley de los cosenos.

$$v_{B/A} = \sqrt{[v_A^2 + v_B^2 - 2(v_A)(v_B)(\cos 30°)]}$$

$$= \sqrt{(12 \text{ in/s})^2 + (10.4 \text{ in/s})^2 - 2(12 \text{ in/s})\ (10.4 \text{ in/s})(\cos 30°)} = 6.0 \text{ in/s}$$

El ángulo entre las magnitudes de las velocidades $v_{B/A}$ y v_B se muestra como θ en la figura 6.8b. Se calcula con la ley de los senos:

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left[\frac{(12 \text{ in/s})}{6 \text{ in/s}} \text{ sen } 30°\right] = 90°$$

De manera que este polígono vectorial forma en realidad un triángulo rectángulo. La velocidad relativa de *B* con respecto a *A* se expresa formalmente como sigue:

$$\mathbf{V}_{B/A} = 6.0 \text{ in/s} \leftarrow$$

La velocidad relativa entre dos puntos de un eslabón es útil para determinar las características de la velocidad del eslabón. Específicamente, la velocidad relativa de dos puntos cualesquiera en un eslabón sirve para determinar la velocidad angular de ese eslabón. Suponiendo que los puntos *A*, *B*, y *C* permanecen sobre un eslabón, la velocidad angular se expresa como

$$\omega = \frac{v_{A/B}}{r_{AB}} = \frac{v_{B/C}}{r_{BC}} = \frac{v_{A/C}}{r_{AC}} \qquad \textbf{(6.11)}$$

La dirección de la velocidad angular es consistente con la velocidad relativa de los dos puntos. La velocidad relativa de *B* con respecto a *A* implica que *B* se vea girando alrededor de *A*. Por consiguiente, la dirección de la velocidad relativa de *B* "vista desde" *A* sugiere la dirección del giro del eslabón compartido por los puntos *A* y *B*. Si se considera la figura 6.9, cuando $v_{B/A}$ se dirige hacia arriba y a la izquierda, la velocidad angular del eslabón es en sentido antihorario. Por el contrario, cuando $v_{B/A}$ se dirige hacia abajo y a la derecha, la velocidad angular del eslabón es en sentido horario.

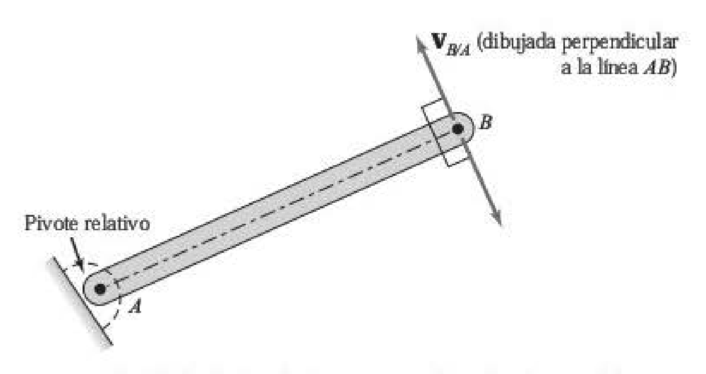


FIGURA 6.9 Velocidad relativa de dos puntos sobre el mismo eslabón.

6.6 ANÁLISIS GRÁFICO DE VELOCIDAD: MÉTODO DE VELOCIDAD RELATIVA

El análisis gráfico de velocidad determina la velocidad de puntos de un mecanismo en una sola configuración. Se debe hacer énfasis en que los resultados de este análisis corresponden a la posición actual del mecanismo. Conforme el mecanismo se mueve, la configuración cambia al igual que las velocidades.

El fundamento del método de análisis de velocidad relativa se deriva del hecho siguiente:

Dos puntos que residen en el mismo eslabón tan solo pueden tener una velocidad relativa que esté en dirección perpendicular a la línea que une los dos puntos.

Este hecho es una ampliación de la definición de velocidad relativa. La figura 6.9 muestra dos puntos, *A* y *B*, que se encuentran sobre el mismo eslabón. Recuerde que $v_{B/A}$ es la velocidad de *B* "como se observa" desde *A*. Para un observador en *A*, parece que *B* simplemente gira alrededor de *A*, siempre que *A* y *B* se encuentren sobre el mismo eslabón. De esta manera, la velocidad de *B* con respecto a *A* debe ser perpendicular a la línea que une a *B* con *A*.

Con este hecho, y las técnicas de análisis vectorial, es posible determinar la velocidad de los puntos sobre un mecanismo.

6.6.1 Puntos sobre eslabones restringidos a rotación pura o a traslación rectilínea

El análisis más simple con el método de velocidad relativa implica puntos que residen en eslabones restringidos a rotación pura o a traslación rectilínea. La razón es que se conoce la dirección del movimiento de los puntos. Las uniones de pernos son puntos convenientes de análisis porque residen sobre dos eslabones, uno de los cuales normalmente está limitado a rotación pura o a traslación rectilínea.

La figura 6.10 ilustra un mecanismo de manivela-corredera. El punto *B* se encuentra sobre los eslabones 2 y 3. Observe que se conoce la dirección de la velocidad del punto *B*, porque el eslabón 2 está restringido a rotación pura. El punto *C* se encuentra en los eslabones 3 y 4. Asimismo, se conoce la dirección de la velocidad del punto *C*, porque el eslabón 4 está restringido a un movimiento de traslación rectilínea. Si se conoce la velocidad del punto *B*, la velocidad del punto *C* se calcula rápidamente porque también se conoce la dirección de su velocidad. Tan solo se necesitan determinar la magnitud y el sentido.

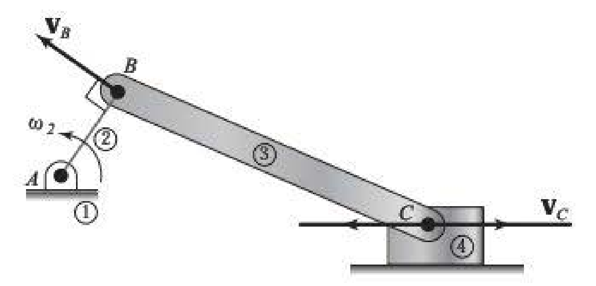


FIGURA 6.10 Eslabones restringidos a movimientos de rotación pura y traslación rectilínea.

El procedimiento de solución general para los problemas de este tipo se resume como:

1. Determinar la dirección de la velocidad desconocida con las restricciones impuestas por la unión, ya sea rotación pura o traslación pura.
2. Establecer la dirección de la velocidad relativa entre las dos uniones. Para dos puntos sobre el mismo eslabón, la velocidad relativa siempre es perpendicular a la línea que une los puntos.
3. Usar la siguiente ecuación de velocidad relativa para trazar un polígono vectorial:

$$\mathbf{V}_{\text{punto desconocido}} = \mathbf{V}_{\text{punto conocido}} +> \mathbf{V}_{\text{punto desconocido/punto conocido}}$$

4. Utilizar los métodos descritos en la sección 3.18, y la ecuación vectorial de arriba, para determinar las magnitudes de

$$\mathbf{V}_{\text{punto desconocido}} \text{ y } \mathbf{V}_{\text{punto desconocido/punto conocido}}$$

Este procedimiento de análisis describe la lógica detrás del análisis gráfico de la velocidad. La solución real se obtiene empleando técnicas de dibujo manuales (un transportador y un compás), o bien, un sistema de CAD (el comando de rotar y copiar). La lógica es idéntica; sin embargo, la solución con CAD no origina las limitaciones de precisión en el dibujo. Independientemente del método aplicado, los conceptos subyacentes del análisis gráfico de la posición se ilustran mejor y se amplían con el siguiente problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.6

La figura 6.11 ilustra un mecanismo triturador de rocas. Se usa en una máquina donde se coloca una roca grande en una tolva vertical y cae hacia la cámara de trituración. Las rocas del tamaño adecuado, que pasan a través de un cribador, se descargan por la parte inferior. Las rocas que no pasan por el cribador se reintroducen en la cámara de trituración.

Determine la velocidad angular del ariete triturador, en la configuración mostrada, conforme la manivela de 60 mm gira a 120 rpm en sentido horario.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático y calcule los grados de libertad***

La figura 6.12a muestra el diagrama cinemático del mecanismo. Observe que el mecanismo es el conocido eslabonamiento de cuatro barras que tiene un solo grado de libertad. Con un grado de libertad, tal mecanismo funciona totalmente con un solo movimiento de entrada. Desde luego, el movimiento es la rotación del eslabón 2 a una velocidad de 120 rpm.

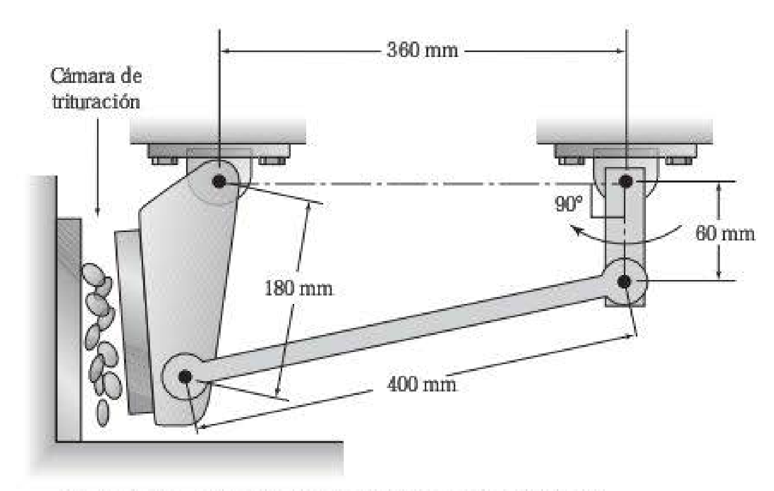


FIGURA 6.11 Mecanismo del problema de ejemplo 6.6.

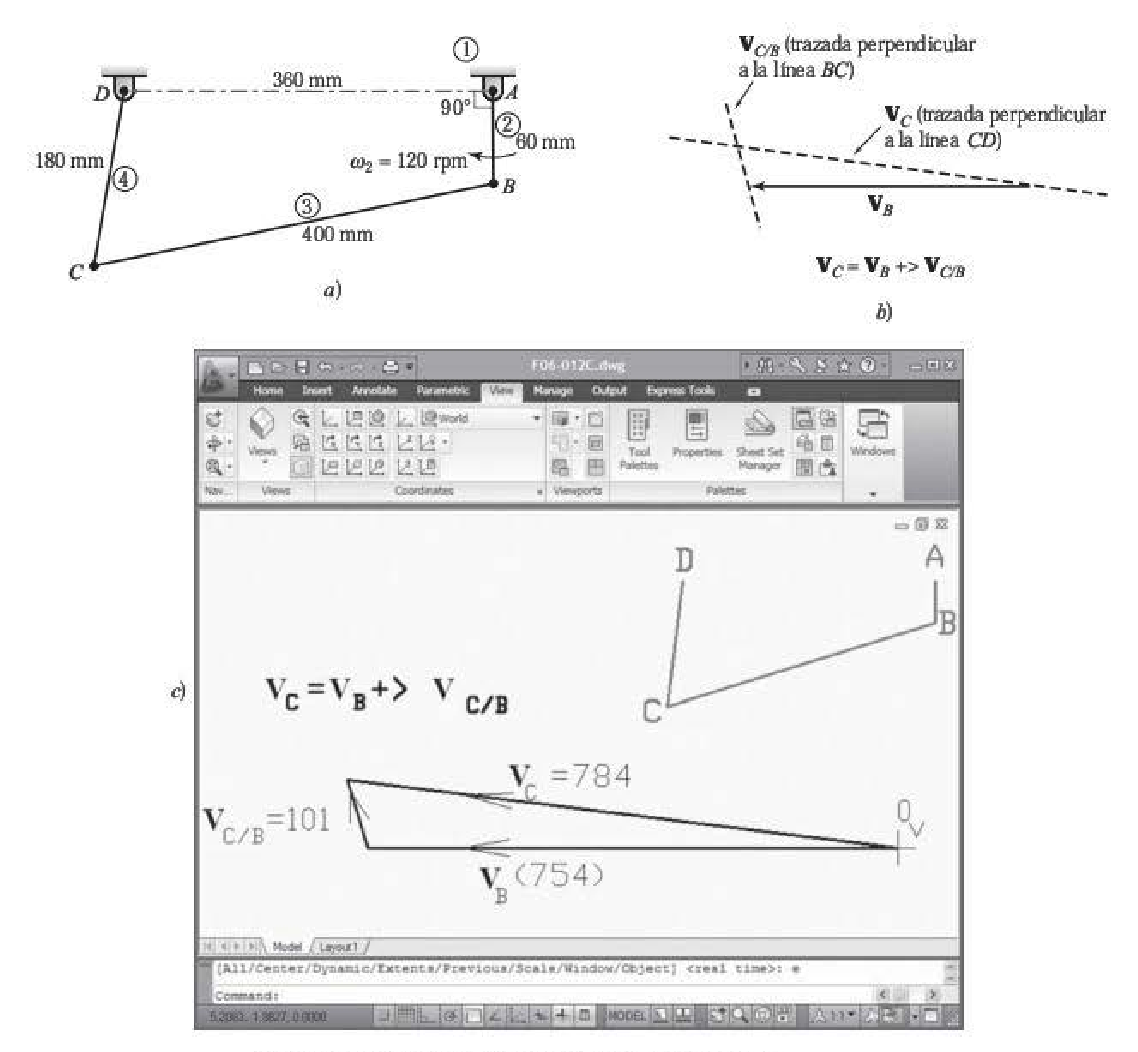


FIGURA 6.12 Diagramas del problema de ejemplo 6.6.

2. ***Seleccione la ecuación adecuada de velocidad relativa***

El objetivo del análisis consiste en determinar la velocidad angular del eslabón 4. El eslabón 2 genera el movimiento de entrada (velocidad). El punto *B* se encuentra sobre los eslabones 2 y 3. El punto *C* se encuentra sobre los eslabones 3 y 4. Como los puntos *B* y *C* residen en el eslabón 3, se utiliza el método de la velocidad relativa para relacionar la velocidad de entrada (eslabón 2) con la velocidad que se desea conocer (eslabón 4). La ecuación de velocidad relativa para este análisis es

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

3. ***Determine la velocidad del punto de entrada***

La velocidad del punto *B* se calcula como

$$\omega_2(\text{rad/s}) = \frac{\pi}{30}(120 \text{ rpm}) = 12.56 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

$$\mathbf{V}_B = \omega_2\, r_{AB} = (12.56 \text{ rad/s})(60 \text{ mm}) = 754 \text{ mm/s} \leftarrow$$

4. ***Determine las direcciones de las velocidades deseadas***

Como el eslabón 4 está fijo a la bancada en *D*, el eslabón 4 está restringido a girar alrededor de *D*. Por consiguiente, la velocidad del punto *C* debe ser perpendicular a la línea *CD*.

Asimismo, como se estableció anteriormente, los puntos *B* y *C* se encuentran en el eslabón 3, de manera que la velocidad relativa de *C* con respecto a *B* debe permanecer perpendicular a la línea *BC*.

5. ***Dibuje el polígono de velocidad***

En la ecuación de velocidad relativa, tan solo se desconocen las magnitudes de $\mathbf{V}_C$ y de $\mathbf{V}_{C/B}$. Esto es idéntico a los problemas de la sección 3.18. El polígono vectorial que se utiliza para resolver este problema se ilustra en la figura 6.12b. Las magnitudes se determinan al examinar la intersección de las líneas correspondientes a $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_{C/B}$. El polígono vectorial completo se ilustra en la figura 6.12c.

6. ***Mida las velocidades desde el polígono de velocidad***

Las velocidades se miden con la escala correspondiente en el diagrama de velocidad para obtener:

$$\mathbf{V}_C = 784.0 \text{ mm/s } \underline{7.0^\circ}\nwarrow$$

$$\mathbf{V}_{C/B} = 101.1 \text{ mm/s } \underline{72.7^\circ}\nwarrow$$

7. ***Calcule las velocidades angulares***

Por último, se desean conocer las velocidades angulares del eslabón 4. Las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 se determinan con la ecuación (6.6):

$$\omega_4 = \frac{v_C}{r_{CD}} = \frac{(789.4 \text{ mm/s})}{(180 \text{ mm})} = 4.36 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

$$\omega_3 = \frac{v_{C/B}}{r_{BC}} = \frac{101.1 \text{ mm/s}}{(400 \text{ mm})} = 0.25 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

6.6.2 Puntos en general sobre un eslabón flotante

La determinación de la velocidad de puntos en general sobre un eslabón flotante requiere un análisis algo más complicado. Un eslabón flotante es simplemente un eslabón que no está restringido a movimiento de rotación o a traslación rectilínea pura. La dificultad estriba en que no se conocen la magnitud ni la dirección de la velocidad desconocida. Esto es muy diferente del análisis presentado en el problema de ejemplo 6.6.

Para determinar la velocidad de un punto cualesquiera sobre un eslabón flotante, primero se debe determinar la velocidad de dos puntos adicionales sobre el eslabón, los cuales por lo general son uniones de perno restringidos a movimiento de traslación o de rotación, como se vio en la sección 6.6.1. Las velocidades de estos puntos especiales se obtienen con facilidad con un análisis parecido al del problema de ejemplo 6.6.

La figura 6.13a muestra un eslabón donde las velocidades de los puntos *A* y *B* ya están determinadas. Para obtener la velocidad del punto *C*, se debe utilizar el siguiente procedimiento:

1. Escribir las dos ecuaciones:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_A +> \mathbf{V}_{C/A}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

Como los puntos *A*, *B* y *C* están sobre el mismo eslabón, las direcciones de $\mathbf{V}_{C/A}$ y $\mathbf{V}_{C/B}$ son perpendiculares a las líneas *CA* y *CB*, respectivamente.

2. Se igualan entre sí las ecuaciones individuales de velocidad relativa. En este caso, se obtiene:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_A +> \mathbf{V}_{C/A} = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

3. Nuevamente, las velocidades relativas se despejan usando las técnicas descritas en la sección 3.18, lo cual implica la construcción de un polígono vectorial, como el que se indica en la figura 6.13b.
4. Las magnitudes de la velocidad relativa se miden en el polígono vectorial.
5. Conociendo las velocidades relativas, la velocidad del punto de interés, el punto *C*, se determina usando una de las ecuaciones individuales descrita en el paso 1, que se calcula con facilidad a partir del polígono vectorial original, como en la figura 6.13c.

De nueva cuenta, los polígonos vectoriales se construyen con la misma lógica, ya sea con técnicas de dibujo manuales o el CAD. La lógica detrás del análisis se ilustra en el siguiente problema de ejemplo:

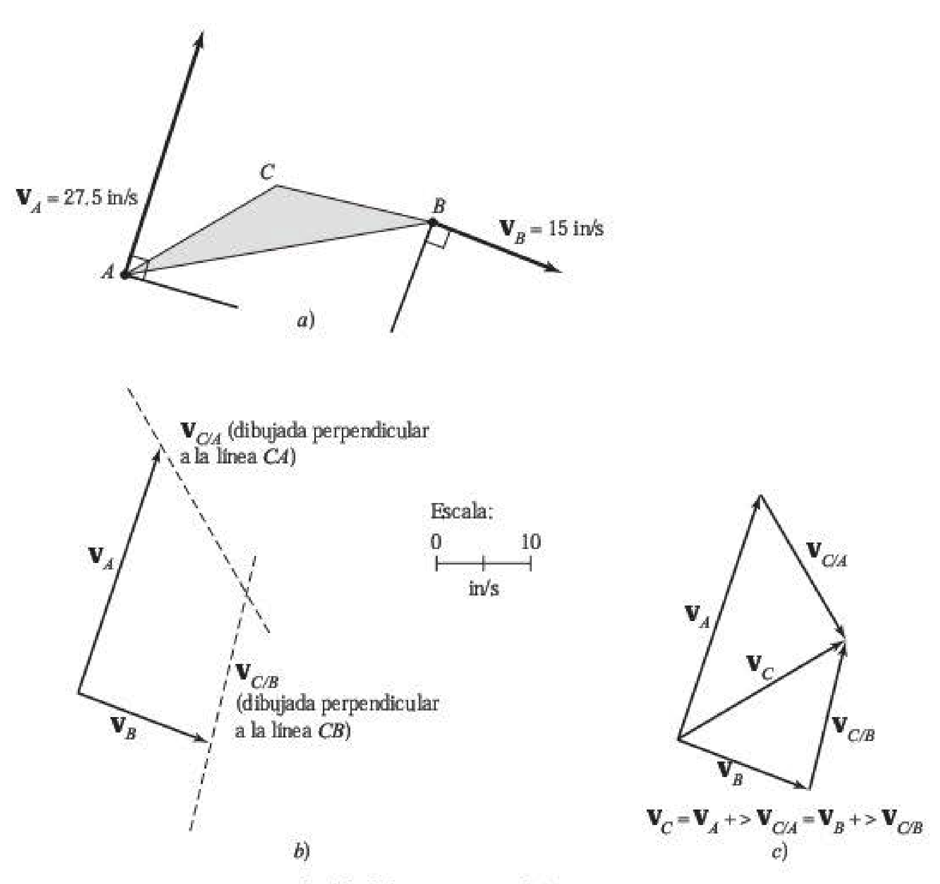


FIGURA 6.13 Velocidad de un punto de interés.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.7

La figura 6.14 ilustra un mecanismo que extiende bobinas de cable desde un camión repartidor. Es operado por un cilindro hidráulico en *A*. En este instante, el cilindro se retrae a una velocidad de 5 mm/s. Determine la velocidad de la unión superior, el punto *E*.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje el diagrama cinemático y calcule los grados de libertad***

La figura 6.15a muestra el diagrama cinemático del mecanismo. Para entender cabalmente este mecanismo, se calcula la movilidad.

$$n = 6 \qquad j_p = (5 \text{ pernos} + 2 \text{ correderas}) = 7 \qquad j_h = 0$$

y

$$M = 3(n-1) - 2j_p - j_h = 3(6-1) - 2(7) - 0 = 1$$

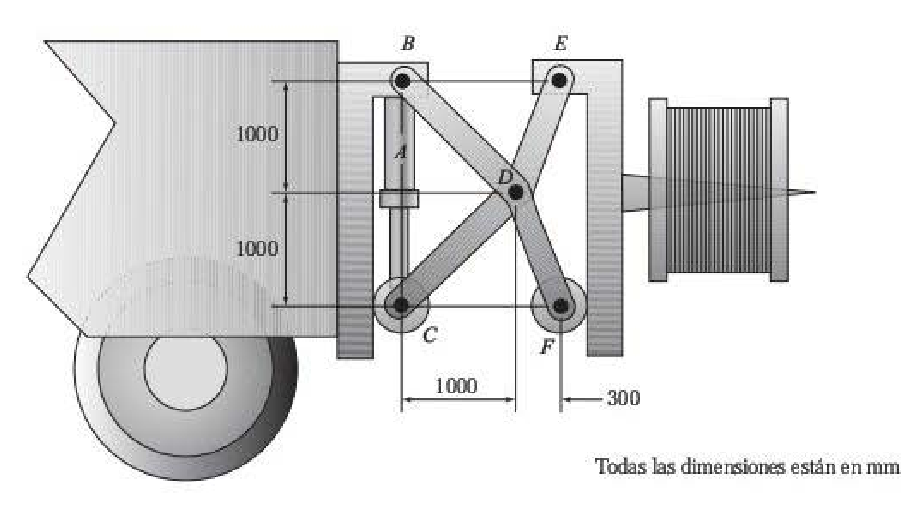


FIGURA 6.14 Mecanismo del problema de ejemplo 6.7.

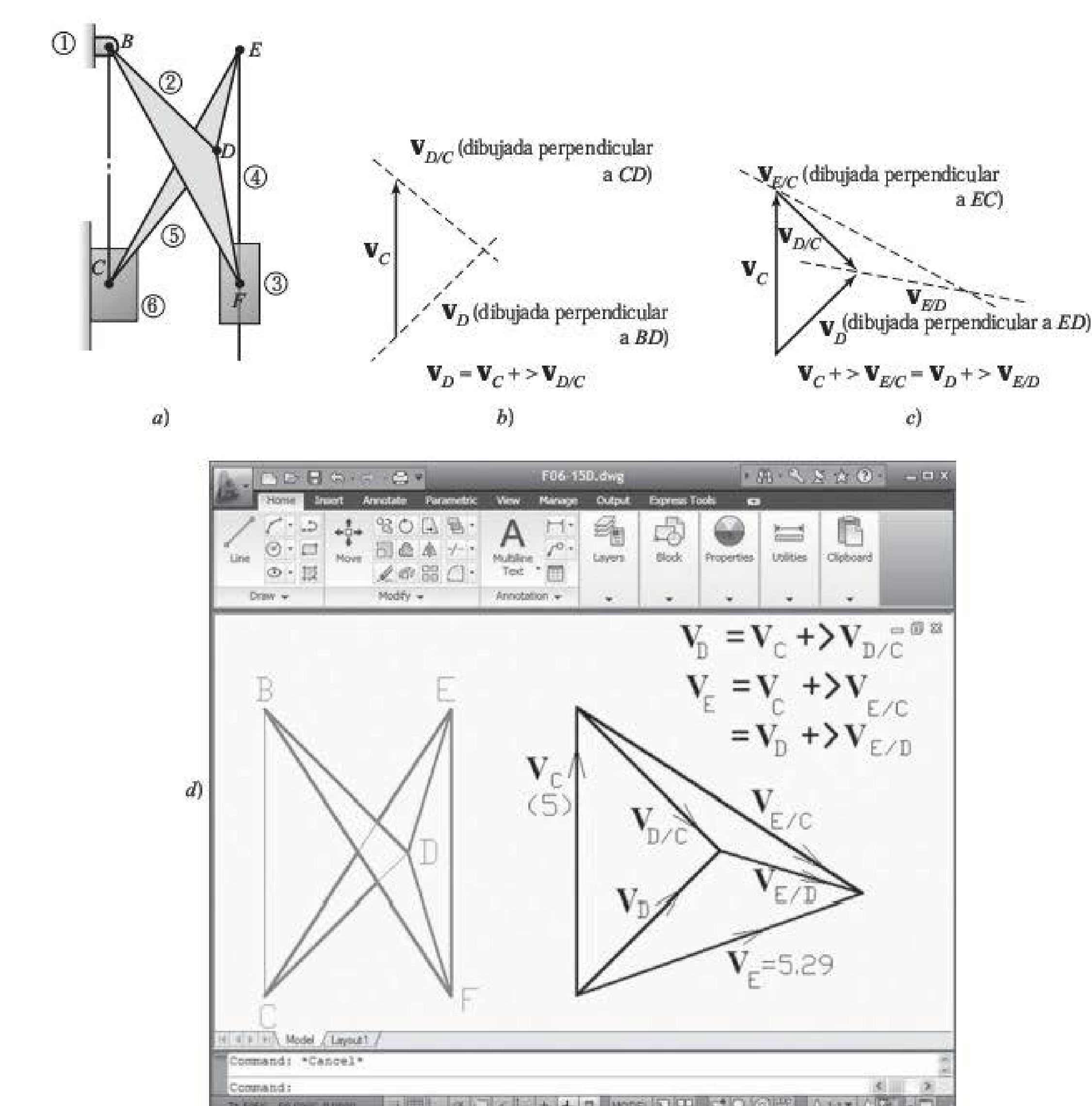


FIGURA 6.15 Diagramas del problema de ejemplo 6.7.

Con un grado de libertad, este mecanismo funciona completamente con un solo movimiento de entrada. Desde luego, tal movimiento es la retracción hacia arriba del cilindro hidráulico a una velocidad de 5 mm/s.

2. ***Seleccione el método para obtener la velocidad deseada***

El eslabón 5 transporta tanto el punto *C* (velocidad conocida) como el punto *E* (velocidad desconocida). Sin embargo, el eslabón 5 es un eslabón flotante, ya que no está restringido a un movimiento puro de rotación o de traslación. Por lo tanto, antes de determinar la velocidad del punto *E*, se debe obtener otra velocidad sobre eslabón 5. El punto *D* es un punto conveniente porque se encuentra sobre el eslabón 5 y otro eslabón que está restringido a movimiento de rotación (eslabón 2).

3. ***Determine la velocidad del punto conveniente (punto D)***

La ecuación que permite la obtención de la velocidad del punto *D* se escribe como:

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_C +> \mathbf{V}_{D/C}$$

Puesto que el eslabón 2 está fijo a la bancada en *B*, el punto *D* está restringido a girar alrededor de *B*. Por lo tanto, la velocidad del punto *D* debe ser perpendicular a la línea *BD*.

Asimismo, los puntos *D* y *C* residen en el mismo eslabón, es decir, el eslabón 5. Entonces la velocidad relativa de *D* con respecto a *C* debe ser perpendicular a la línea *DC*. A partir de los dos enunciados anteriores, se conocen ahora las direcciones de ambas velocidades, $\mathbf{V}_D$ y $\mathbf{V}_{D/C}$.

El polígono vectorial que se utiliza para resolver este problema se muestra en la figura 6.15b. Las magnitudes se determinan al examinar la intersección de las líneas respectivas de $\mathbf{V}_D$ y $\mathbf{V}_{D/C}$. Las magnitudes de las velocidades se miden con la escala correspondiente, para obtener las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{V}_{D/C} = 3.5 \text{ mm/s} \searrow 45°$$
$$\mathbf{V}_D = 3.5 \text{ mm/s} \nearrow 45°$$

4. ***Determine la velocidad del punto sobre el eslabón flotante (eslabón 5)***

Ahora que se conocen cabalmente las velocidades de dos puntos sobre el eslabón 5, es posible determinar la velocidad del punto *E*. Usando dos formas de la ecuación de velocidad relativa, se relaciona la velocidad de los puntos *C*, *D* y *E*:

$$\mathbf{V}_E = \mathbf{V}_C +> \mathbf{V}_{E/C} = \mathbf{V}_D +> \mathbf{V}_{E/D}$$

Se conocen las velocidades de *C* y *D*, así como la dirección de las velocidades relativas. En la figura 6.15c se ilustra el polígono vectorial.

Una vez que se determinan las magnitudes de las velocidades relativas, es posible elaborar el polígono. En la figura 6.15d se muestra el polígono completo. La velocidad de *E* se incluye en el polígono de acuerdo con la ecuación vectorial de arriba. Si se miden los vectores del polígono completo,

$$\mathbf{V}_{E/D} = 2.65 \text{ mm/s} \searrow 16.7°$$

$$\mathbf{V}_{E/C} = 5.95 \text{ mm/s} \searrow 33.0°$$

$$\mathbf{V}_E = 5.29 \text{ mm/s} \nearrow 19.4°$$

6.6.3 Puntos coincidentes sobre eslabones diferentes

El cálculo de velocidades de eslabones móviles que están unidos a través de una unión de corredera, implica el uso de puntos coincidentes que se encuentran en los dos cuerpos. Por lo general se conoce la dirección del movimiento de deslizamiento. Entonces, se conoce la dirección de la velocidad relativa de los puntos coincidentes. Se trata de información suficiente para determinar el movimiento de los eslabones impulsados. El concepto se ilustra mejor con un problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.8

La figura 6.16 presenta un mecanismo que inclina la plataforma de un camión de volteo. Determine la velocidad requerida del cilindro hidráulico para inclinar la plataforma del camión a una velocidad de 5 rad/min.

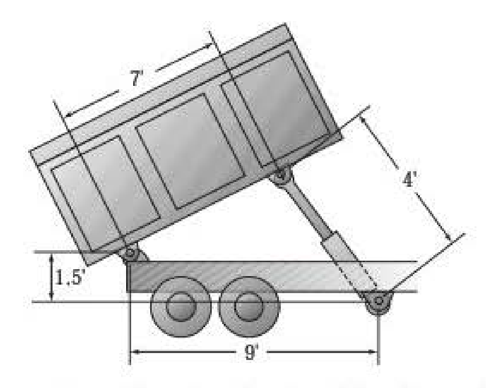


FIGURA 6.16 Mecanismo del camión de volteo del problema de ejemplo 6.8.

SOLUCIÓN: **1.** ***Dibuje el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

Desde un punto de vista cinemático, tal mecanismo es una inversión del conocido mecanismo de manivela-corredera. La manivela-corredera tiene un grado de libertad que, en este caso, es la extensión y la contracción del cilindro hidráulico. La figura 6.17a muestra el diagrama cinemático del mecanismo.

El eslabón 1 representa la bancada, el eslabón 4 es el cilindro, el eslabón 3 es la varilla/pistón y el eslabón 2 es la plataforma del camión. Observe que la unión de perno que une los eslabones 2 y 3 está identificada como el punto *B*. Sin embargo, como los eslabones 2, 3 y 4 se encuentran en el punto *B*, estos puntos coincidentes se identifican como B_2, B_3 y B_4.

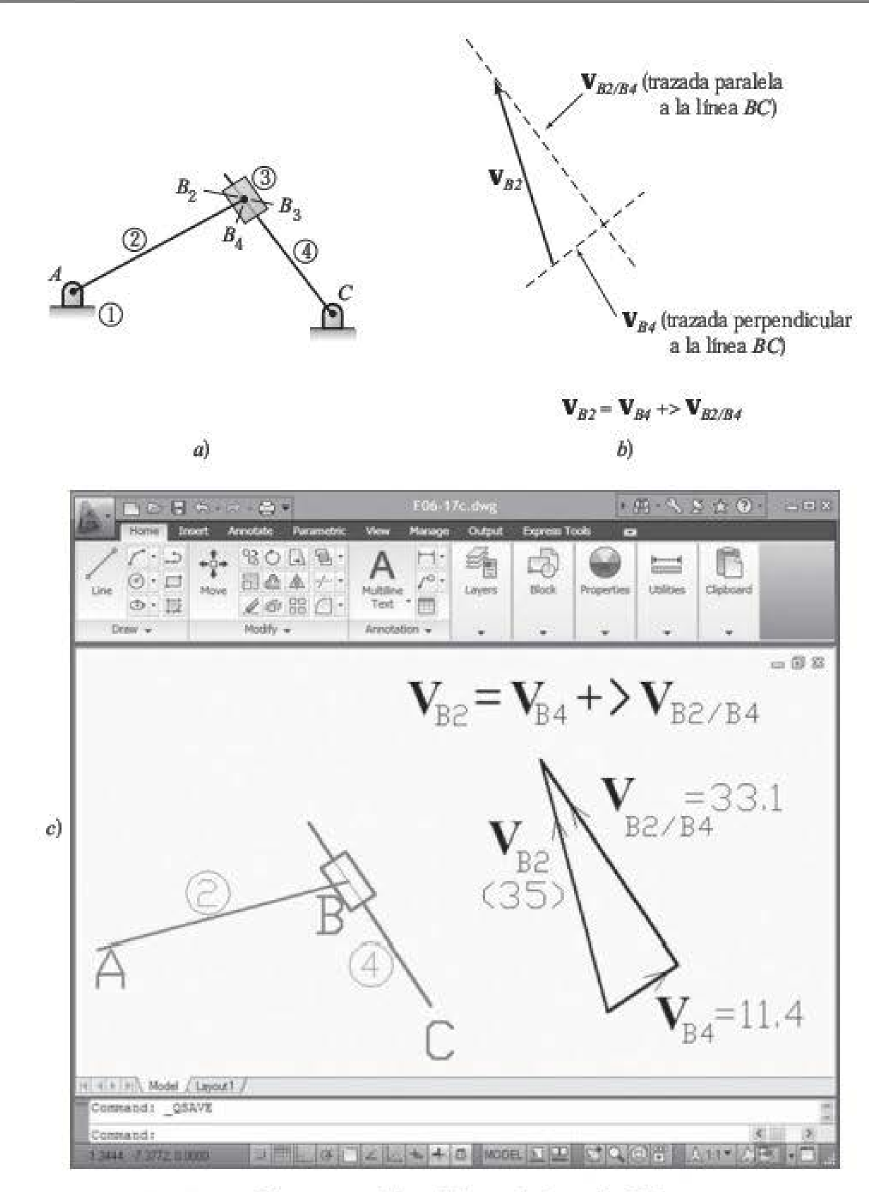


FIGURA 6.17 Diagramas del problema de ejemplo 6.8.

2. ***Elija el método para obtener la velocidad deseada***

El problema es determinar la velocidad del cilindro hidráulico, el cual hará que el eslabón 2 gire a una velocidad de 5 rad/min en sentido antihorario. En términos del modelo cinemático, se debe determinar la velocidad de B_2 en relación con B_4.

Las velocidades de los puntos coincidentes se relacionan mediante la ecuación (6.9):

$$\mathbf{V}_{B2} = \mathbf{V}_{B4} + > \mathbf{V}_{B2/B4}$$

En esta ecuación, la magnitud de $\mathbf{V}_{B2}$ se calcula con la velocidad de giro del eslabón 2. Además, como los eslabones están restringidos al movimiento puro de rotación, las direcciones de $\mathbf{V}_{B2}$ y $\mathbf{V}_{B4}$ son perpendiculares a los eslabones 2 y 4, respectivamente.

Por último, como B_2 y B_4 están unidos a través de la unión de corredera, y se conoce la dirección de la corredera, la velocidad relativa, $v_{B2/B4}$, debe ser a lo largo de la dirección de deslizamiento. Por consiguiente, se tiene la información suficiente para construir el polígono de velocidad.

3. ***Determine la velocidad del punto de entrada (punto*** $\mathbf{B_2}$***)***

La velocidad de B_2 se calcula de la manera siguiente:

$$v_{B2} = \omega_2 r_{AB2} = \left(5 \text{ rad/min}\right)(7 \text{ ft}) = 35 \text{ ft/min}$$

La dirección de la velocidad del punto B_2 es perpendicular al eslabón 2, que es hacia arriba a la izquierda.

4. ***Determine la velocidad del punto sobre el seguidor (punto B_4)***

El polígono vectorial que sirve para resolver tal problema se muestra en la figura 6.17b. Las magnitudes se determinan examinando la intersección de las líneas correspondientes de v_{B4} y $v_{B2/B4}$.

5. ***Mida las velocidades deseadas en el polígono***

Las magnitudes de las velocidades se pueden medir con la escala adecuada, en el diseño de CAD de la figura 6.17c, para obtener:

$$\mathbf{V}_{B2/B4} = 33.1 \text{ ft/min } \; 56^\circ \nwarrow$$

$$\mathbf{V}_{B4} = 11.4 \text{ ft/min } \; \angle 34^\circ$$

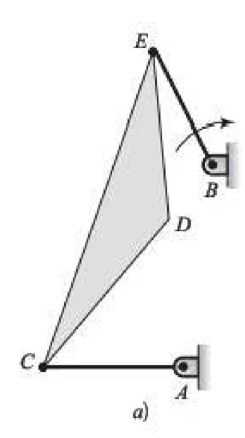
Por lo tanto, en este instante el cilindro se debe extender a una velocidad de 33 ft/min para mantener inclinada la plataforma a una velocidad de 5 rad/min.

6.7 IMAGEN DE VELOCIDAD

Una propiedad valiosa en el análisis de velocidad es que cada eslabón en un mecanismo tiene una imagen en el polígono de velocidad. Para ilustrarlo, en la figura 6.18a se presenta un mecanismo asociado con su diagrama de velocidad.

Revise el triángulo dibujado usando las terminales de los tres vectores de velocidad absoluta. Este triángulo se formó con dimensiones proporcionales del eslabón flotante mismo girado 90°. La forma en el polígono de velocidad se conoce como *imagen de velocidad* del eslabón. La imagen de velocidad del eslabón 5 del problema de ejemplo 6.7 se ilustra en la figura 6.15d.

Si inicialmente se conoce este concepto de imagen de velocidad, el proceso de solución se reduce de manera significativa. Una vez que se determina la velocidad de dos puntos sobre el eslabón, la velocidad de cualquier otro punto que se encuentre sobre el eslabón se determina con facilidad. Los dos puntos se utilizan como base de la imagen de velocidad. La forma del eslabón se dibuja a escala y se construye sobre el polígono de velocidad. Se debe tener cuidado, sin embargo, de no invertir la forma del eslabón entre el diagrama cinemático y el polígono de velocidad.



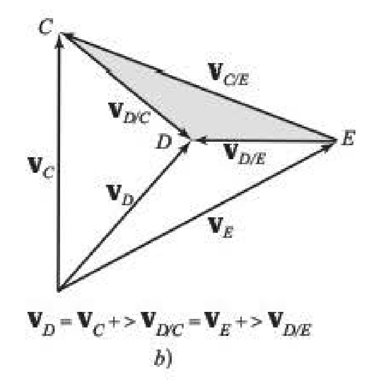


FIGURA 6.18 Imagen de velocidad.

6.8 ESTUDIO ANALÍTICO DE VELOCIDAD: MÉTODO DE LA VELOCIDAD RELATIVA

El estudio analítico de velocidad involucra exactamente la misma lógica empleada en el análisis gráfico. Los polígonos vectoriales se crean de acuerdo con las ecuaciones de velocidad relativa apropiadas. Cuando se utilizan las técnicas analíticas, la exactitud del polígono no tiene mayor importancia; no obstante, una escala, inclusive burda, permite entender las soluciones. Las ecuaciones vectoriales se resuelven empleando las técnicas analíticas estudiadas en el capítulo 3.

En los siguientes problemas de ejemplo se presentan soluciones analíticas.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.9

La figura 6.19 ilustra una bomba de pozo rudimentaria que es común en áreas poco desarrolladas. Para maximizar el flujo de agua, el pistón debería moverse hacia arriba a una velocidad de 50 mm/s. En la posición que se muestra, determine la velocidad angular que debe aplicarse en el mango para lograr la velocidad deseada del pistón.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

La figura 6.20a muestra el diagrama cinemático de este mecanismo. Observe que es una variación del mecanismo de manivela-corredera con un grado de libertad. El eslabón 2 representa el mango, de manera que el objetivo de este problema es determinar ω_2.

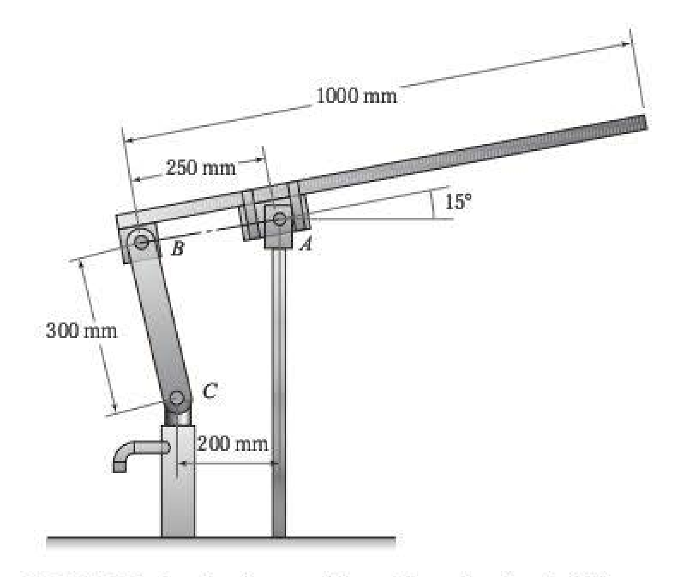


FIGURA 6.19 Bomba de pozo del problema de ejemplo 6.9.

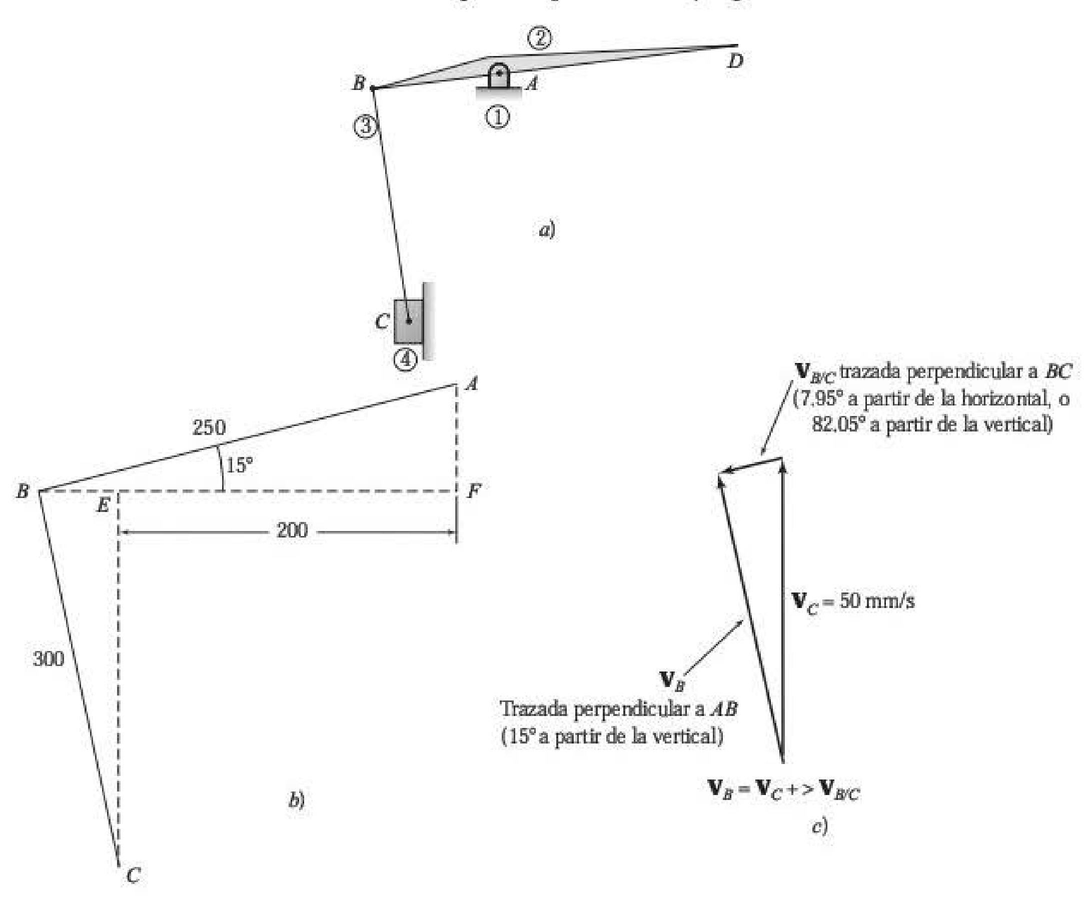


FIGURA 6.20 Diagramas del problema de ejemplo 6.9.

2. ***Analice la geometría del mecanismo***

La figura 6.20b aísla la geometría de los eslabones principales del mecanismo. Observe que se utilizó esta geometría para formar dos triángulos rectángulos. Al enfocarse en el triángulo superior *ABF* y emplear las funciones trigonométricas, se determina la longitud de los lados *BF* y *AF*.

$$BF = (250 \text{ mm}) \cos 15° = 241.48 \text{ mm}$$

$$AF = (250 \text{ mm}) \text{ sen } 15° = 64.70 \text{ mm}$$

La longitud de *BE* se calcula de la manera siguiente:

$$BE = BF - EF = 241.48 \text{ mm} - 200 \text{ mm} = 41.48 \text{ mm}$$

Al enfocarse en el triángulo inferior, el ángulo interior en C se calcula como:

$$\angle BCE = \text{sen}^{-1}\left(\frac{41.48}{300}\right) = 7.95°$$

3. ***Construya el polígono de velocidad***

Para obtener la velocidad angular del eslabón 2, se tiene que determinar la velocidad lineal del punto B, el cual se encuentra en el eslabón 2. El eslabón 3 es de interés especial, porque contiene tanto el punto C (velocidad conocida) como el punto B (velocidad desconocida).

Como el eslabón 2 está sujeto a la bancada en A, el punto B está restringido a girar alrededor de A. Por lo tanto, la velocidad del punto B es perpendicular a la línea AB. Además, como los puntos B y C se encuentran sobre el mismo eslabón (eslabón 3), la velocidad relativa de B con respecto a C es perpendicular a la línea BC.

A partir de los dos enunciados anteriores, se conocen las direcciones de las velocidades $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{B/C}$. La velocidad $\mathbf{V}_B$ es perpendicular a AB, 15° a partir de la vertical. La velocidad $\mathbf{V}_{B/C}$ es perpendicular a BC, 7.95° a partir de la horizontal, o bien, $90° - 7.95° = 82.05°$ a partir de la vertical. Tales velocidades se relacionan con la ecuación (6.10):

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C +> \mathbf{V}_{B/C}$$

En esta ecuación, tan solo se desconocen las magnitudes de $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{B/C}$. El polígono vectorial que se utiliza para solucionar el problema se ilustra en la figura 6.20c. Las magnitudes se pueden determinar si se obtiene la longitud de los lados (magnitudes vectoriales) del triángulo.

El ángulo interior restante de este triángulo vectorial es

$$180° - 82.05° - 15° = 82.95°$$

4. ***Calcule la velocidad del punto* B**

Se utiliza la ley de los senos para determinar las magnitudes vectoriales:

$$\mathbf{V}_{B/C} = \mathbf{V}_C\left(\frac{\text{sen } 15°}{\text{sen } 82.95°}\right) = 13.04 \text{ mm/s } \overline{7.95°}\!\swarrow$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C\left(\frac{\text{sen } 82.05°}{\text{sen } 82.95°}\right) = 49.90 \text{ mm/s } 15°\!\nwarrow = 49.9 \text{ mm/s } \underline{75°}\!\nwarrow$$

5. ***Determine la velocidad angular del eslabón 2***

Ahora que se determinó la velocidad de B, se obtiene la velocidad angular del eslabón 2. Observe que, en congruencia con la dirección de $\mathbf{V}_B$, el eslabón 2 debe girar en sentido horario:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_{AB}} = \frac{49.9 \text{ mm/s}}{250 \text{ mm}} = 0.20 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

Este resultado se convierte a rpm de la manera siguiente:

$$\omega\left(\text{rev/min}\right) = \frac{30}{\pi}\left[\omega\left(\text{rad/s}\right)\right] = \frac{30}{\pi}[0.20 \text{ rad/s}] = 1.9 \text{ rpm, en sentido horario}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.10

La figura 6.21 muestra la banda transportadora de un camión repartidor para colocar material en un techo. Se transportan materiales pesados de la banda transportadora al techo. La banda transportadora se eleva hacia su posición, extendiendo el brazo de un cilindro hidráulico. En este instante, el cilindro se extiende a una velocidad de 8 fpm (ft/min). Determine la velocidad a la que se eleva la banda transportadora.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

La figura 6.22a presenta el diagrama cinemático del mecanismo. El eslabón 4 representa la banda transportadora, el eslabón 2 representa el cilindro y el eslabón 3 representa la varilla/pistón. Como se usa una unión de corredera para conectar dos eslabones giratorios, la definición de los puntos coincidentes ayudará a la solución del problema. El punto B_2 está sujeto al eslabón 2; mientras el punto B_4 está sujeto, como punto de referencia, al eslabón 4. El objetivo del problema es determinar ω_4.

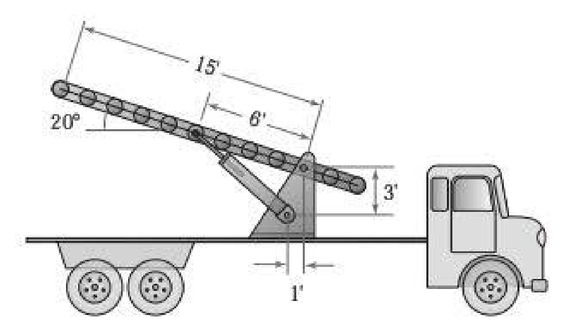


FIGURA 6.21 Banda transportadora del problema de ejemplo 6.10.

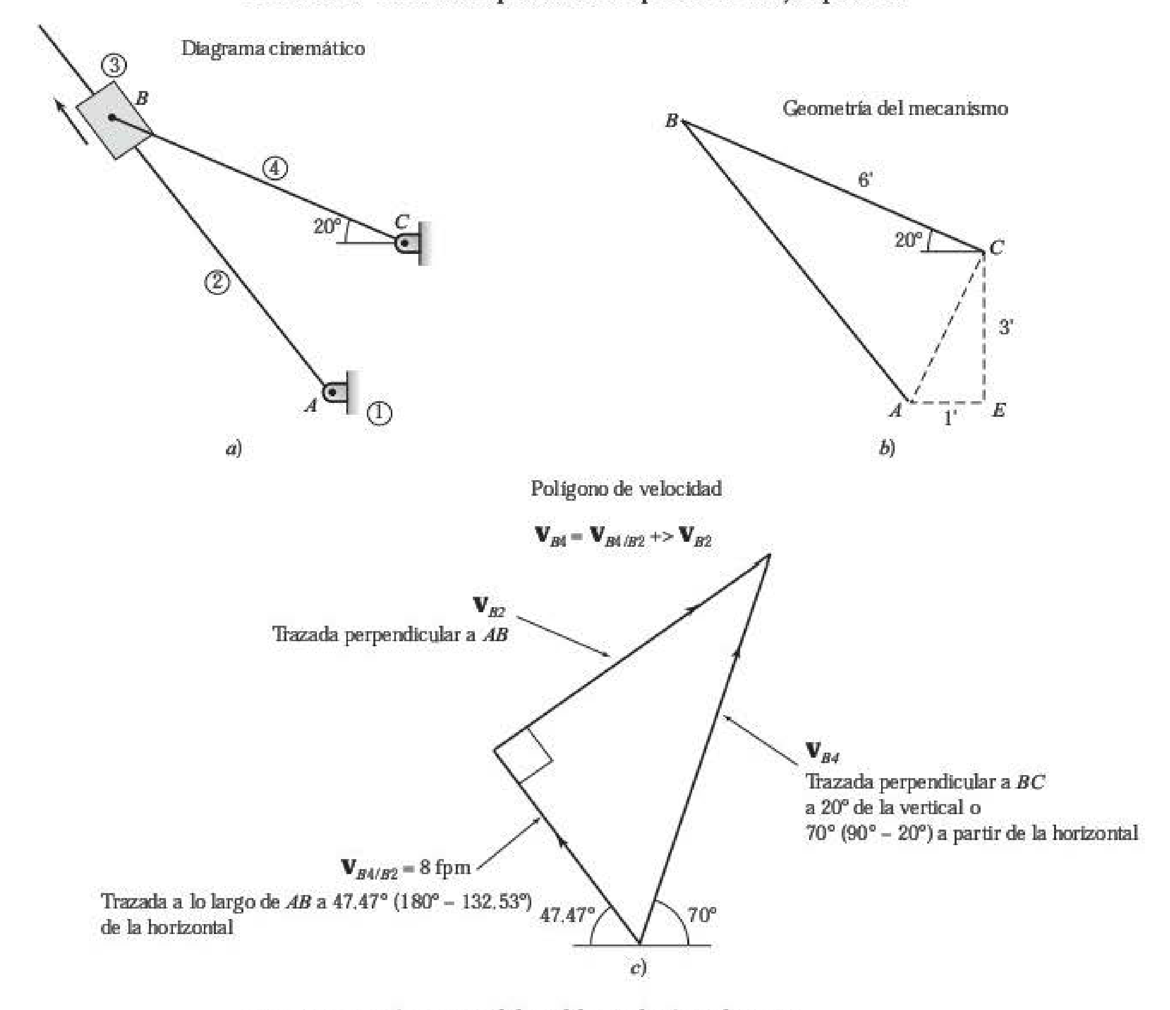


FIGURA 6.22 Diagramas del problema de ejemplo 6.10.

2. ***Analice la geometría del mecanismo***

La figura 6.22b aísla la geometría de los eslabones principales del mecanismo. Observe que se utilizó esta geometría para formar dos triángulos. Al enfocarse en el triángulo de abajo a la derecha, *ACE*, se obtiene lo siguiente:

$$AC = \sqrt{[AE^2 + CE^2]}$$

$$= \sqrt{(1\text{ ft})^2 + (3\text{ ft})^2} = 3.16\text{ ft}$$

$$\angle CAE = \tan^{-1}\left(\frac{CE}{AE}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\text{ ft}}{1\text{ ft}}\right) = 71.57°$$

$$\angle ACE = \tan^{-1}\left(\frac{AE}{CE}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1\text{ ft}}{3\text{ ft}}\right) = 18.43°$$

Como el eslabón 4 está inclinado 20° por encima de la horizontal, el ángulo total en C es

$$\angle BCE = 90° + 20° = 110°$$

luego entonces, el ángulo en C en el triángulo superior es

$$\angle ACB = \angle BCE - \angle ACE = 110° - 18.43° = 91.57°$$

La geometría del triángulo superior se determina con la ley de los cosenos

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos\angle ACB}$$

$$= \sqrt{(3.16 \text{ ft})^2 + (6 \text{ ft})^2 - 2(3.16 \text{ ft})(6 \text{ ft})\cos 91.57°} = 6.86 \text{ ft}$$

y la ley de los senos

$$\angle BAC = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{6 \text{ ft}}{6.86 \text{ ft}}\right)\text{sen } 91.57°\right\} = 60.96°$$

$$\angle CBA = \text{sen}^{-1}\left\{\left(\frac{3.16 \text{ ft}}{6.86 \text{ ft}}\right)\text{sen } 91.57°\right\} = 27.42°$$

Finalmente, el ángulo incluido total en A es

$$\angle BAE = \angle CAE + \angle BAC = 71.57° + 60.96° = 132.53°$$

3. ***Elabore un polígono de velocidad***

Para obtener la velocidad angular del eslabón 2, se debe determinar la velocidad lineal del punto B_2, el cual se encuentra en el eslabón 2. Se conoce la extensión del cilindro hidráulico, la cual representa la velocidad del punto B sobre el eslabón 4, en relación con el punto B sobre el eslabón 2 ($\mathbf{V}_{B4/B2}$). Se pueden relacionar estas velocidades usando la ecuación (6.10):

$$\mathbf{V}_{B4} = \mathbf{V}_{B4/B2} +> \mathbf{V}_{B2}$$

Como el eslabón 4 está sujeto a la bancada en C, el punto B_4 está restringido a girar alrededor de C. Por lo tanto, la velocidad del punto B_4 es perpendicular a la línea BC.

Asimismo, el eslabón 2 está sujeto a la bancada en A y el punto B_2 está restringido a girar alrededor de A. Por consiguiente, la velocidad del punto B_2 es perpendicular a la línea AB.

A partir de los dos enunciados anteriores, se conocen las direcciones de las velocidades $\mathbf{V}_{B4}$ y $\mathbf{V}_{B2}$.

El polígono vectorial que se utiliza para resolver este problema se muestra en la figura 6.22c. Observe que los vectores forman un triángulo rectángulo. Las magnitudes se determinan al obtener la longitud de los lados (magnitudes vectoriales) del triángulo rectángulo.

El ángulo interior inferior de este triángulo vectorial es

$$180° - 70° - 47.47° = 62.53°$$

4. ***Calcule la velocidad del punto* B**

La velocidad de B_2 se calcula a partir de las siguientes relaciones trigonométricas de un triángulo rectángulo:

$$\mathbf{V}_{B4} = \left(\frac{\mathbf{V}_{B4/B2}}{\cos 62.53°}\right) = 17.43 \text{ ft/min} \angle 70°$$

5. ***Determine la velocidad angular del eslabón 2***

Ahora que se conoce la velocidad de B_4, se obtiene la velocidad angular del eslabón 4. Observe que por congruencia con la dirección de v_{B4}, el eslabón 4 debe girar en sentido horario:

$$\omega_4 = \frac{v_{B4}}{r_{BC}} = \frac{17.43 \text{ ft/min}}{6 \text{ ft}} = 2.89 \text{ rad/min, en sentido horario}$$

Este resultado se convierte a rpm de la siguiente manera:

$$\omega_4 = \left(\frac{2.89 \text{ rad}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 0.46 \text{ rev/min, en sentido horario}$$

6.9 SOLUCIONES ALGEBRAICAS PARA MECANISMOS COMUNES

En el caso de los mecanismos comunes de manivela-corredera y de cuatro barras, se han desarrollado soluciones algebraicas de forma cerrada [ref. 12] y se estudian en las siguientes secciones.

6.9.1 Mecanismo de manivela-corredera

En la figura 4.19 se presenta un mecanismo general de manivela-corredera que está definido únicamente por las dimensiones L_1, L_2 y L_3. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo θ_2, ω_2 y la posición de todos los eslabones, se determinan las velocidades de los otros eslabones con las ecuaciones (4.6) y (4.7). Como se vio en el capítulo 4, las ecuaciones de posición son

$$\theta_3 = \operatorname{sen}^{-1}\left\{\frac{L_1 + L_2 \operatorname{sen}\theta_2}{L_3}\right\} \tag{4.6}$$

$$L_4 = L_2\cos(\theta_2) + L_3\cos(\theta_3) \tag{4.7}$$

Las ecuaciones de velocidad son las siguientes [refs. 10, 11, 12, 14]:

$$\omega_3 = -\omega_2\left(\frac{L_2\cos\theta_2}{L_3\cos\theta_3}\right) \tag{6.12}$$

$$v_4 = -\omega_2 L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \omega_3 L_3 \operatorname{sen}\theta_3 \tag{6.13}$$

6.9.2 Mecanismo de cuatro barras

En la figura 4.23 se ilustra un mecanismo general de cuatro barras, definido únicamente por las dimensiones L_1, L_2, L_3 y L_4. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo θ_2, ω_2, y la posición de todos los eslabones, se determinan las velocidades de los otros eslabones con las ecuaciones (4.9) a (4.12). Como se vio en el capítulo 4, las ecuaciones de posición son las siguientes:

$$BD = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2(L_1)(L_2)\cos\theta_2} \tag{4.9}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left[\frac{(L_3)^2 + (L_4)^2 - (BD)^2}{2(L_3)(L_4)}\right] \tag{4.10}$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-L_2\operatorname{sen}\theta_2 + L_4\operatorname{sen}\gamma}{L_1 + L_3 - L_2\cos\theta_2 - L_4\cos\gamma}\right] \tag{4.11}$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{L_2\operatorname{sen}\theta_2 - L_3\operatorname{sen}\gamma}{L_2\cos\theta_2 + L_4 - L_1 - L_3\cos\gamma}\right] \tag{4.12}$$

Las ecuaciones de velocidad son las siguientes [refs. 10, 11, 12, 14]:

$$\omega_3 = -\omega_2\left[\frac{L_2\operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{L_3\operatorname{sen}\gamma}\right] \tag{6.14}$$

$$\omega_4 = -\omega_2\left[\frac{L_2\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{L_4\operatorname{sen}\gamma}\right] \tag{6.15}$$

6.10 CENTRO DE ROTACIÓN INSTANTÁNEO

Al calcular la velocidad de los puntos sobre un mecanismo, se utiliza el concepto de centros instantáneos como un método alternativo al método de velocidad relativa. Este enfoque se basa en el hecho de que cualquier eslabón, sin importar la complejidad de su movimiento, parece estar instantáneamente en rotación pura con respecto a un punto determinado. Este punto pivote instantáneo se conoce como *centro instantáneo* de rotación de un eslabón en particular. En la figura 6.23 se muestra como (13) el centro instantáneo, en relación con la bancada, de un eslabón flotante, es decir, el eslabón 3.

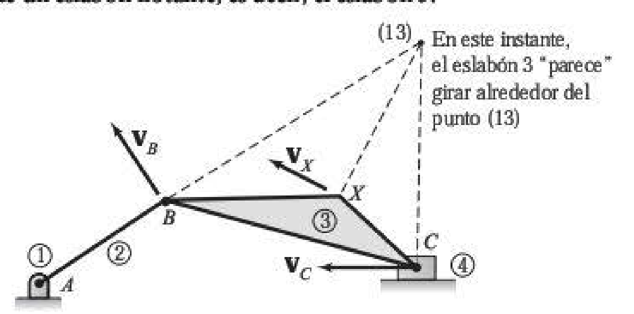


FIGURA 6.23 Centro instantáneo.

Mediante este concepto se analiza cada eslabón como si estuviera experimentando rotación pura. El centro instantáneo puede estar dentro o fuera del cuerpo, y su posición no es fija en el tiempo. Conforme el eslabón se mueve, su centro instantáneo también lo hace. Sin embargo, las velocidades de los diferentes puntos de un mecanismo también son instantáneas. De manera que este hecho no representa una restricción seria para el análisis.

Este concepto también se aplica al movimiento relativo, es decir, el movimiento de cualquier eslabón, en relación con cualquier otro eslabón, instantáneamente parece estar solo girando alrededor de un punto determinado. De nuevo, el punto pivote imaginario se conoce como centro instantáneo entre los dos eslabones. Por ejemplo, si dos eslabones estuvieran diseñados como 1 y 3, el centro instantáneo sería el punto donde el eslabón 3 instantáneamente parece girar en relación con el eslabón 1. Este centro instantáneo se designa como (13) y se expresa en palabras como "uno tres", no como trece. Observe que el centro instantáneo, mostrado en la figura 6.23, fue designado como (13). Si el eslabón 1 fuera la bancada, como es la designación típica, este centro instantáneo describiría el movimiento absoluto del eslabón 3. Considerando la inversión cinemática, este punto también es el centro del movimiento instantáneo del eslabón 1 en relación con el eslabón 3. Por ende, el centro instantáneo (13) es lo mismo que el centro instantáneo (31).

Como en cada eslabón hay un centro instantáneo con cada uno de los otros eslabones, todos los mecanismos tienen varios centros instantáneos. El número total de centros instantáneos de un mecanismo de n eslabones es

$$\text{Número total de centros instantáneos} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{6.16}$$

6.11 LOCALIZACIÓN DE CENTROS INSTANTÁNEOS

En un análisis típico, es raro que se utilicen todos los centros instantáneos. No obstante, se debería conocer el proceso de localización de cada centro porque se podría utilizar cualquier centro.

6.11.1 Centros principales

Algunos centros instantáneos se localizan simplemente examinando el mecanismo. Dichos centros se conocen como *centros principales*. Para ubicarlos se deben seguir las reglas siguientes:

1. Cuando dos eslabones están conectados por una unión de perno, el centro instantáneo que une los dos eslabones es este punto pivote. La primera regla se ilustra en la figura 6.24a.
2. El centro instantáneo de dos eslabones en contacto de rodamiento sin deslizamiento se ubica en el punto de contacto. La segunda regla se ilustra en la figura 6.24b.
3. El centro instantáneo de dos eslabones en contacto de deslizamiento en línea recta está en el infinito, en dirección perpendicular a la dirección de deslizamiento. La velocidad de todos los puntos de un eslabón, restringido a movimiento de deslizamiento lineal en relación con otro eslabón, es idéntica para todos los puntos, en dirección del deslizamiento. Por lo tanto, es posible imaginar que este movimiento recto es de rotación alrededor de un punto que se encuentra a una gran distancia, ya que una línea recta puede modelarse como la parte de un círculo con un radio de tamaño infinito. Como la velocidad siempre es perpendicular a la línea trazada hacia el pivote, este centro instantáneo debe ser perpendicular a la dirección de deslizamiento. Hay que considerar que este centro se encuentra sobre cualquier línea perpendicular a la dirección del desplazamiento, porque las líneas se juntan en el infinito. La tercera regla se ilustra en la figura 6.24c.
4. El centro instantáneo de dos eslabones con un contacto de deslizamiento completo se encuentra en algún lado de la línea normal a la dirección del deslizamiento. La cuarta regla se ilustran en la figura 6.24d.

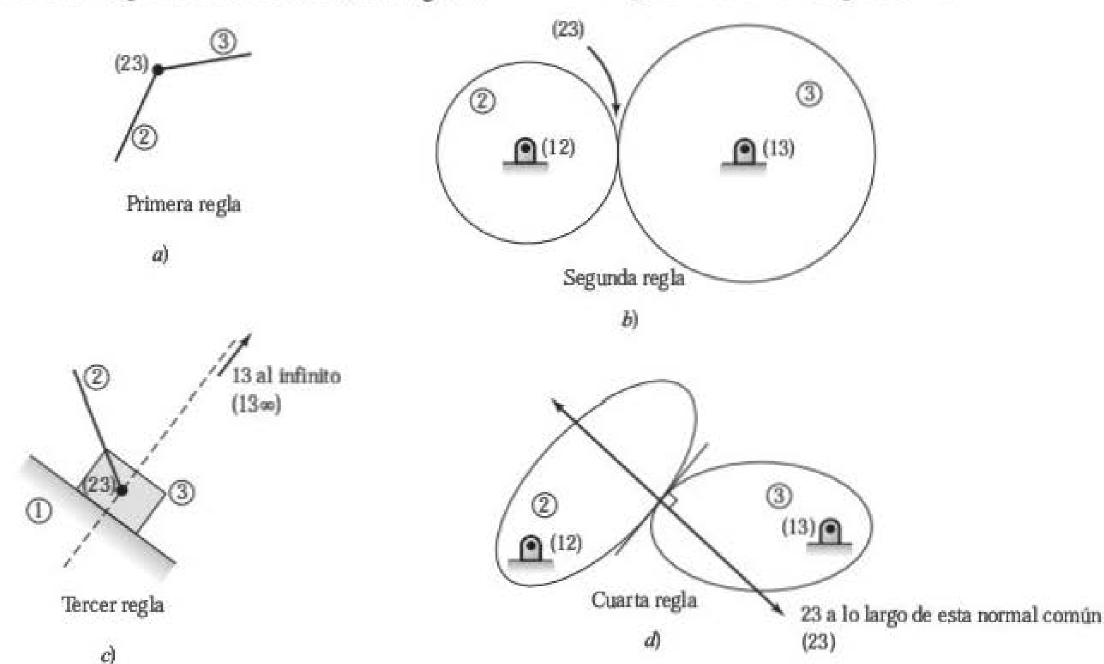


FIGURA 6.24 Localización de los centros principales.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.11

La figura 6.25 ilustra el mecanismo de un compresor de aire. Localice todos los centros instantáneos principales de este mecanismo.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático***

En la figura 6.26 se presenta el diagrama cinemático del compresor de aire.

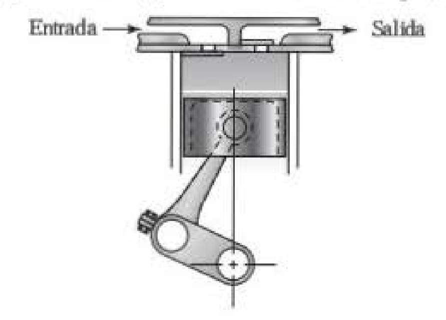


FIGURA 6.25 Compresor de aire del problema de ejemplo 6.11.

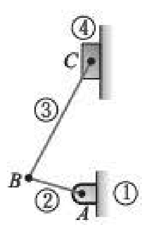


FIGURA 6.26 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.11.

2. ***Aplique la primera regla para localizar los centros principales***

   Se numeran los cuatro eslabones del diagrama cinemático. Las uniones de perno se identifican con letras. La primera unión de perno, *A*, conecta el eslabón 1 y el eslabón 2. Considerando la primera regla de los centros instantáneos principales, esta unión es la ubicación del centro instantáneo (12). Asimismo, la unión de perno *B* es el centro instantáneo (23) y la unión de perno *C* es el centro instantáneo (34).

   En el diagrama cinemático de la figura 6.26 resulta evidente que no hay contacto de rodamiento en ningún eslabón. Por lo tanto, la segunda regla no se aplica en este mecanismo.

3. ***Aplique la tercera regla para localizar centros principales***

   Como hay una unión de deslizamiento lineal entre los eslabones 4 y 1, este centro instantáneo se visualiza en el infinito, en dirección perpendicular a la dirección del deslizamiento. La figura 6.27 muestra la notación que se utiliza para identificarlo, junto con la identificación de los demás centros instantáneos principales. Recuerde que este centro instantáneo podría estar sobre una línea paralela a la línea (14 ∞), ya que se podría considerar que las líneas paralelas se intersecan en el infinito.

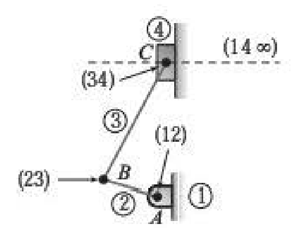


FIGURA 6.27 Centros instantáneos principales del problema de ejemplo 6.11.

En el diagrama cinemático de la figura 6.26 se percibe claramente que no hay uniones de deslizamiento general. Por lo tanto, no se aplica la cuarta regla a este mecanismo.

6.11.2 Teorema de Kennedy

Los centros instantáneos que no se pueden ubicar a partir de las cuatro reglas de centros principales, se localizan aplicando el *teorema de Kennedy*, que establece lo siguiente:

> *Los tres centros instantáneos correspondientes a tres cuerpos cualesquiera permanecen sobre la misma recta.*

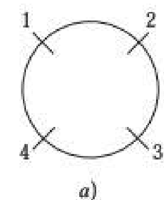
Por ejemplo, imagine tres eslabones cualesquiera (eslabones 3, 4 y 5). El teorema de Kennedy establece que los centros instantáneos (34), (45) y (35) permanecen sobre una línea recta. Con la aplicación de este teorema, después de localizar los centros instantáneos principales, se pueden determinar los demás centros instantáneos. La ubicación precisa de los centros instantáneos se realiza usando métodos gráficos o analíticos. Desde luego, los métodos gráficos incluyen tanto técnicas manuales de dibujo como el CAD.

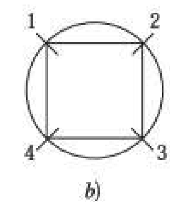
6.11.3 Diagrama de centros instantáneos

Un diagrama de centros instantáneos es una técnica gráfica que se utiliza para ubicar tanto los centros instantáneos, que ya se hayan localizado, como aquellos que aún necesitan definirse. Asimismo, señala las combinaciones de centros instantáneos que es posible utilizar en la aplicación del teorema de Kennedy. Es raro que se necesite localizar todos los centros instantáneos para ejecutar un análisis de velocidad. Se deben estudiar el mecanismo y el (los) eslabón(es) impulsor(es), así como la salida requerida para determinar los centros instantáneos específicos que se requieren, de manera que el diagrama de centros instantáneos se utiliza para calcular los centros instantáneos específicos.

El diagrama de centros instantáneos es un círculo dividido en segmentos: uno por cada eslabón del mecanismo que se analiza. Los separadores de segmentos se identifican con los números correspondientes a los eslabones. En la figura 6.28a se muestra un diagrama de centros instantáneos para un mecanismo de cuatro barras.

Cualquier línea que une dos puntos del diagrama representa un centro instantáneo, que vincula los dos eslabones identificados por los puntos de los extremos. Por ejemplo, la línea que une el punto 1 y el punto 4, representa el centro instantáneo (14). Para los centros instantáneos ya localizados, la línea correspondiente del diagrama se marca con una línea continua. La figura 6.28b indica que ya se localizaron los centros instantáneos (12), (23), (34) y (14). Entonces, los centros instantáneos que necesitan identificarse pueden representarse con líneas punteadas. La figura 6.28c muestra que los centros instantáneos (13) y (24) aún no se han encontrado. Todos los centros instantáneos





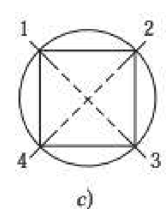


FIGURA 6.28 Diagrama de centros instantáneos.

se localizan cuando cada punto se conecta con cada uno de los demás puntos.

Observe que las líneas en el diagrama forman triángulos, cada uno de los cuales representa tres centros instantáneos, que relacionan los tres eslabones en los vértices. De acuerdo con el teorema de Kennedy, los tres centros instantáneos representados por los lados de un triángulo deben permanecer en una línea recta. Por ejemplo, examine la figura 6.28c, luego aísle el triángulo formado por las líneas (12), (23) y (13). El teorema de Kennedy establece que estos tres centros instantáneos deben ser colineales.

Si dos lados del triángulo están dibujados con una línea continua, se traza una línea sobre el diagrama del mecanismo para unir los dos centros instantáneos conocidos. Esta línea contiene el tercer centro instantáneo. Si se puede dibujar una segunda línea, la intersección de las dos líneas ubicará el tercer centro. Para resumir, con el propósito de localizar un centro instantáneo, se deben construir dos triángulos en el diagrama con dos lados conocidos y, como lado desconocido, el centro instantáneo que se busca.

Los siguientes problemas de ejemplo ilustran el procedimiento para obtener todos los centros instantáneos.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.12

La figura 6.29 muestra una braza con autobloqueo en una plataforma que se utiliza en muelles de embarque. Localice todos los centros instantáneos del mecanismo.

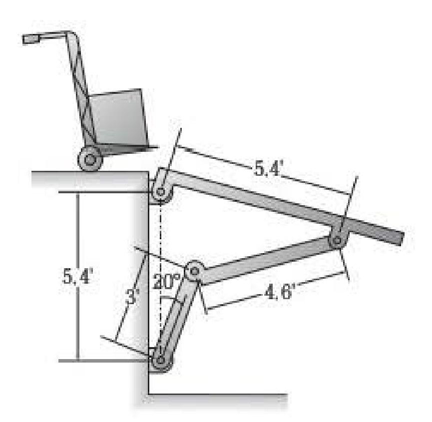


FIGURA 6.29 Braza de autobloqueo del problema de ejemplo 6.12.

SOLUCIÓN:

1. ***Dibuje el diagrama cinemático***

El diagrama cinemático de la plataforma de carga se muestra en la figura 6.30a. En el diagrama cinemático se numeran los cuatro eslabones. Las uniones de perno se identifican con letras. Se calcula el número total de centros instantáneos, con $n = 4$ eslabones, de la siguiente manera:

$$\text{Número total de centros instantáneos} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

2. ***Elabore un diagrama de centros instantáneos***

En la figura 6.30b se presenta el diagrama de centros instantáneos. Es posible utilizar la tabla 6.1 para listar sistemáticamente todos los centros instantáneos del mecanismo.

3. ***Localice los centros instantáneos principales***

La primera unión de perno, A, conecta los eslabones 1 y 2. Si se aplica la primera regla de los centros instantáneos principales, esta unión es la ubicación del centro instantáneo (12). De manera similar, las uniones de perno B, C y D son los centros instantáneos (23), (34) y (14), respectivamente. En la figura 6.30c se vuelve a dibujar el diagrama de centros instantáneos para reflejar la localización de los centros instantáneos principales (12), (23), (34) y (14). Los centros instantáneos (13) y (24) están sin determinar.

4. ***Utilice el teorema de Kennedy para localizar el centro instantáneo (13)***

El diagrama de centros instantáneos que se empleó para obtener (13) se muestra en la figura 6.30d. Ahora hay que enfocarse en el triángulo de abajo formado por (13), (14) y (34). Si se aplica el teorema de Kennedy, (13)

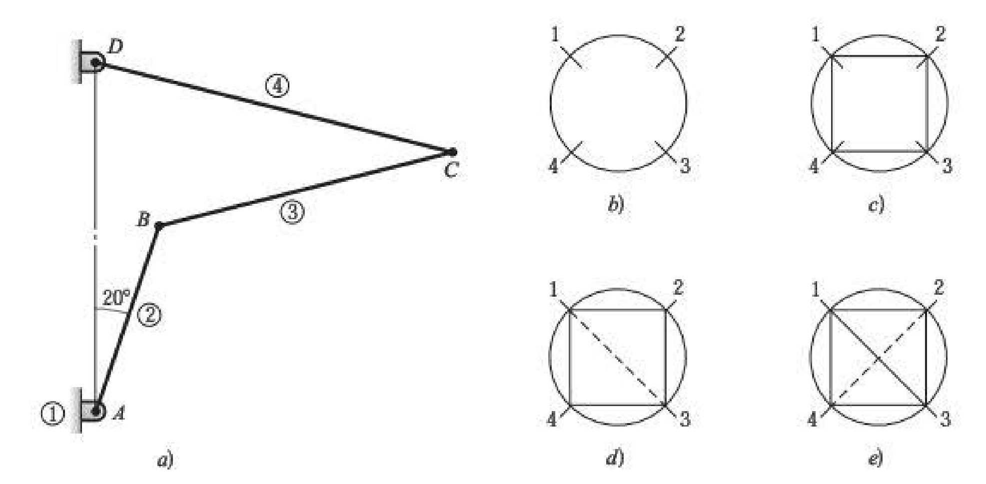


FIGURA 6.30 Diagrama cinemático y centros instantáneos del problema de ejemplo 6.12.

TABLA 6.1 Centros instantáneos posibles de un mecanismo ($n = 4$)

1	2	3	4
12	23	34	
13	24		
14			

debe permanecer sobre la recta formada por (14) y (34), los cuales ya se localizaron, como lo indican las líneas continuas de la figura 6.30d.

Observe también el triángulo superior formado por (13), (12) y (23). De la misma manera, (13) debe permanecer también sobre una línea recta formada por (12) y (23), que fueron previamente localizados.

Por lo tanto, la intersección de estas líneas, (14)-(34) y (12)-(23), determinará la ubicación de (13). Recuerde que en este instante el eslabón 3 parece girar alrededor del punto (13).

5. ***Utilice el teorema de Kennedy para localizar (24)***

En la figura 6.30e se muestra el diagrama de centros instantáneos que se usó para obtener (24). En un proceso idéntico, el teorema de Kennedy establece que el centro instantáneo (24) debe permanecer sobre la misma línea que (14) y (12), los cuales ya fueron localizados. Asimismo, (24) debe permanecer también sobre la misma línea de (23) y (34), también localizados. Entonces si se traza una línea recta a través de (14) y (12), así como otra línea recta a través de (23) y (34), la intersección de tales líneas determinará la ubicación de (24). En este instante, el eslabón 2 parece girar, en relación con el eslabón 4, alrededor del punto (24).

La figura 6.31 presenta el mecanismo con todos los centros instantáneos localizados.

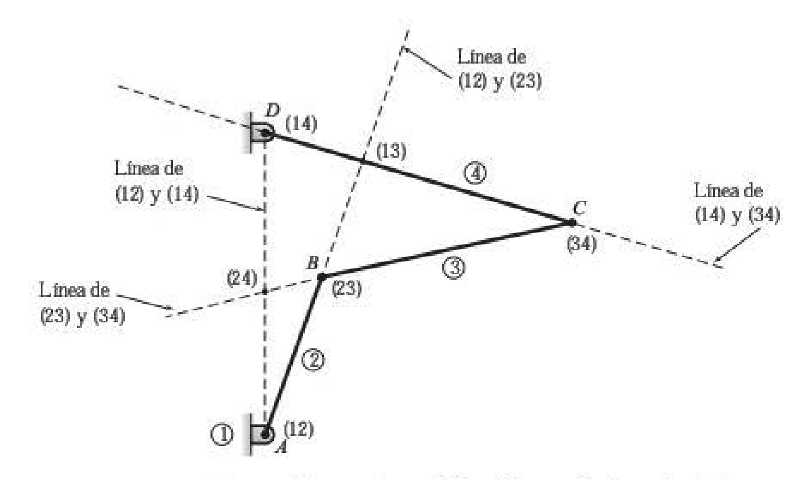


FIGURA 6.31 Centros instantáneos del problema de ejemplo 6.12.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.13

La figura 6.32 muestra un triturador de rocas. Localice todos los centros instantáneos de este mecanismo.

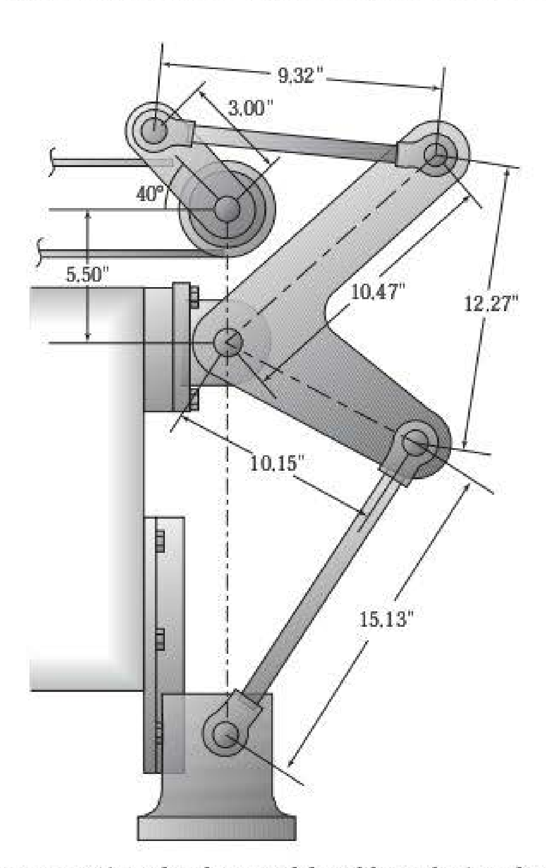


FIGURA 6.32 Triturador de rocas del problema de ejemplo 6.13.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático***

   En la figura 6.33a se ilustra el diagrama cinemático del triturador de rocas. Se numeran los seis eslabones del diagrama cinemático. Las uniones de perno se identifican con letras. Se calcula el número total de centros instantáneos, con $n = 6$ eslabones, como sigue:

$$\text{Número total de centros instantáneos} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

2. ***Elabore un diagrama de centros instantáneos***

   En la figura 6.33b se muestra el diagrama de centros instantáneos. La tabla 6.2 lista sistemáticamente todos los centros instantáneos posibles del mecanismo.

3. ***Localice los centros instantáneos principales***

   La primera unión de perno A conecta los eslabones 1 y 2. Aplicando la primera regla de los centros instantáneos principales, esta unión es la ubicación del centro instantáneo (12). Asimismo, las uniones de perno entre B y F ubican los centros instantáneos (23), (34), (14), (45) y (56), respectivamente.

   Como hay una unión de corredera lineal entre los eslabones 6 y 1, el centro instantáneo (16) se localiza en el infinito, sobre una línea perpendicular a la dirección del deslizamiento. Recuerde que este centro instantáneo podría estar sobre una línea paralela a esta línea porque las líneas paralelas se unen en el infinito. En la figura 6.33c se dibuja de nuevo el diagrama de centros instantáneos para localizar (12), (23), (34), (45), (56), (14) y (16).

4. ***Use el teorema de Kennedy para localizar los otros centros instantáneos***

   Las combinaciones faltantes que se necesita determinar son los centros instantáneos (13), (24), (35), (46), (25), (36), (15) y (26).

   En la figura 6.33d se presenta el diagrama de centros instantáneos que se utilizó para obtener (13). Ahora hay que enfocarse en el triángulo formado por (12), (23) y (13). Si se aplica el teorema de Kennedy, (13) debe permanecer sobre la línea recta formada por (12) y (23), los cuales ya han sido localizados, como indican las líneas continuas de la figura 6.33d.

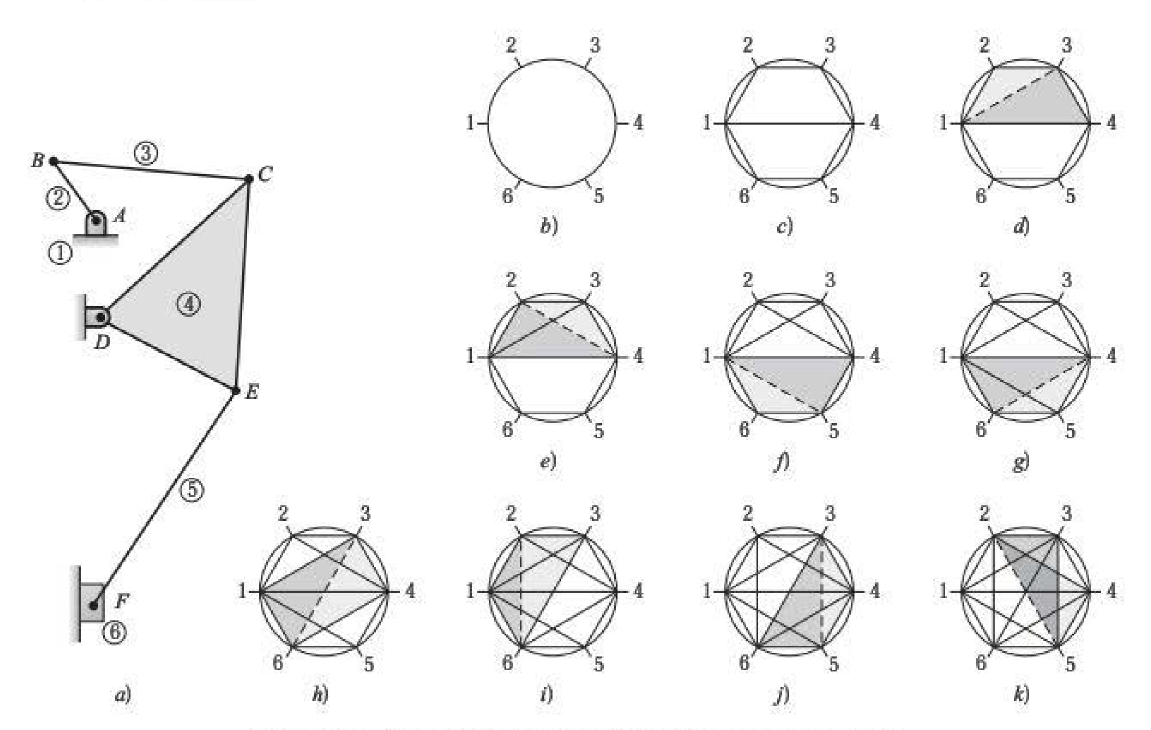


FIGURA 6.33 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.13.

TABLA 6.2 Centros instantáneos posibles de un mecanismo ($n = 6$)

1	2	3	4	5	6
12	23	34	45	56	
13	24	35	46		
14	25	36			
15	26				
16					

Observe también el triángulo formado por (13), (34) y (14). De manera similar, (13) debe permanecer también sobre la recta formada por (13) y (34), los cuales ya fueron localizados anteriormente. Entonces, la intersección de estas líneas, (12)-(23) y (13)-(34), determinarán la ubicación de (13).

La tabla 6.3 se formuló para localizar todos los centros instantáneos faltantes. Observe que el orden con que se obtienen los centros instantáneos depende considerablemente de cuáles son los centros instantáneos que ya se hayan localizado. Esto se vuelve un proceso bastante iterativo, pero el diagrama de centros instantáneos es valioso en la aplicación de este método. La figura 6.34 ilustra el mecanismo con todos los centros instantáneos localizados.

TABLA 6.3 Ubicaciones de los centros instantáneos del problema de ejemplo 6.13

Para localizar el centro instantáneo	Utilice las líneas que se intersecan	Diagrama de centro instantáneo
13	(12)-(23) y (14)-(34)	Figura 6.33d
24	(12)-(14) y (23)-(34)	Figura 6.33e
15	(16)-(56) y (14)-(45)	Figura 6.33f
46	(14)-(16) y (45)-(56)	Figura 6.33g
36	(13)-(16) y (34)-(46)	Figura 6.33h
26	(12)-(16) y (23)-(36)	Figura 6.33i
35	(56)-(36) y (34)-(45)	Figura 6.33j
25	(24)-(45) y (23)-(35)	Figura 6.33k

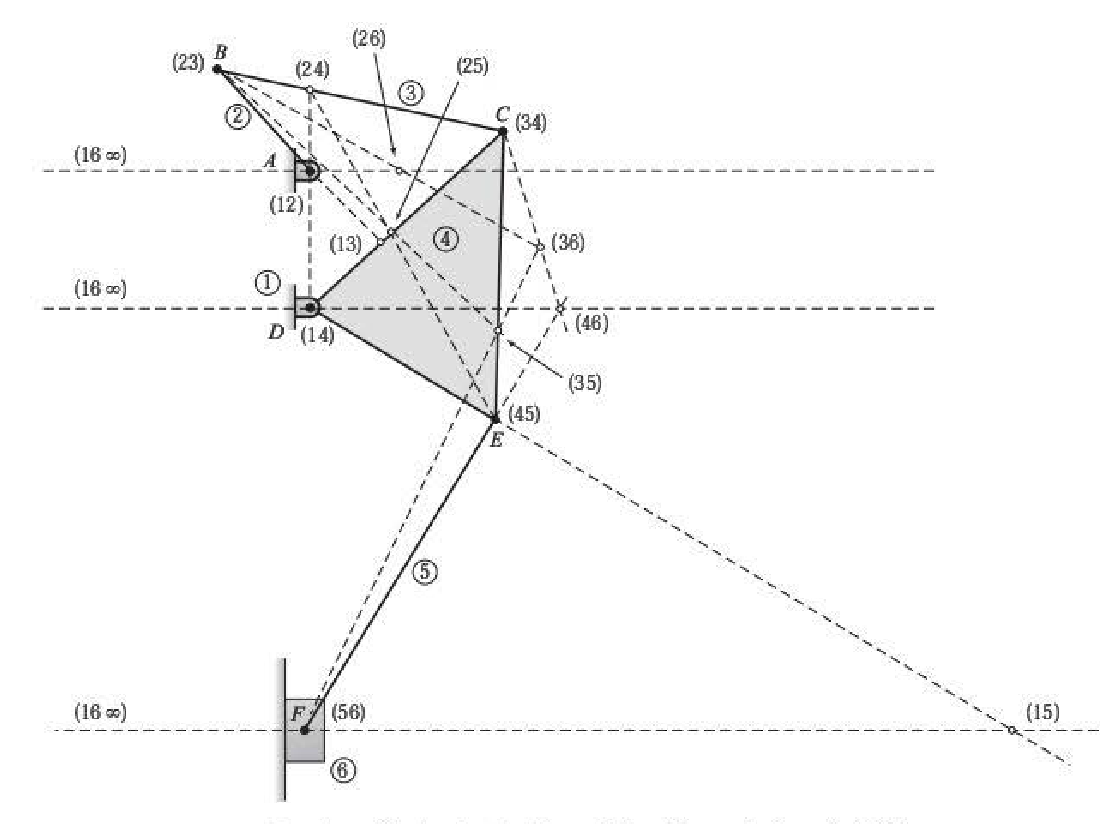


FIGURA 6.34 Centros instantáneos del problema de ejemplo 6.13.

6.12 ANÁLISIS GRÁFICO DE VELOCIDAD: MÉTODO DEL CENTRO INSTANTÁNEO

El método del centro instantáneo se basa en los siguientes tres principios:

I. La velocidad en un cuerpo que gira es proporcional a la distancia desde el punto pivote.

II. El centro instantáneo común a dos eslabones se puede considerar sujeto a cualquiera de ellos.

III. La velocidad absoluta del punto, que sirve como centro instantáneo común, es la misma, sin importar cuál eslabón se considere sujeto a ese punto.

Utilizando estos principios, la velocidad absoluta de cualquier punto sobre un mecanismo se obtiene fácilmente con un método general, el cual se describe en los siguientes seis pasos:

1. Aislar el eslabón de velocidad conocida (eslabón *A*), el eslabón que contiene el punto cuya velocidad se desea conocer (eslabón *B*) y el eslabón fijo (eslabón *C*).
2. Ubicar el centro instantáneo común al eslabón de velocidad conocida y el eslabón fijo (centro instantáneo *AC*).
3. Localizar el centro instantáneo común al eslabón de velocidad conocida y el eslabón que contiene el punto cuya velocidad se desea conocer (centro instantáneo *AB*).
4. Determine la velocidad del centro instantáneo (*AB*), si se sabe que la velocidad de un punto sobre un eslabón es proporcional a la distancia a partir del pivote. El centro instantáneo (*AC*) sirve como pivote. La velocidad conocida del eslabón *A* se mide con la proporción y la escala adecuadas para determinar la velocidad del centro instantáneo (*AB*).
5. Localizar el centro instantáneo común al eslabón con el punto cuya velocidad se desea conocer y el eslabón fijo (centro instantáneo *BC*).
6. Determinar la velocidad deseada, si se sabe que la velocidad de un eslabón es proporcional la distancia desde el pivote. El centro instantáneo (*BC*) sirve como pivote. La velocidad del centro instantáneo común (*AB*) se mide con la proporción y la escala adecuadas para determinar la velocidad deseada.

La técnica gráfica para medir a una escala proporcional adecuada un vector utiliza la *línea de centros*, *LC*. Esta es una línea trazada desde el punto pivote del eslabón al inicio del vector conocido. También se utiliza una *línea de proporción*, *LP*, que es una línea trazada desde el punto pivote hasta el extremo del vector conocido. La figura 6.35a ilustra tanto la línea de centros como la línea de proporción. La distancia del pivote al punto deseado se transfiere a la línea de centros. La magnitud del vector medida proporcionalmente se define como paralela al vector conocido, extendida de *LC* a *LP* en la distancia transferida. Lo anterior también se muestra en la figura 6.35a.

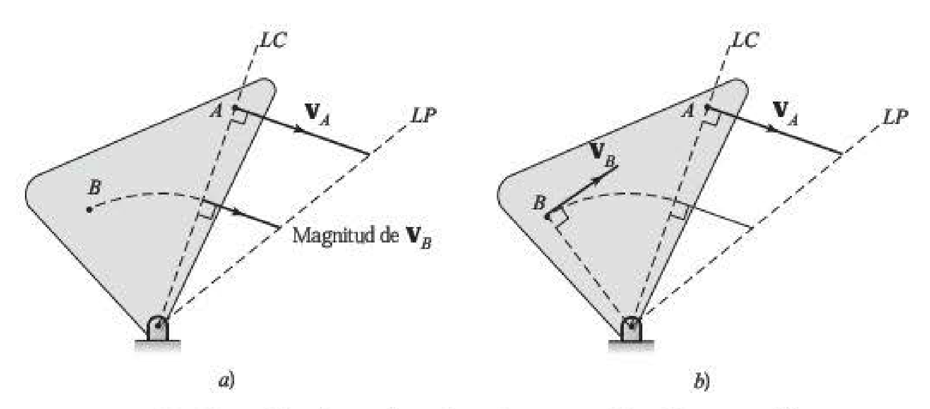


FIGURA 6.35 Uso de una línea de centros y una línea de proporción.

Desde luego, la magnitud de la velocidad es perpendicular a la línea que une el punto de velocidad desconocida y el punto pivote. Al calcular la magnitud y el posicionamiento de un vector en la dirección adecuada, se define totalmente el vector. Por lo tanto, el vector es proporcional gráficamente. El resultado se ilustra en la figura 6.35b.

Se ha descrito la lógica detrás del método del centro instantáneo del análisis de velocidad mediante técnicas gráficas. La solución real se obtiene al aplicar una lógica idéntica con un dibujo manual o de CAD. Independientemente del proceso que se utilice, los conceptos subyacentes del procedimiento gráfico del método de centro instantáneo del análisis de velocidad se ilustran con los siguientes problemas de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.14

La figura 6.29 presenta la braza automática con autobloqueo en una plataforma que se usa en muelles de embarque. En el problema 6.12 se localizaron todos los centros instantáneos del mecanismo. Determine la velocidad angular del eslabón 4, si se sabe que el eslabón 2 se eleva a una velocidad constante de 3 rad/s.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático con los centros instantáneos ya localizados***

En la figura 6.36a se reproduce el diagrama cinemático con información de los centros instantáneos y la escala.

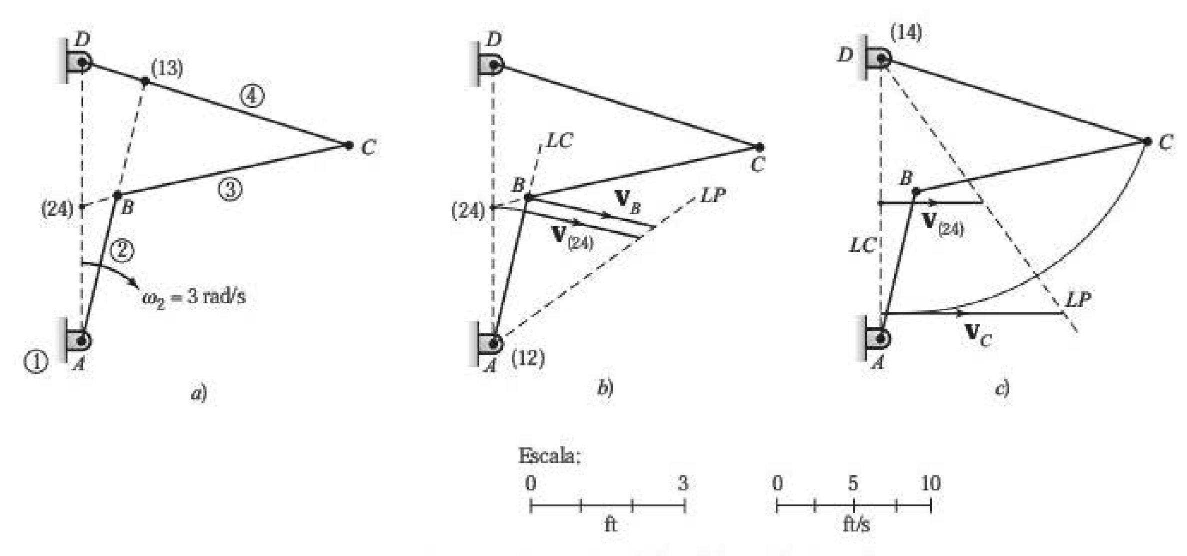


FIGURA 6.36 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.14.

2. ***Determine la velocidad lineal de un punto conveniente* (B)**

La velocidad lineal del punto B se determina a partir de la velocidad angular del eslabón 2. La medición del punto B es de 3 ft desde el pivote del eslabón 2 (punto A).

$$\mathbf{V}_B = r_{AB}\omega_2 = (3 \text{ ft})\left(3 \text{ rad/s}\right) = 9 \text{ ft/s} \; \overline{\searrow 20^{\circ}}$$

3. ***Aplique el procedimiento general de velocidad del centro instantáneo***

   a) Aísle los eslabones.

   El eslabón 2 tiene la velocidad conocida.
   El eslabón 4 contiene el punto cuya velocidad se desea conocer.
   El eslabón 1 es el eslabón fijo.

   b) El centro instantáneo común entre el eslabón con velocidad conocida y el eslabón fijo es (12).

   c) El centro instantáneo común entre el eslabón de velocidad conocida y el eslabón de velocidad desconocida es (24).

   d) La velocidad del centro instantáneo (24) se obtiene gráficamente a partir de la velocidad del punto *B*. El eslabón 2 contiene tanto el punto *B* como el centro instantáneo (24); por ello, la velocidad se mide proporcionalmente en relación con el centro instantáneo (12). Esta construcción se presenta en la figura 6.36b. La magnitud escalada de la velocidad, $v_{(24)}$, es de 7.4 ft/s.

   e) El centro instantáneo común entre el eslabón de velocidad desconocida y el eslabón fijo es (14).

   f) La velocidad del punto *C* se obtiene gráficamente a partir de la velocidad del centro instantáneo (24). El eslabón 4 contiene tanto el punto *C* como el centro instantáneo (24); por ello, la velocidad se escala en proporción con el centro instantáneo (14). En la figura 6.36c se muestra esta construcción. La magnitud v_C de esta velocidad se escala a 13.8 ft/s.

4. ***Determine la velocidad angular del eslabón 4***

   Finalmente, la velocidad angular del eslabón 4 se obtiene a partir de la velocidad del punto *C*. La medición a escala indica que el punto *C* está posicionado a una distancia de 5.4 ft desde el pivote del eslabón 4 (punto *D*).

$$\omega_4 = \frac{v_C}{r_{CD}} = \frac{13.8 \text{ ft/s}}{5.4 \text{ ft}} = 2.6 \text{ rad/s}$$

Como la dirección de la velocidad angular debe ser consistente con la velocidad del punto *C*, el eslabón gira en sentido antihorario. Por lo tanto,

$$\omega_4 = 2.6 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

Observe que esta velocidad angular también se determina a partir de la velocidad del centro instantáneo (24), ya que este punto se considera parte de los eslabones 2 y 4. Sin embargo, como en el primer problema de ejemplo sobre el tema, resulta difícil visualizar el punto que gira en relación con el eslabón 4.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.15

La figura 6.32 muestra un dispositivo triturador de rocas. En el problema de ejemplo 6.13 se localizaron todos los centros instantáneos del mecanismo. En la posición mostrada, determine la velocidad del ariete triturador cuando la manivela gira a una velocidad constante de 60 rpm en sentido horario.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático con los centros instantáneos ya ubicados***

   En la figura 6.37a se reproduce el diagrama cinemático con información de la escala.

2. ***Determine la velocidad lineal de un punto conveniente* B**

   La velocidad lineal del punto *B* se determina a partir de la velocidad angular del eslabón 2. El punto *B* se ha escalado para posicionarlo a una distancia de 4.5 in a partir del pivote del eslabón 2 (punto *A*):

$$\omega_2 = 60 \text{ rpm} \left(\frac{\pi}{30}\right) = 6.28 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{V}_B = r_{AB}\omega_2 = (4.5 \text{ in})\left(6.28 \text{ rad/s}\right) = 28.3 \text{ in/s} \angle 40^\circ$$

El objetivo del problema es determinar la velocidad lineal del punto *C*.

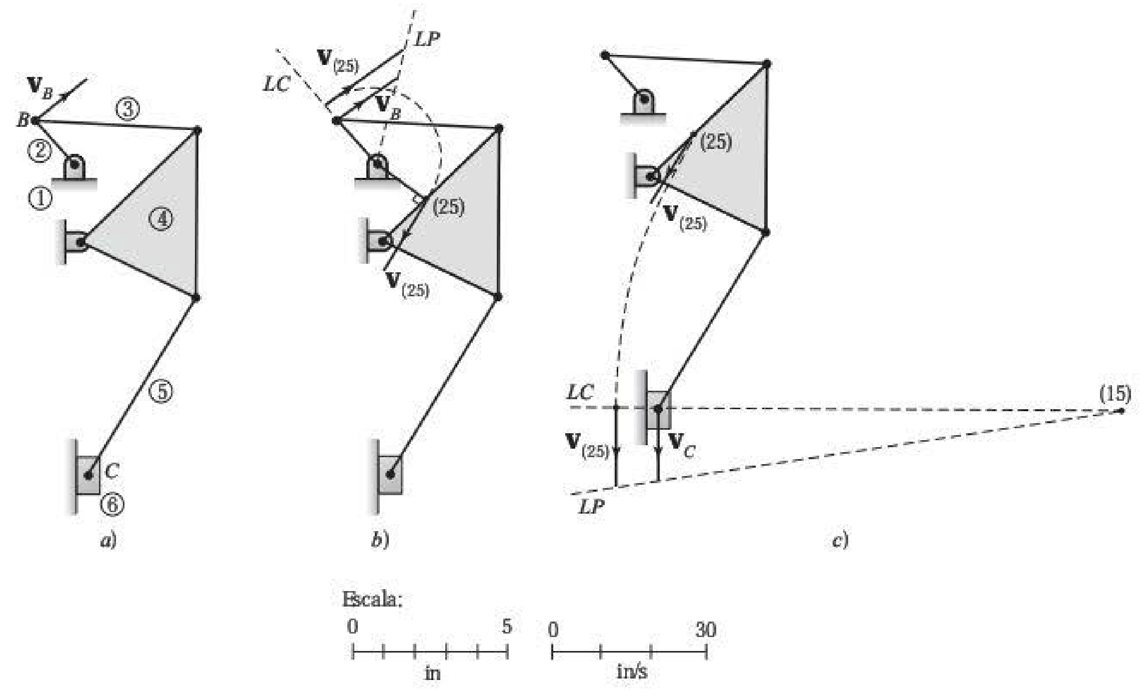


FIGURA 6.37 Diagramas del problema de ejemplo 6.15.

3. ***Aplique el procedimiento general de velocidad del centro instantáneo***
   a) Aísle los eslabones.

      El eslabón 2 tiene la velocidad conocida.
      El eslabón 5 (o 6) contiene el punto cuya velocidad se desea conocer.
      El eslabón 1 es el eslabón fijo.

   b) El centro instantáneo común entre el eslabón con velocidad conocida y el eslabón fijo es (12).

   c) El centro instantáneo común entre el eslabón con velocidad conocida y el eslabón con velocidad desconocida es (25).

   d) La velocidad del centro instantáneo (25) se obtiene gráficamente a partir de la velocidad del punto *B*. El eslabón 2 contiene tanto el punto *B* como el centro instantáneo (25); por ello, la velocidad se mide proporcionalmente en relación con el centro instantáneo (12). Esta construcción se ilustra en la figura 6.37b. La medición a escala de la magnitud de esta velocidad, $v_{(25)}$, es de 37.1 in/s.

   e) El centro instantáneo común entre el eslabón de velocidad desconocida y el eslabón fijo es (15).

   f) La velocidad del punto *C* se obtiene gráficamente a partir de la velocidad del centro instantáneo (25). El eslabón 5 contiene tanto el punto *C* como el centro instantáneo (25); por lo tanto, la velocidad del centro instantáneo (25) se gira a una línea de centros creada por el punto *C* y el centro instantáneo (15). La velocidad del centro instantáneo (25) sirve para crear una línea de proporciones. Luego, se utiliza esta línea de proporciones para construir la velocidad *C*. Esta construcción se muestra en la figura 6.37c. La medición a escala de la magnitud de la velocidad, v_C, es de 33.8 in/s.

Establecido formalmente,

$$\mathbf{V}_C = 33.8 \text{ in/s} \downarrow$$

6.13 MÉTODO ANALÍTICO PARA VELOCIDAD: MÉTODO DEL CENTRO INSTANTÁNEO

El método del centro instantáneo prácticamente no se altera cuando se utiliza un método analítico para obtener la solución. La única diferencia es que las posiciones de los centros instantáneos se deben determinar aplicando trigonometría, en vez de la construcción de líneas y de la ubicación de puntos de intersección. Esto podría volverse una tarea agobiante, de modo que es común ubicar tan solo los centros instantáneos requeridos por el análisis de velocidad. Mediante el problema de ejemplo siguiente, se ilustra el método analítico.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.16

La figura 6.38 presenta un mecanismo que se usa en una línea de producción para voltear cajas, de modo que se logren adherir etiquetas (rótulos) en la parte inferior de la caja. El brazo impulsor tiene 15 in de largo y, en el instante mostrado, está inclinado un ángulo de 60°, con una velocidad angular de 5 rad/s en sentido horario. El eslabón seguidor tiene 16 in de largo. La distancia entre los pernos del transportador es de 7 in y actualmente están alineados en forma vertical. Determine la velocidad angular del transportador y el brazo impulsado.

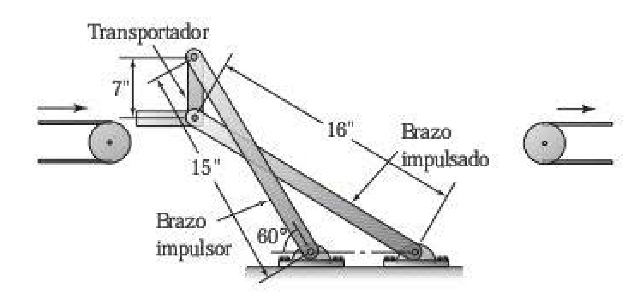


FIGURA 6.38 Mecanismo volteador del problema de ejemplo 6.16.

SOLUCIÓN: 1. ***Dibuje el diagrama cinemático***

En la figura 6.39a se ilustra el diagrama cinemático. En el extremo del transportador se incluyó el punto de interés X.

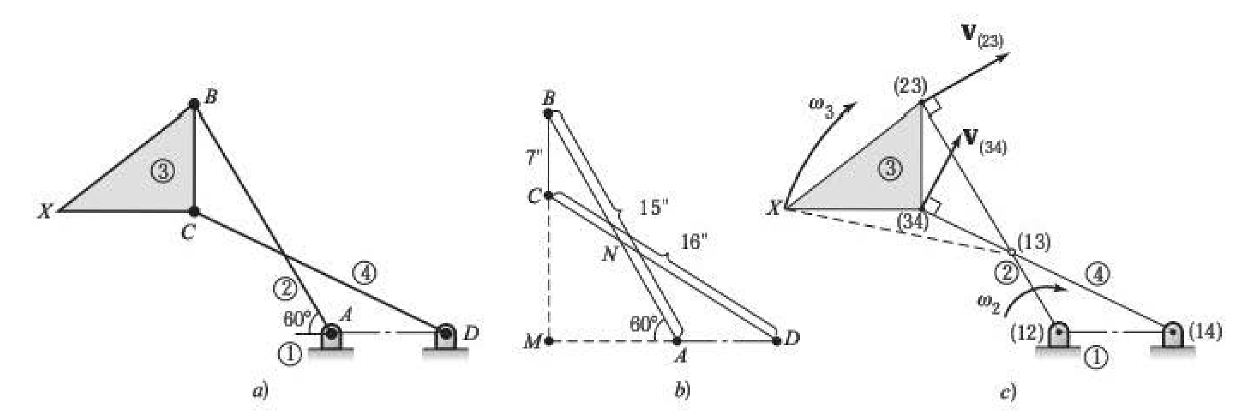


FIGURA 6.39 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 6.16.

2. ***Analice la geometría del mecanismo***

Se usa la trigonometría para determinar las distancias y los ángulos característicos de la configuración de este mecanismo. Para hacer esto, se utilizan los triángulos mostrados en la figura 6.39b. Las distancias BM y AM se pueden determinar a partir del triángulo ABM.

$$BM = AB \text{ sen } (60°) = (15 \text{ in}) \text{ sen } (60°) = 13.0 \text{ in}$$

$$AM = AB \cos (60°) = (15 \text{ in}) \cos (60°) = 7.5 \text{ in}$$

Alo largo de la vertical BCM,

$$CM = BM - BC = 13.0 - 7.0 = 6.0 \text{ in}$$

El ángulo ADC y la distancia DN se determinan a partir del triángulo CDM.

$$\angle ADC = \text{sen}^{-1}\left(\frac{CM}{CD}\right) = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{6 \text{ in}}{16 \text{ in}}\right)\right] = 22.0°$$

$$DM = CD \cos (22°) = (16 \text{ in}) \cos (22°) = 14.8 \text{ in}$$

3. ***Aplique el procedimiento general de velocidad del centro instantáneo***

En este punto, se sigue el método general del centro instantáneo para resolver el problema.

a) Aísle los eslabones.

El eslabón 2 tiene la velocidad conocida.
El eslabón 3 contiene el punto cuya velocidad se desea conocer.
El eslabón 1 es el eslabón fijo.

b) El centro instantáneo común entre el eslabón de velocidad conocida y el eslabón fijo es (12). Por inspección, se observa que este centro instantáneo se encuentra en el punto *A*.

c) El centro instantáneo común entre el eslabón con velocidad conocida y el eslabón con velocidad desconocida es (23). Por inspección, se observa que este centro instantáneo se ubica en el punto *B*.

d) La velocidad del centro instantáneo (23) es simplemente la velocidad del punto *B*, que se determina como sigue:

$$\mathbf{V}_B = r_{AB}\omega_2 = (15 \text{ in})\left(5 \text{ rad/s}\right) = 75 \text{ in/s} \angle 30^\circ$$

e) El centro instantáneo común entre el eslabón de velocidad desconocida y el eslabón fijo es (13). Este centro instantáneo se localiza en la intersección de los centros instantáneos (12)–(13) y (14)–(34). Se observa que el centro instantáneo (34) se localiza en el punto *C* y el (14) en el punto *D*. Por ello, el centro instantáneo (13) se localiza en la intersección de los eslabones 2 y 4. Este punto se identifica como *N* en la figura 6.39b. Los ángulos *DAN* y *AND*, así como la distancia *AN* se determinan a partir del triángulo *AND*.

$$\angle DAN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle AND = 180^\circ - (120^\circ + 22^\circ) = 38^\circ$$

$$AN = \left[\text{sen}(\angle ADN)\left(\frac{AD}{\text{sen }(\angle AND)}\right)\right] = \left[\text{sen } 22^\circ\left(\frac{7.3 \text{ in}}{\text{sen }(38^\circ)}\right)\right] = 5.5 \text{ in}$$

$$BN = BA - AN = 15 - 5.5 = 9.5 \text{ in}$$

Asimismo,

$$DN = \left[\text{sen } \angle DAN\left(\frac{AN}{\text{sen } \angle AND}\right)\right] = \left[\text{sen } 120^\circ\left(\frac{5.5 \text{ in}}{\text{sen } 38^\circ}\right)\right] = 7.7 \text{ in}$$

$$CN = CD - DN = 16 - 7.7 = 8.3 \text{ in}$$

f) El eslabón 3 gira instantáneamente alrededor del centro instantáneo (13). Por lo tanto, la velocidad angular del eslabón 3 se calcula a partir de la velocidad del centro instantáneo común (23), en relación con el centro instantáneo (13). Esto se ilustra en la figura 6.39c y se calcula como sigue:

$$\omega_3 = \frac{v_{23}}{r_{(13)-(23)}} = \frac{(75 \text{ in/s})}{(9.5 \text{ in})} = 7.9 \text{ rad/s}$$

Como la dirección de la velocidad angular debe ser consistente con la velocidad del punto (23) con respecto a (13), el eslabón gira en sentido horario. Entonces,

$$\omega_3 = 7.9 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

La velocidad del punto (34) también se obtiene usando la velocidad angular del eslabón 3, porque gira instantáneamente alrededor del centro instantáneo (13).

$$\mathbf{V}_{(34)} = \omega_3\, r_{(13)-(34)} = \left(7.9 \text{ rad/s}\right)(8.3 \text{ in}) = 65.6 \text{ in/s} \angle 22^\circ = 65.6 \text{ in/s} \angle 68^\circ$$

Como el eslabón 4 gira en relación con (14), la velocidad del eslabón impulsado es

$$\omega_4 = \frac{v_{(23)}}{r_{(14)-(23)}} = \frac{65.6 \text{ in/s}}{16 \text{ in}} = 4.1 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

6.14 CURVAS DE VELOCIDAD

Los análisis presentados hasta esta parte del capítulo sirven para calcular la velocidad de puntos sobre un mecanismo en un instante específico. Aun cuando los resultados sean útiles, tan solo brindan una "foto instantánea" del movimiento. El defecto evidente de este análisis es que la determinación de las condiciones extremas es difícil. Se deben investigar varias posiciones del mecanismo para identificar las fases críticas.

Es conveniente trazar la magnitud de velocidad de cierto punto, o eslabón, conforme el mecanismo se mueve a través de su ciclo. Este trazo es la *curva de velocidad*. Una curva de velocidad se genera a partir del diagrama de desplazamiento, como el descrito en la sección 4.11.

Recuerde que un diagrama de desplazamiento grafica el movimiento de un punto o eslabón como una función del movimiento de un punto o eslabón de entrada. La medida del movimiento de entrada se puede convertir fácilmente en tiempo. Esto es bastante común cuando el impulsor opera a velocidad constante.

Como se ha visto a lo largo del capítulo, la velocidad es el cambio en el tiempo del desplazamiento. Replanteando las ecuaciones (6.1) y (6.2),

Magnitud de la velocidad lineal = v = cambio en el desplazamiento lineal entre cambio en el tiempo

$$v = \frac{dR}{dt} \cong \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

Al replantear las ecuaciones (6.4) y (6.5),

Velocidad angular = ω = cambio en el desplazamiento angular entre cambio en el tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \cong \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Con frecuencia, el impulsor de un mecanismo opera a velocidad constante. Por ejemplo, un eslabón de entrada impulsado por un motor eléctrico en estado estable opera a velocidad constante. La flecha del motor podría hacer que la manivela gire a 300 rpm, suministrando así velocidad angular constante. Esta velocidad constante del eslabón impulsor convierte el eje x de un diagrama de desplazamiento, de desplazamiento angular a tiempo. En términos lineales, al replantear la ecuación (6.2) se obtiene:

$$\Delta t = \frac{\Delta R}{v} \quad \textbf{(6.17)}$$

En términos angulares, replanteando la ecuación (6.5):

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \quad \textbf{(6.18)}$$

De modo que las ecuaciones (6.17) y (6.18) sirven para convertir el incremento del desplazamiento del eje x a un incremento de tiempo. Esto se ilustra con el problema de ejemplo 6.17.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.17

En el problema de ejemplo 4.11 se graficó el diagrama de desplazamiento de un pistón que opera en un compresor, en relación con la rotación del cigüeñal. Use esos datos para graficar el desplazamiento del pistón en relación con el tiempo, cuando el cigüeñal es impulsado por un motor eléctrico a 1750 rpm.

SOLUCIÓN:

1. ***Calcule el tiempo para 30° de giro de la manivela***

La principal tarea de este problema es convertir el incremento del ángulo de la manivela de la figura 4.41 a tiempo. El incremento en el eje x es igual a 30°, mientras el cigüeñal gira a 1750 rpm. Para ser consistentes con las unidades, el incremento en el eje de las x se convierte a revoluciones.

$$\Delta\theta = 30° \left(\frac{1 \text{ rev}}{360°}\right) = 0.08333 \text{ rev}$$

El incremento de tiempo para que la manivela gire 0.08333 rev (30°) se calcula con la ecuación (6.18).

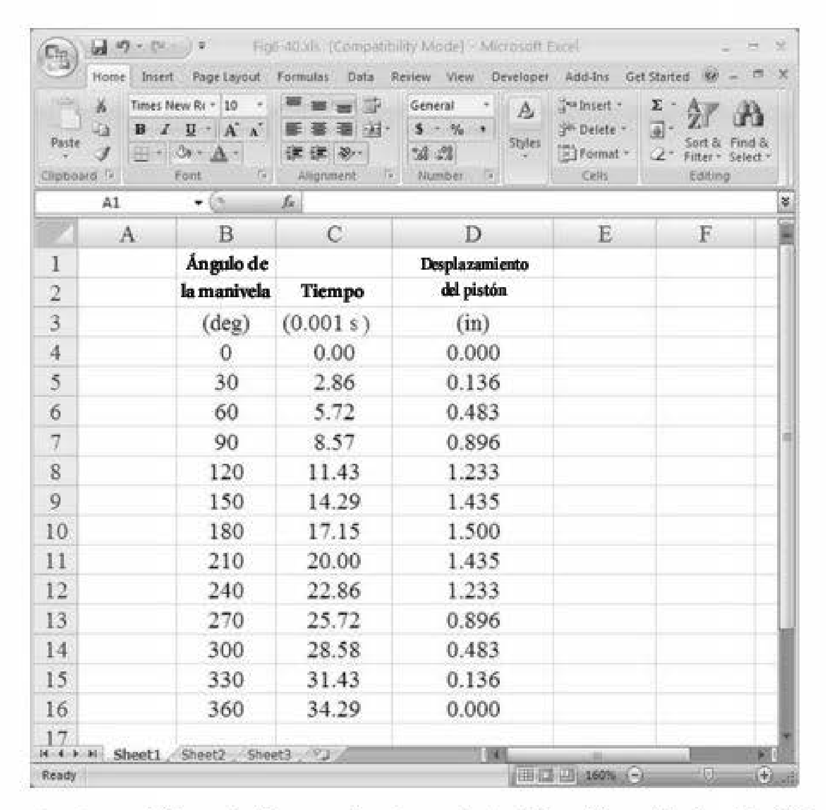
$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{(0.08333 \text{ rev})}{(1750 \text{ rev/min})}$$
$$= 0.0000476 \text{ min}$$
$$= (0.0000476 \text{ min})\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 0.00286 \text{ s}$$

2. ***Agregue una columna de tiempo en la tabla de desplazamiento***

Los resultados del análisis de posición se reproducen en una hoja de cálculo insertando el incremento del tiempo. Lo anterior se muestra en la figura 6.40, la cual muestra el tiempo tabulado en milésimas de segundo. Si no está familiarizado con una hoja de cálculo, consulte el capítulo 8.

3. ***Use los datos de desplazamiento y tiempo para graficar una curva de desplazamiento***

Con el uso de la hoja de cálculo, se grafican los valores en la figura 6.41 para obtener un diagrama de desplazamiento en relación con el tiempo.



	A	B	C	D	E	F
1		Ángulo de		Desplazamiento		
2		la manivela	Tiempo	del pistón		
3		(deg)	(0.001 s)	(in)		
4		0	0.00	0.000		
5		30	2.86	0.136		
6		60	5.72	0.483		
7		90	8.57	0.896		
8		120	11.43	1.233		
9		150	14.29	1.435		
10		180	17.15	1.500		
11		210	20.00	1.435		
12		240	22.86	1.233		
13		270	25.72	0.896		
14		300	28.58	0.483		
15		330	31.43	0.136		
16		360	34.29	0.000		

FIGURA 6.40 Valores de tiempo y desplazamiento del problema de ejemplo 6.17.

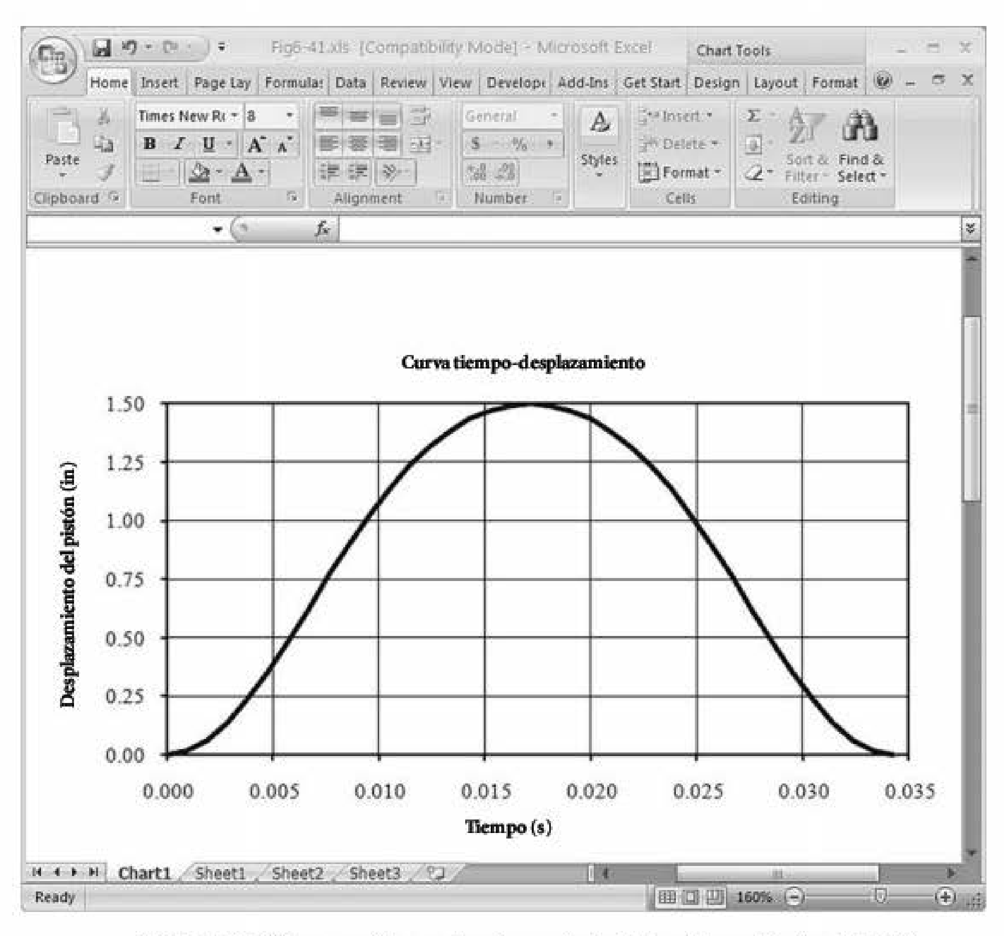


FIGURA 6.41 Diagrama tiempo-desplazamiento del problema de ejemplo 6.17.

Estos diagramas de desplazamiento en relación con el tiempo se usan para obtener una curva de velocidad, porque

$$\text{Velocidad} = \frac{d(\text{desplazamiento})}{d(\text{tiempo})}$$

El cálculo diferencial indica que la velocidad en un instante específico es la pendiente del diagrama de desplazamiento en ese instante. El trabajo consiste en calcular la pendiente del diagrama de desplazamiento en varios puntos.

6.14.1 Diferenciales gráficas

La pendiente en un punto se calcula graficando una línea que pase por el punto de interés, tangente a la curva de desplazamiento. La pendiente de la línea se obtiene si se calcula el cambio de valor en el eje y (desplazamiento) dividido entre el cambio de valor en el eje x (tiempo).

El procedimiento se ilustra en la figura 6.42. Observe en el diagrama de desplazamiento que la línea tangente en t_1 es horizontal. La pendiente de esta línea tangente es igual a cero. Por consiguiente, la magnitud de la velocidad en t_1 es igual a cero.

Como se observa en el diagrama de desplazamiento, una línea tangente en t_2 tiene una inclinación hacia arriba. La pendiente de esta línea se calcula como el cambio en el desplazamiento dividido entre el cambio correspondiente de tiempo. Observe que este triángulo ΔR, Δt se trazó bastante grande para mejorar la exactitud de la medición. La velocidad en t_2 se obtiene como $\Delta R/\Delta t$ y es positiva, debido a la pendiente hacia arriba de la línea tangente. Observe también que esta es la sección más inclinada de la parte hacia arriba de la curva de desplazamiento. Esto se traduce en la mayor magnitud de velocidad positiva.

Este procedimiento se repite en varias ubicaciones a lo largo del diagrama de desplazamiento. Sin embargo, por lo general solo se desea conocer las velocidades extremas y los cambios abruptos entre ellas. Con los conocimientos de cálculo diferencial y de pendientes, es posible detectar visualmente las posiciones de interés. En general, las ubicaciones de interés son:

- Las partes más inclinadas del diagrama de desplazamiento, las cuales corresponden a las velocidades extremas.
- Las ubicaciones del diagrama de desplazamiento con la curvatura más grande, que corresponden a cambios abruptos en las velocidades.

Como se mencionó, la velocidad en t_2 es la mayor, porque t_2 es la parte más inclinada del diagrama de desplazamiento. La velocidad en t_4 es la velocidad más grande en la dirección negativa, porque t_4 es la parte más inclinada hacia abajo del diagrama de desplazamiento.

La identificación de las posiciones de velocidades extremas es invaluable. En estas ubicaciones, se debe efectuar un análisis completo de velocidad, como el presentado en las secciones anteriores del capítulo, de modo que tan solo se lleva a cabo un análisis exhaustivo de velocidad en las configuraciones importantes del mecanismo.

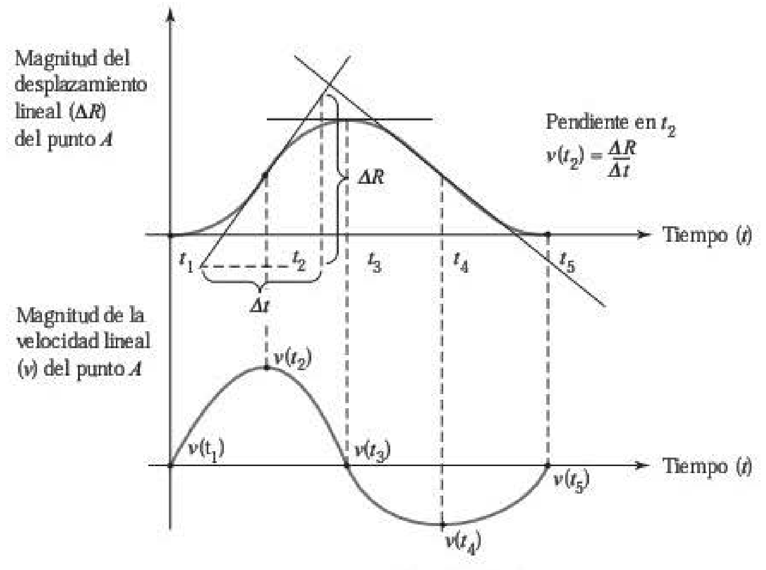


FIGURA 6.42 Curvas de velocidad.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.18

Se construyó un diagrama de desplazamiento en relación con el tiempo para el mecanismo del compresor del problema de ejemplo 6.17. Use estos datos para graficar la curva de velocidad en relación con el tiempo.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique las partes horizontales en el diagrama de desplazamiento***

   La principal tarea en la construcción de una curva de velocidad es determinar la pendiente de muchos puntos sobre la curva de desplazamiento. Esta curva se reprodujo como figura 6.43.

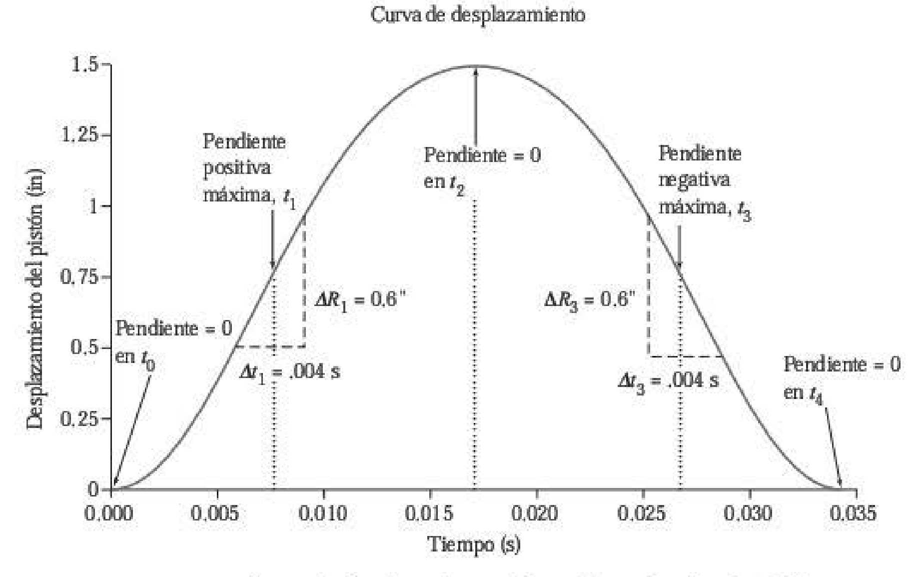


FIGURA 6.43 Curva de desplazamiento del problema de ejemplo 6.18.

Analizando esta curva, es evidente que la curva tiene una tangente horizontal, o pendiente igual a cero, en 0, 0.017 y 0.034 s. Por lo tanto, la velocidad del pistón es cero en 0, 0.017 y 0.034 s, cuyos puntos están identificados como t_0, t_2 y t_4, respectivamente.

2. ***Calcule la pendiente en las partes más sobresalientes del diagrama de desplazamiento***

   La pendiente máxima hacia arriba se encuentra en 0.008 s. Este punto se identifica como t_1. La velocidad se calcula con los valores de ΔR_1 y Δt_1, que se leen en la gráfica. La velocidad en 0.008 s se calcula como

$$v(t_1) = v_1 = \frac{0.60 \text{ in}}{0.004 \text{ s}} = -150 \text{ in/s}$$

Asimismo, la pendiente máxima hacia abajo se encuentra en 0.027 s. Este punto se identifica como t_3. De nueva cuenta, el cálculo de la velocidad se hace con los valores de ΔR_3 y Δt_3, que se leen en la gráfica. La velocidad en 0.027 s se calcula como

$$v(t_3) = v_3 = \frac{-0.60 \text{ in}}{0.004 \text{ s}} = -150 \text{ in/s}$$

El procedimiento de cálculo de la pendiente en la curva de desplazamiento se puede repetir en otros puntos del tiempo.

3. ***Grafique la curva de velocidad***

   Si se recaba la información de pendientes y tiempo, se construye una curva de velocidad como la mostrada en la figura 6.44.

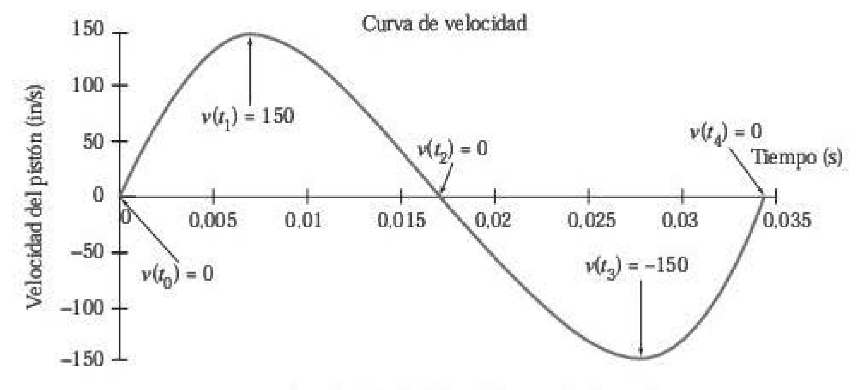


FIGURA 6.44 Curva de velocidad del problema de ejemplo 6.18.

6.14.2 Diferenciales numéricas

En la elaboración de una curva de velocidad con diferenciales gráficas, se siguen estrictamente las teorías del cálculo diferencial. Sin embargo, incluso si se pone mucha atención, por lo general surgen imprecisiones cuando se elaboran las curvas tangentes, de modo que con frecuencia se utilizan otros métodos, por decir métodos numéricos, para determinar la derivada de una curva definida por una serie de puntos conocidos. El método más común para obtener numéricamente la derivada es el método de Richardson [ref. 2]. Es aplicable en casos donde los incrementos entre las variables independientes son iguales. Esto limita el análisis a un intervalo de tiempo constante, lo cual no suele ser difícil. La derivada de la curva desplazamiento-tiempo se aproxima numéricamente con la siguiente ecuación:

$$v_i = \left[\frac{\Delta R_{i+1} - \Delta R_{i-1}}{2\,\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_{i+2} - 2\,\Delta R_{i+1} + 2\,\Delta R_{i-1} - \Delta R_{i-2}}{12\,\Delta t}\right] \quad \textbf{(6.19)}$$

donde:

i = intervalo de datos de los puntos

ΔR_i = desplazamiento en el dato del punto i

$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$

t_i = tiempo en el dato del punto i

Aun cuando la forma general quizá parezca confusa con los términos i, $i+1$, etcétera, la sustitución real es sencilla. Para ilustrar el uso de esta ecuación, la velocidad en el quinto dato del punto se obtiene con la siguiente ecuación:

$$v_5 = \left[\frac{\Delta R_6 - \Delta R_4}{2\,\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_7 - 2\Delta R_6 + 2\Delta R_4 - \Delta R_3}{12\Delta t}\right]$$

Puede haber alguna confusión al calcular la derivada en los extremos de las curvas. En el análisis de mecanismos, el diagrama de desplazamiento se repite con cada vuelta de la manivela. Por consiguiente, conforme la curva se repite, los datos de los puntos anteriores del inicio del ciclo son los mismos puntos al final del ciclo, de modo que cuando se utilizan 12 puntos para generar la curva de desplazamiento, el desplazamiento en el punto 1 es idéntico al desplazamiento en el punto 13, por lo que la velocidad en el punto 1 se calcula como

$$v_1 = \left[\frac{\Delta R_2 - \Delta R_{12}}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_3 - 2\Delta R_2 + 2\Delta R_{12} - \Delta R_{11}}{12\Delta t}\right]$$

Como esta ecuación es una aproximación numérica, el error asociado disminuye drásticamente conforme se incrementa el ángulo de la manivela y se reduce el tiempo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 6.19

En el problema de ejemplo 4.11, se graficó un diagrama de desplazamiento de un pistón que opera en un compresor. Este diagrama se convirtió a una curva de desplazamiento en relación con el tiempo en el problema de ejemplo 6.17. Emplee estos datos para generar numéricamente la curva de velocidad.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine el incremento de tiempo entre las posiciones de los datos de los puntos***

La hoja de cálculo utilizada en el problema de ejemplo 6.17 se amplía para insertar una columna adicional para incluir la velocidad del pistón. El incremento de tiempo se calcula como:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (0.00289 - 0.0) = 0.00286 \text{ s}$$

2. ***Use la ecuación (6.19) para calcular la velocidad de los datos de los puntos***

Para ilustrar el cálculo de las velocidades, se presentan unos cuantos cálculos de muestra:

$$v_2 = \left[\frac{(\Delta R_3 - \Delta R_1)}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_4 - 2\Delta R_3 + 2\Delta R_1 - \Delta R_{12}}{12\Delta t}\right]$$

$$= \left[\frac{(0.483 - 0.0)}{2(0.00286)}\right] - \left[\frac{0.896 - 2(0.483) + 2(0.0) - 0.136}{12(0.00286)}\right] = 142.67 \text{ in/s}$$

$$v_9 = \left[\frac{(\Delta R_{10} - \Delta R_8)}{\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_{11} - 2\Delta R_{10} + 2\Delta R_8 - \Delta R_7}{12\Delta t}\right]$$

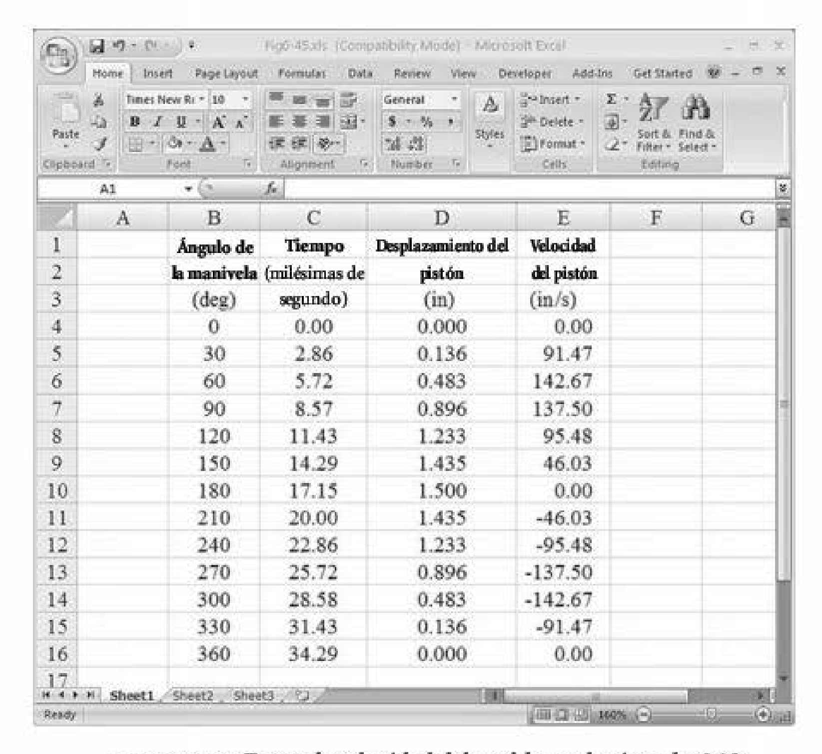
$$= \left[\frac{(0.896 - 1.435)}{2(0.00286)}\right] - \left[\frac{0.483 - 2(0.896) + 2(1.435) - 1.50}{12(0.00286)}\right] = -95.48 \text{ in/s}$$

$$v_{12} = \left[\frac{(\Delta R_{13} - \Delta R_{11})}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{\Delta R_2 - 2\Delta R_{13} + 2\Delta R_{11} - \Delta R_{10}}{12\Delta t}\right]$$

$$= \left[\frac{(0.0 - 0.483)}{2(0.00286)}\right] - \left[\frac{0.136 - 2(0.0) + 2(0.483) - 0.896}{2(0.00286)}\right] = -91.47 \text{ in/s}$$

3. ***Calcule los datos de velocidad y grafique la curva de velocidad***

Se pueden calcular y tabular los resultados como se indica en la figura 6.45. Se usó eficientemente una hoja de cálculo para realizar tales cálculos redundantes. Para quienes no estén familiarizados con hojas de cálculo, se sugiere que consulten el capítulo 8.



Ángulo de la manivela (deg)	Tiempo (milésimas de segundo)	Desplazamiento del pistón (in)	Velocidad del pistón (in/s)
0	0.00	0.000	0.00
30	2.86	0.136	91.47
60	5.72	0.483	142.67
90	8.57	0.896	137.50
120	11.43	1.233	95.48
150	14.29	1.435	46.03
180	17.15	1.500	0.00
210	20.00	1.435	-46.03
240	22.86	1.233	-95.48
270	25.72	0.896	-137.50
300	28.58	0.483	-142.67
330	31.43	0.136	-91.47
360	34.29	0.000	0.00

FIGURA 6.45 Datos de velocidad del problema de ejemplo 6.19.

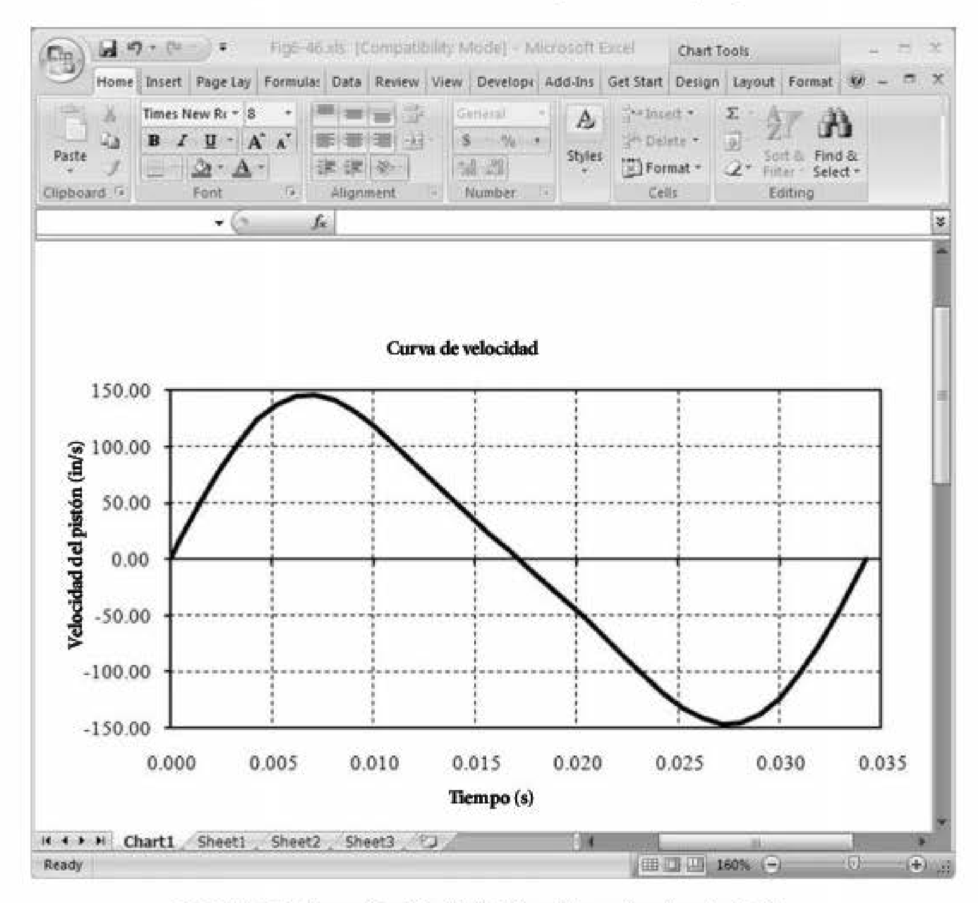


FIGURA 6.46 Curva de velocidad del problema de ejemplo 6.19.

Estos valores se graficaron en la figura 6.46 para formar un diagrama de velocidad en relación con el tiempo. Advierta que la curva aún es bastante burda. Para efectos de precisión, se recomienda ampliamente que el incremento del ángulo de la manivela se reduzca a 10° o 15°. Cuando se utiliza una hoja de cálculo para generar los datos de velocidad, se recomiendan incrementos todavía más pequeños para reducir la dificultad de la tarea.

PROBLEMAS

Velocidad general

6–1. Un paquete se mueve a velocidad constante de un extremo a otro de una banda transportadora horizontal de 25 ft en 15 s. Determine la velocidad lineal de la banda transportadora.

6–2. Un cilindro hidráulico se extiende a una velocidad constante de 2 fpm (ft/min). Calcule el tiempo requerido para que viaje su carrera completa de 15 in.

6–3. Determine la velocidad promedio (en mph) de un atleta que corre una milla en 4 minutos.

6–4. Calcule la velocidad promedio (en mph) de un atleta que corre una distancia de 100 m a toda velocidad en 10 s.

6–5. Un engrane gira uniformemente 270° en sentido horario, en 2 s. Determine la velocidad angular en rpm y rad/s.

6–6. Calcule la velocidad angular (en rpm) del segundero, del minutero y de la manecilla horaria en un reloj.

6–7. Un actuador servoimpulsado está programado para extenderse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P6.7. Determine el desplazamiento total durante este movimiento programado.

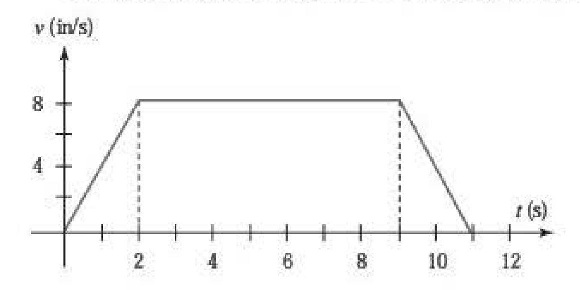


FIGURA P6.7 Problemas 7 y 8.

6–8. Un actuador servoimpulsado está programado para extenderse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P6.7. Use una hoja de cálculo para generar gráficas de velocidad contra tiempo y de desplazamiento contra tiempo durante este movimiento programado.

6–9. Un motor lineal está programado para moverse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P6.9. Determine el desplazamiento total durante este movimiento programado.

6–10. Un motor lineal está programado para moverse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P6.9. Use una hoja de cálculo para generar gráficas de velocidad contra tiempo y de desplazamiento contra tiempo durante este movimiento programado.

6–11. En la figura P6.11 se muestra el rodillo impulsor de una banda transportadora. Determine la velocidad angular del rodillo cuando la banda funciona a 10 fpm (10 ft/min).

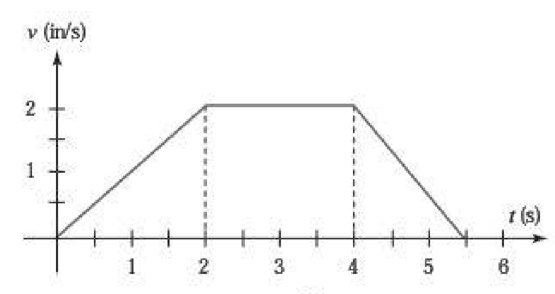


FIGURA P6.9 Problemas 9 y 10.

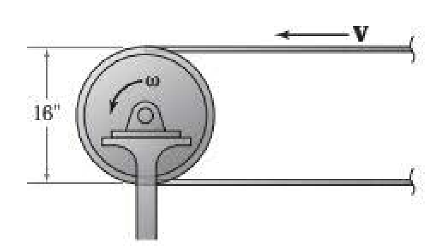


FIGURA P6.11 Problemas 11 y 12.

6–12. En la figura P6.11 se muestra el rodillo impulsor de una banda transportadora. Determine la velocidad lineal de la banda cuando el rodillo opera a 30 rpm en sentido antihorario.

6–13. En la figura P6.13 se ilustra el eslabón 2 aislado de un diagrama cinemático. El eslabón gira en sentido antihorario a una velocidad de 300 rpm. Determine la velocidad de los puntos A y B. Use $\gamma = 50°$ y $\beta = 60°$.

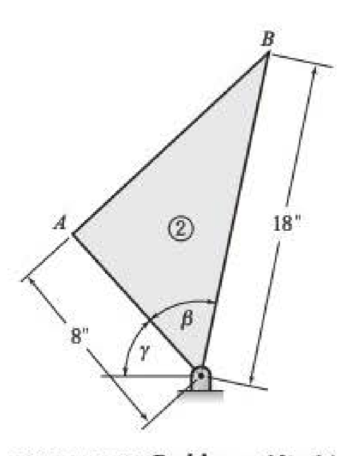


FIGURA P6.13 Problemas 13 y 14.

6–14. En la figura P6.13 se muestra el eslabón 2 aislado de un diagrama cinemático. El eslabón gira en sentido horario impulsando el punto A a una velocidad de 40 ft/s. Determine la velocidad de los puntos A y B, así como la velocidad angular del eslabón 2. Use $\gamma = 50°$ y $\beta = 60°$.

Velocidad relativa

6–15. En la figura P6.15 se presenta el diagrama cinemático de un mecanismo de cuatro barras. En el instante mostrado, $v_A = 800$ mm/s y $v_B = 888$ mm/s. Determine gráficamente la velocidad relativa del punto B con respecto al punto A. Determine también la velocidad angular de los eslabones 2 y 4.

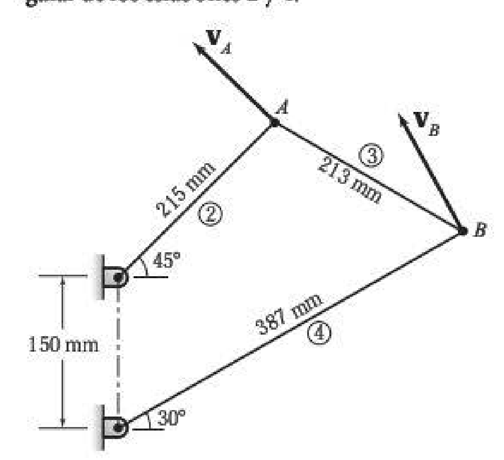


FIGURA P6.15 Problemas 15 y 16.

6–16. En la figura P6.15 se ilustra el diagrama cinemático de un mecanismo de cuatro barras. En el instante mostrado, $v_A = 20$ mm/s y $v_B = 22.2$ mm/s. Determine gráficamente la velocidad relativa del punto B con respecto al punto A. Calcule también la velocidad angular de los eslabones 2 y 4.

6–17. En la figura P6.17 se presenta el diagrama cinemático de un mecanismo de manivela-corredera. En el instante mostrado, $v_A = 380$ ft/s y $v_B = 400$ ft/s. Determine gráficamente la velocidad relativa del punto A con respecto al punto B. Calcule también la velocidad angular del eslabón 2.

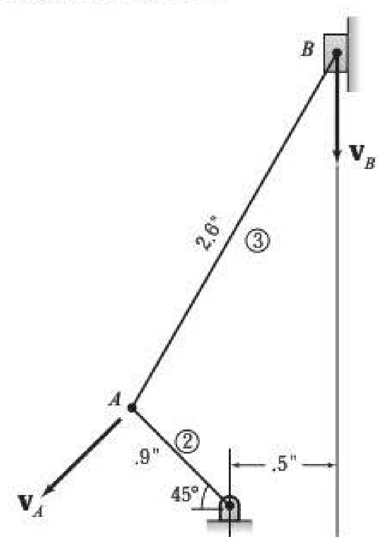


FIGURA P6.17 Problemas 17 y 18.

6–18. En la figura P6.17 se ilustra el diagrama cinemático de un mecanismo de manivela-corredera. En el instante mostrado, $v_A = 20$ ft/s y $v_B = 21$ ft/s. Determine gráficamente la velocidad relativa del punto A con respecto al punto B. Calcule también la velocidad angular del eslabón 2.

Método gráfico de velocidad relativa

6–19. Para el mecanismo compresor de la figura P6.19, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal del pistón, conforme la manivela gira a 1150 rpm en sentido horario.

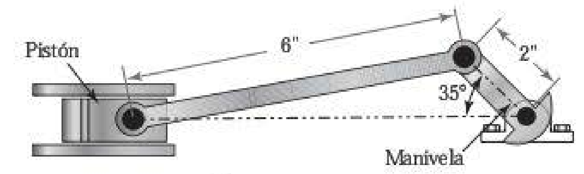


FIGURA P6.19 Problemas 19, 20, 41, 52, 63, 74, 85, 96, 104 y 112.

6–20. Para el mecanismo compresor de la figura P6.19, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal del pistón, conforme la manivela gira a 1775 rpm en sentido antihorario.

6–21. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la rueda de la manivela gira a 1500 rpm en sentido antihorario.

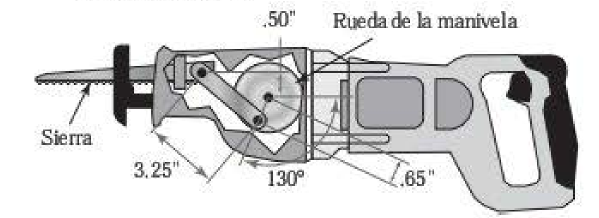


FIGURA P6.21 Problemas 21, 22, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 105 y 113.

6–22. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la rueda de la manivela gira a 900 rpm en sentido horario.

6–23. Para la configuración del mecanismo de corte mostrado en la figura P6.23, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la manivela gira a 100 rpm en sentido horario.

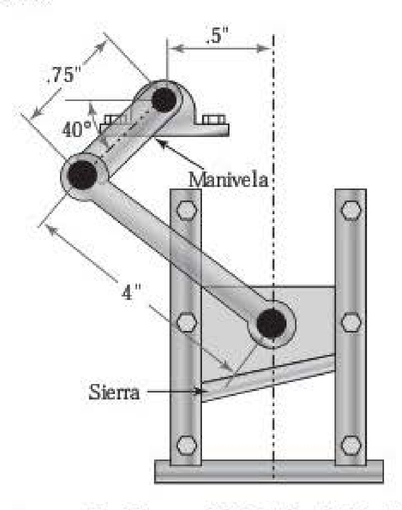


FIGURA P6.23 Problemas 23, 24, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 106 y 114.

6–24. Para la configuración del mecanismo de corte mostrado en la figura P6.23, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la manivela gira a 80 rpm en sentido antihorario.

6–25. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del brazo del limpiador, conforme la manivela gira a 40 rpm en sentido antihorario.

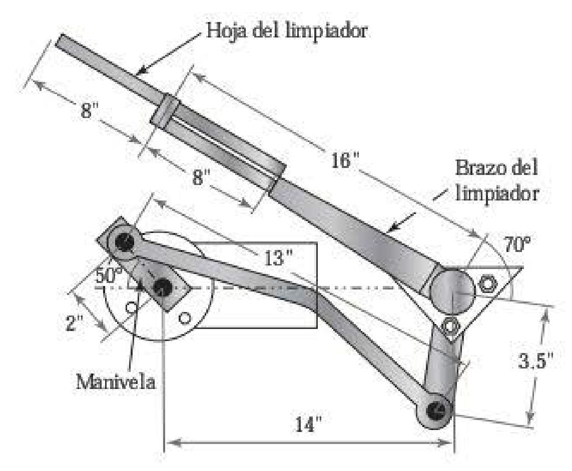


FIGURA P6.25 Problemas 25, 26, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 107 y 115.

6–26. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del brazo del limpiador conforme la manivela gira a 60 rpm en sentido horario.

6–27. El dispositivo de la figura P6.27 es un chapoteadero que se usa para lavar productos vegetales. Para la configuración mostrada, utilice el método de la velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del tanque de agua, conforme la manivela es impulsada a 100 rpm en sentido antihorario.

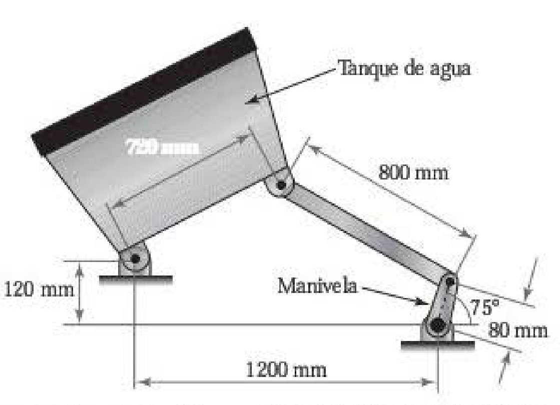


FIGURA P6.27 Problemas 27, 28, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 108 y 116.

6–28. El dispositivo de la figura P6.27 es un chapoteadero que se usa para lavar productos vegetales. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del tanque de agua, conforme la manivela es impulsada a 75 rpm en sentido horario.

6–29. El dispositivo de la figura P6.29 es el mecanismo impulsor del agitador de una lavadora. Para la configuración mostrada, use le método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del segmento de engrane, conforme la manivela es impulsada a 50 rpm en el sentido horario.

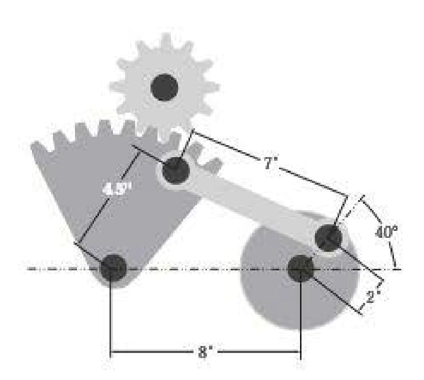


FIGURA P6.29 Problemas 29, 30, 46, 57, 68, 79, 90, 101, 109 y 117.

6–30. El dispositivo de la figura P6.29 es el mecanismo impulsor del agitador de una lavadora. Para la configuración mostrada, use le método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular del segmento de engrane, conforme la manivela es impulsada a 35 rpm en el sentido antihorario.

6–31. Para la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular requerida del mango, para pasar la hoja de corte a través del metal a una velocidad de 3 mm/s. Calcule asimismo la velocidad lineal del punto *X*.

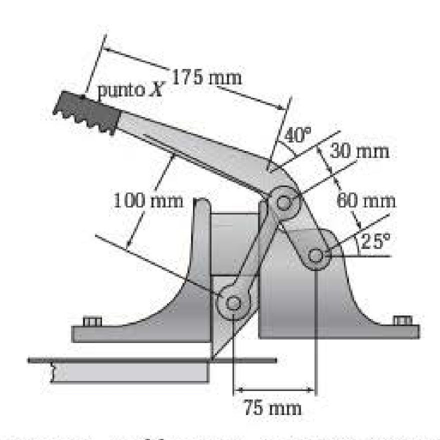


FIGURA P6.31 Problemas 31, 32, 47, 58, 69, 80 y 91.

6–32. Para la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de la hoja de corte, conforme el mango gira a una velocidad de 2 rad/s en sentido horario. Calcule también la velocidad lineal del punto *X*.

6–33. La figura P6.33 muestra una bomba de aire de pedal. Use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad angular requerida del pedal, para contraer el cilindro a una velocidad de 5 in/s. Calcule, asimismo, la velocidad lineal del punto *X*.

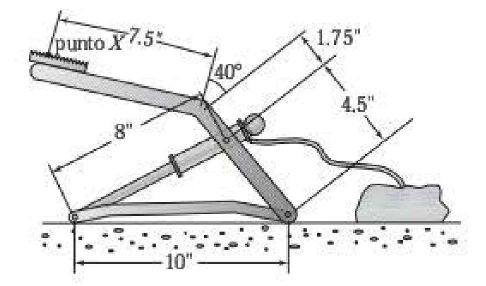


FIGURA P6.33 Problemas 33, 34, 48, 59, 70, 81 y 92.

6–34. La figura P6.33 ilustra una bomba de aire de pedal. Use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad de compresión del cilindro, cuando la velocidad angular del ensamble del pedal es de 1 rad/s en sentido antihorario. Calcule también la velocidad lineal del punto *X*.

6–35. En la figura P6.35 se presenta el mecanismo de un compresor de dos cilindros. Para la configuración mostrada, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de ambos pistones, conforme la manivela de 1.5 in es impulsada a 1775 rpm en sentido horario. Calcule asimismo la velocidad de salida del flujo volumétrico instantáneo del cilindro derecho.

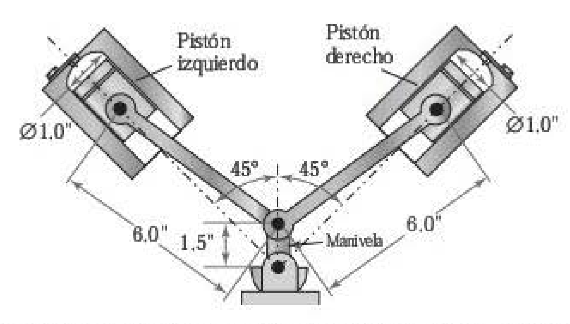


FIGURA P6.35 Problemas 35, 36, 49, 60, 71, 82, 93, 102, 110 y 118.

6–36. En la figura P6.35 se ilustra el mecanismo de un compresor de dos cilindros. Para la configuración mostrada, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal de ambos pistones, conforme la manivela de 1.5 in es impulsada a 1150 rpm en sentido antihorario. Calcule también la velocidad de salida del flujo volumétrico instantáneo del cilindro izquierdo.

6–37. En la figura P6.37 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración ilustrada, use el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal del paquete, conforme la manivela gira a 40 rpm en sentido horario.

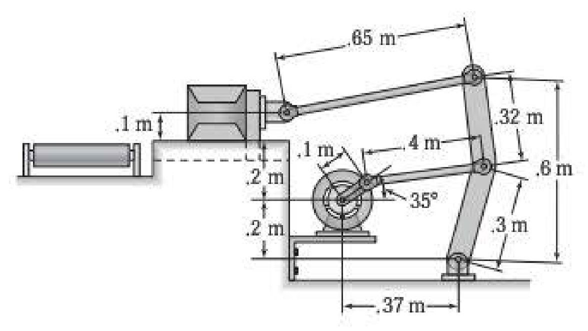


FIGURA P6.37 Problemas 37, 38, 50, 61, 72, 83, 94, 103, 111 y 119.

6–38. En la figura P6.37 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración ilustrada, use el método de velocidad relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal del paquete, conforme la manivela gira a 65 rpm en sentido horario.

6–39. En la figura P6.39 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración ilustrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de la plataforma conforme el cilindro hidráulico se extiende a una velocidad de 16 fpm.

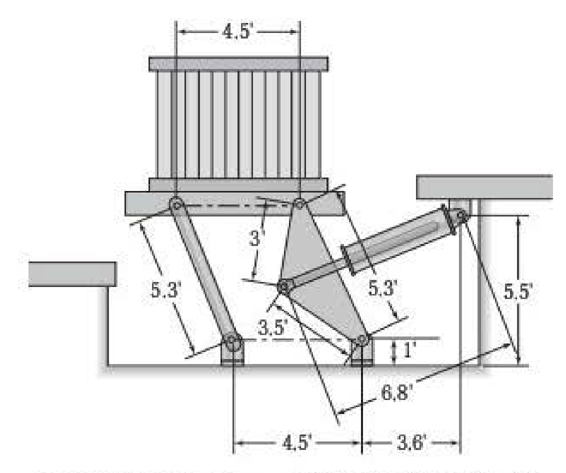


FIGURA P6.39 Problemas 39, 40, 51, 62, 73, 84 y 95.

6–40. En la figura P6.39 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración ilustrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de la plataforma conforme el cilindro hidráulico se retrae a una velocidad de 12 fpm.

Método analítico de velocidad relativa

6–41. Para el mecanismo compresor ilustrado en la figura P6.19, utilice el método de velocidad relativa para determinar la velocidad lineal del pistón conforme la manivela gira a 950 rpm en sentido horario.

6–42. Para la sierra reciprocante de la figura P6.21, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de la cuchilla conforme la rueda de la manivela gira a 1700 rpm en sentido antihorario.

6–43. Para la configuración mostrada del mecanismo de corte de la figura P6.23, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de la cuchilla conforme la manivela gira a 85 rpm en sentido horario.

6–44. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del brazo del limpiador conforme la manivela gira a 45 rpm en sentido antihorario.

6–45. El dispositivo de la figura P6.27 es un chapoteadero que sirve para lavar productos vegetales. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del tanque de agua conforme la manivela es impulsada a 90 rpm en sentido antihorario.

6–46. El dispositivo de la figura P6.29 es el mecanismo impulsor del agitador de una lavadora. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del segmento de engrane conforme la manivela es impulsada a 60 rpm en sentido horario.

6–47. Para los eslabones de la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular requerida del mango para pasar la cuchilla a través del metal a una velocidad de 2 mm/s.

6–48. Para la bomba de aire de pedal mostrada en la figura P6.33, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad de compresión del cilindro conforme el ensamble del pedal gira a una velocidad de 1 rad/s en sentido antihorario.

6–49. En la figura P6.35 se ilustra un mecanismo compresor de dos cilindros. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de ambos pistones conforme la manivela de 1.5 in es impulsada a 2000 rpm en sentido horario. Determine también la velocidad de salida del flujo volumétrico instantáneo del cilindro derecho.

6–50. En la figura P6.37 se ilustra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal del paquete, conforme la manivela gira a 80 rpm en sentido horario.

6–51. En la figura P6.39 se ilustra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración mostrada, utilice el método de velocidad relativa con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de la plataforma conforme el cilindro hidráulico se retrae a una velocidad de 10 fpm.

Ubicación de centros instantáneos: método gráfico

6–52. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–53. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–54. Para la configuración del mecanismo de corte mostrada en la figura P6.23, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–55. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–56. Para el chapoteadero de lavado de vegetales mostrado en la figura P6.27, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–57. Para el mecanismo agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–58. Para la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–59. Para la bomba de aire de pedal mostrada en la figura P6.33, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–60. Para el mecanismo compresor de dos cilindros mostrado en la figura P6.35, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–61. Para el dispositivo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.37, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–62. Para el dispositivo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.39, determine gráficamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

Ubicación de centros instantáneos: método analítico

6–63. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–64. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–65. Para la configuración del mecanismo de corte mostrada en la figura P6.23, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–66. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–67. Para el chapoteadero del lavador de vegetales mostrado en la figura P6.27, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–68. Para el mecanismo agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–69. Para la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–70. Para la bomba de aire de pedal mostrada en la figura P6.33, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–71. Para el mecanismo compresor de dos cilindros mostrado en la figura P6.35, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–72. Para el mecanismo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.37, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

6–73. Para el mecanismo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.39, determine analíticamente la ubicación de todos los centros instantáneos.

Método gráfico del centro instantáneo

6–74. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19, use el método del centro instantáneo para determinar gráficamente la velocidad lineal del pistón, conforme la manivela gira a 1500 rpm en sentido antihorario.

6–75. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la rueda de la manivela gira a 1200 rpm en sentido horario.

6–76. Para la configuración del mecanismo de corte mostrada en la figura P6.23, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la manivela gira a 65 rpm en sentido antihorario.

6–77. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad angular del brazo del limpiador, conforme la manivela gira a 55 rpm en sentido horario.

6–78. Para el mecanismo del chapoteadero de lavado de vegetales mostrado en la figura P6.27, utilice el método instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad angular del tanque de agua, conforme la manivela es impulsada a 110 rpm en sentido horario.

6–79. Para el mecanismo agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad angular del segmento de engrane, conforme la manivela es impulsada a 70 rpm en sentido antihorario.

6–80. Para la configuración de la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad angular requerida del mango, para pasar la cuchilla a través del metal a una velocidad de 4 mm/s.

6–81. Para la bomba de aire de pedal mostrada en la figura P6.33, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad de compresión del cilindro, conforme el ensamble del pedal gira a una velocidad de 0.75 rad/s en sentido antihorario.

6–82. El mecanismo de un compresor de dos cilindros es mostrado en la figura P6.35. Para la configuración mostrada, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de ambos pistones, conforme la manivela de 1.5 in es impulsada a 2200 rpm. Calcule asimismo la velocidad instantánea del flujo volumétrico de salida del cilindro derecho.

6–83. En la figura P6.37 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración mostrada, utilice le método gráfico de centro instantáneo con la finalidad de determinar la velocidad lineal del paquete, conforme la manivela gira a 70 rpm en sentido horario.

6–84. En la figura P6.39 se muestra un dispositivo que mueve paquetes. Para la configuración ilustrada, utilice el método de centro instantáneo con la finalidad de determinar gráficamente la velocidad lineal de la plataforma, conforme el cilindro hidráulico se extiende a una velocidad de 8 fpm.

Método analítico del centro instantáneo

6–85. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal del pistón, conforme la manivela gira a 1100 rpm en sentido horario.

6–86. Para la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21, utilice el método del centro instantáneo para determinar analíticamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la rueda de la manivela gira a 1375 rpm en sentido antihorario.

6–87. Para la configuración del mecanismo de corte mostrada en la figura P6.23, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de la cuchilla, conforme la manivela gira a 55 rpm en sentido horario.

6–88. Para el mecanismo del limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del brazo del limpiador, conforme la manivela gira a 35 rpm en sentido antihorario.

6–89. Para el chapoteadero lavador de vegetales mostrado en la figura P6.27, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del tanque de agua, conforme la manivela es impulsada a 95 rpm en sentido antihorario.

6–90. Para el mecanismo agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular del segmento de engrane, conforme la manivela es impulsada a 85 rpm en sentido antihorario.

6–91. Para la configuración de la cortadora manual mostrada en la figura P6.31, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad angular requerida en el mango, para pasar la hoja de corte a través del metal a una velocidad de 2.5 mm/s.

6–92. Para la bomba de aire de pedal mostrada en la figura P6.33, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad de compresión del cilindro, conforme el ensamble del pedal gira a una velocidad de 0.6 rad/s en sentido antihorario.

6–93. En la figura P6.35 se ilustra el mecanismo compresor de dos cilindros. Para la configuración mostrada, utilice el método de centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de ambos pistones, conforme la manivela de 1.5 in es impulsada a 1775 rpm en sentido horario. Calcule, asimismo, la velocidad de salida del flujo volumétrico instantáneo del cilindro derecho.

6–94. En la figura P6.37 se muestra un dispositivo para mover paquetes. Para la configuración ilustrada, utilice el método gráfico del centro instantáneo con la finalidad de determinar la velocidad lineal del paquete, conforme la manivela gira a 30 rpm en sentido horario.

6–95. En la figura P6.39 se muestra un dispositivo para mover paquetes. Para la configuración ilustrada, utilice el método del centro instantáneo con la finalidad de determinar analíticamente la velocidad lineal de la plataforma, conforme el cilindro hidráulico se retrae a una velocidad de 7 fpm.

Curvas de velocidad: método gráfico

6–96. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19 es impulsada a una velocidad constante de 1750 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento lineal del pistón en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad del pistón en función del tiempo.

6–97. La rueda de la manivela de la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21 es impulsada a una velocidad constante de 1500 rpm en sentido antihorario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento lineal de la hoja de la sierra en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad de la hoja de la sierra en función del tiempo.

6–98. La manivela del mecanismo de corte mostrado en la figura P6.23 es impulsada a una velocidad constante de 80 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento lineal de la cuchilla en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad de la cuchilla en función del tiempo.

6–99. La manivela del mecanismo limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25 es impulsada a una velocidad constante de 65 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento angular de la hoja del limpiador en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad angular de la hoja del limpiador en función del tiempo.

6–100. La manivela del chapoteadero mostrado en la figura P6.27 es impulsada a 90 rpm en sentido antihorario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento angular del chapoteadero en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad angular del tanque en función del tiempo.

6–101. La manivela del mecanismo agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29 es impulsada a una velocidad de 80 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento angular del segmento de engrane en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la velocidad angular del segmento de engrane en función del tiempo.

6–102. La manivela del mecanismo compresor de dos cilindros mostrado en la figura P6.35 es impulsada a una velocidad de 1250 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento lineal de ambos pistones en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener las curvas de velocidad de ambos pistones en función del tiempo.

6–103. La manivela del dispositivo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.37 es impulsada a una velocidad de 25 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva del desplazamiento lineal del ariete en función del ángulo de la manivela. Convierta el ángulo de la manivela a tiempo. Luego, calcule gráficamente la pendiente con la finalidad de obtener la curva de velocidad del ariete en función del tiempo.

Curvas de velocidad: método analítico

6–104. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19 es impulsada a una velocidad constante de 2150 rpm en sentido antihorario. Utilice una hoja de cálculo para elaborar analíticamente la curva de desplazamiento lineal del pistón en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad del pistón en función del tiempo.

6–105. La rueda de la manivela de la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21 es impulsada a una velocidad constante de 1900 rpm en sentido horario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento lineal de la hoja de la sierra en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, utilice diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad de la hoja de la sierra en función del tiempo.

6–106. La manivela del mecanismo de corte mostrado en la figura P6.23 es impulsada a una velocidad constante de 80 rpm en sentido horario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento lineal de la cuchilla en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad de la cuchilla en función del tiempo.

6–107. La manivela del mecanismo limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25 es impulsada a una velocidad constante de 55 rpm en sentido antihorario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento angular de la hoja del limpiador, en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas para obtener la curva de velocidad angular de la hoja del limpiador en función del tiempo.

6–108. La manivela del chapoteadero mostrado en la figura P6.27 es impulsada a una velocidad de 65 rpm en sentido horario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento angular del chapoteadero en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad angular del tanque en función del tiempo.

6–109. La manivela del agitador de la lavadora mostrado en la figura P6.29 es impulsada a 65 rpm en sentido antihorario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento angular del segmento de engrane en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad angular del segmento de engrane en función del tiempo.

6–110. La manivela del mecanismo compresor de dos cilindros mostrado en la figura P6.35 es impulsada a 1500 rpm en sentido antihorario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento lineal de ambos pistones en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener las curvas de velocidad de ambos pistones en función del tiempo.

6–111. La manivela del mecanismo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.37 es impulsada a 30 rpm en sentido antihorario. Utilice una hoja de cálculo con la finalidad de elaborar analíticamente la curva de desplazamiento lineal del ariete en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela sobre el eje. Luego, use diferenciales numéricas con la finalidad de obtener la curva de velocidad del ariete en función del tiempo.

Velocidad con Working Model

6–112. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P6.19 es impulsada a una velocidad constante de 1750 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model para crear una simulación y graficar la velocidad lineal del pistón en función del ángulo de la manivela.

6–113. La rueda de la manivela de la sierra reciprocante mostrada en la figura P6.21 es impulsada a una velocidad constante de 1500 rpm en sentido antihorario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad lineal de la hoja de la sierra en función del ángulo de la manivela.

6–114. La manivela del mecanismo de corte mostrado en la figura P6.23 es impulsada a una velocidad constante de 80 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad angular de la cuchilla en función del ángulo de la manivela.

6–115. La manivela del mecanismo limpiador del cristal trasero mostrado en la figura P6.25 es impulsada a una velocidad constante de 65 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad angular de la hoja del limpiador en función del ángulo de la manivela.

6–116. La manivela del chapoteadero mostrado en la figura P6.27 es impulsada a 90 rpm en sentido antihorario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad angular del tanque en función del ángulo de la manivela.

6–117. La manivela del mecanismo agitador de una lavadora mostrado en la figura P6.29 es impulsada a una velocidad de 80 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad angular del segmento de engrane en función del ángulo de la manivela.

6–118. La manivela del mecanismo compresor de dos cilindros mostrado en la figura P6.35 es impulsada a una velocidad de 1250 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad angular de ambos pistones en función del ángulo de la manivela.

6–119. La manivela del dispositivo que mueve paquetes mostrado en la figura P6.37 es impulsada a una velocidad de 25 rpm en sentido horario. Utilice el software Working Model con la finalidad de crear una simulación y graficar la velocidad lineal del ariete en función del ángulo de la manivela.

ESTUDIOS DE CASO

6–1. En la figura E6.1 se muestra un mecanismo que se utiliza para impulsar una sierra de potencia para metales. El mecanismo es impulsado por el eje de un motor eléctrico acoplada al engrane *A*. Examine cuidadosamente la configuración en cuestión. Luego, conteste las siguientes preguntas con la finalidad de obtener mayor conocimiento acerca de la operación del mecanismo.

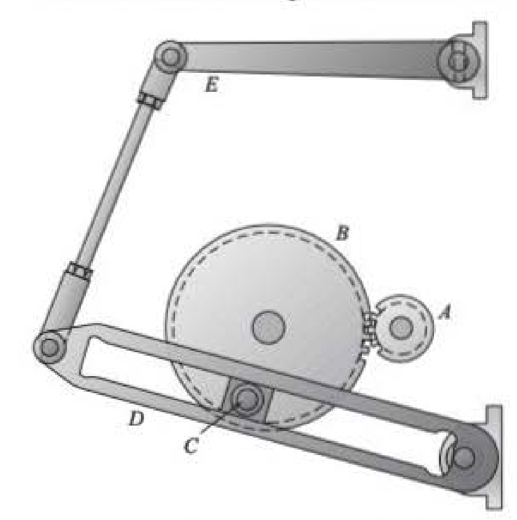


FIGURA E6.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Cuando el engrane *A* se fuerza a girar en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del engrane acoplado *B*?
2. Cuando el engrane *A* se fuerza a girar en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del perno incrustado *C*?
3. Cuando el engrane *A* se fuerza a girar en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la palanca *D*?
4. ¿Cómo difiere el movimiento de la palanca *D* del movimiento de la palanca *E*?

5. Determine la posición del engrane *B* que colocaría a la palanca *D* en su posición extrema inferior.
6. Determine la posición del engrane *B* que colocaría a la palanca *D* en su posición extrema superior.
7. Determine la cantidad de giros del engrane *B* para elevar la palanca *D* y el número de giros para bajar la palanca.
8. Aproximadamente, ¿cuál es la diferencia entre el tiempo para elevar la palanca *D* y el tiempo para bajarla?
9. Comente acerca del movimiento continuo de la palanca *E*.

6–2. La figura E6.2 ilustra un mecanismo que impulsa una mesa para una operación especial de afilado. Examine cuidadosamente la configuración en cuestión. Luego, conteste las siguientes preguntas con la finalidad de obtener mayor conocimiento acerca de la operación del mecanismo.

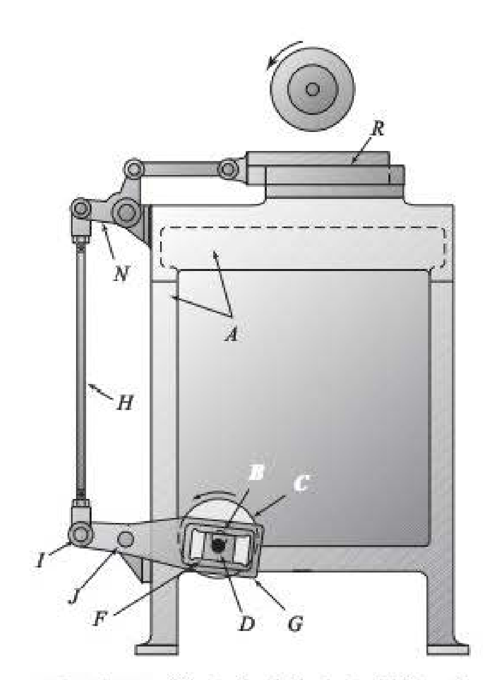


FIGURA E6.2 (Cortesía de Industrial Press).

1. Cuando la rueda *C* se fuerza a girar en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del perno *D*?
2. Cuando la rueda *C* se fuerza a girar en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del eslabón *G*?
3. Determine la posición de la rueda *C* que colocaría el punto *I* en su posición extrema superior.
4. Determine la posición de la rueda *C* que colocaría el punto *I* en su posición extrema inferior.
5. Determine la cantidad de giros de la rueda *C* para elevar el punto *I* y la cantidad de giros para bajarlo.
6. Aproximadamente, ¿cuál es la diferencia entre el tiempo para elevar el punto *I* y el tiempo para bajarlo?
7. Comente acerca del movimiento cíclico de la palanca *E*.
8. Describa el movimiento de la mesa *R*.
9. ¿Cuál es la función de este mecanismo?
10. ¿Por qué hay cuerdas de tornillo en los extremos del eslabón *H*?
11. Calcule la movilidad de este mecanismo.

6–3. La figura E6.3 ilustra un mecanismo que impulsa el fuelle en una máquina de respiración artificial. Examine cuidadosamente la configuración en cuestión. Luego, conteste las siguientes preguntas con la finalidad de obtener mayor conocimiento acerca de la operación del mecanismo.

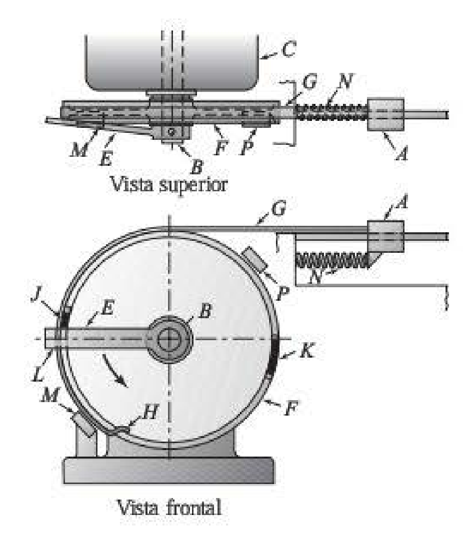


FIGURA E6.3 (Cortesía de Industrial Press).

1. Cuando el eslabón *E* gira continuamente en sentido antihorario y recorre la ranura *J* en el instante mostrado, ¿cuál es el movimiento del disco *F*?
2. Cuando el eslabón *E* gira continuamente en sentido antihorario y recorre la ranura *J* en el instante mostrado, ¿cuál es el movimiento de la banda *G*?
3. Cuando el eslabón *E* gira continuamente en sentido antihorario y recorre la ranura *J* en el instante mostrado, ¿cuál es el movimiento de la corredera *A*?
4. Conforme el eslabón *E* se aproxima a la rampa *M*, ¿qué sucede con el resorte *N*?
5. Conforme el eslabón *E* hace contacto con la rampa *M*, ¿qué sucede con el eslabón *E*?
6. Conforme el eslabón *E* hace contacto con la rampa *M*, ¿cuál es el movimiento del disco *F*?
7. Conforme el eslabón *E* hace contacto con la rampa *M*, ¿cuál es el movimiento de la corredera *A*?
8. Conforme el eslabón *E* continúa girando más allá de la rampa *M*, ¿cuál es el movimiento del disco *F*?
9. Conforme el eslabón *E* atrapa la ranura *K*, ¿cuál es el movimiento del disco *F*?
10. Describa el movimiento continuo de la corredera *A*, la cual impulsa un extremo del fuelle.

ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Definir las aceleraciones lineal, angular, normal, tangencial, de Coriolis y relativa.**
2. **Utilizar el método de aceleración relativa para obtener gráficamente la aceleración de un punto sobre un eslabón, conociendo la aceleración de otro punto sobre el mismo eslabón.**
3. **Utilizar el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la aceleración de un punto de interés sobre un eslabón flotante.**
4. **Saber cuándo se presenta la aceleración de Coriolis e incluirla en el análisis.**
5. **Usar el método de aceleración relativa para obtener analíticamente la aceleración de un punto.**
6. **Usar el método de aceleración relativa para obtener analíticamente la aceleración del punto de interés sobre un eslabón flotante.**
7. **Construir una curva de aceleración para localizar los valores extremos de aceleración.**

7.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de aceleración incluye determinar la manera en que ciertos puntos sobre los eslabones de un mecanismo "se aceleran" o "se desaceleran". La aceleración es una propiedad crítica por las fuerzas inerciales que se le asocian. En el estudio de las fuerzas, Sir Isaac Newton descubrió que la fuerza inercial es proporcional a la aceleración que adquiere un cuerpo. Este fenómeno se observa cada vez que usted avanza en su automóvil rápidamente hacia adelante y aplica los frenos con mucha fuerza.

Desde luego, una parte importante del diseño de mecanismos es garantizar que la resistencia de los eslabones y las uniones sea suficiente para soportar las fuerzas a que se someten. Es importante la comprensión de todas las fuerzas, sobre todo las de inercia. El análisis de fuerzas se presenta en los capítulos 13 y 14. Sin embargo, como paso preliminar, se debe efectuar el análisis de aceleración de los eslabones de un mecanismo.

El objetivo de este capítulo es la determinación de la aceleración en un eslabonamiento. El procedimiento principal que se usa en este análisis es el método de aceleración relativa, el cual utiliza los resultados del método de velocidad relativa presentado en el capítulo 6. En congruencia con otros capítulos de este libro, se utilizan técnicas tanto gráficas como analíticas.

7.2 ACELERACIÓN LINEAL

La *aceleración lineal* **A** de un punto es el cambio de la velocidad lineal de ese punto por unidad de tiempo. El capítulo 6 se dedicó al análisis de velocidad. La velocidad es una cantidad vectorial que se define por su magnitud y su dirección. Por lo tanto, un cambio en la magnitud o en la dirección de la velocidad produce una aceleración. La magnitud del vector de aceleración se designa como $a = |\mathbf{A}|$.

7.2.1 Aceleración lineal de puntos que se mueven en línea recta

Considere un punto que tiene movimiento rectilíneo o en línea recta. Un punto así se encuentra con más frecuencia sobre un eslabón que está sujeto a la bancada por medio de una unión de corredera. En este caso, tan solo puede cambiar la magnitud del vector de velocidad. La aceleración se describe matemáticamente como:

$$\mathbf{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} \tag{7.1}$$

Sin embargo, como

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

entonces,

$$\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \tag{7.2}$$

Para periodos de tiempo cortos, o cuando la aceleración se supone lineal, se utiliza la siguiente relación:

$$\mathbf{A} \cong \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} \tag{7.3}$$

Como la velocidad es un vector, la ecuación (7.1) establece que la aceleración también es un vector. La dirección de la aceleración lineal es en la dirección del movimiento lineal cuando el eslabón acelera. Por el contrario, cuando el eslabón desacelera, la dirección de la aceleración lineal es opuesta a la dirección del movimiento lineal.

La aceleración lineal se expresa en unidades de velocidad (longitud por tiempo) divididas entre unidades de tiempo, o longitud por tiempo al cuadrado. En el sistema tradicional estadounidense, las unidades de uso común son pies por segundo al cuadrado (ft/s^2) o pulgadas por segundo al cuadrado (in/s^2). En el sistema internacional, las unidades de uso común son metros por segundo al cuadrado (m/s^2) o milímetros por segundo al cuadrado (mm/s^2). Para fines de comparación, la aceleración lineal se expresa con frecuencia en relación con la aceleración de la gravedad: $g = 32.17$ ft/s^2 = 386.4 in/s^2 = 9.81 m/s^2. De modo que una aceleración de 10g es igual a 3864 in/s^2.

7.2.2 Aceleración rectilínea constante

Replanteando la ecuación (7.3), el cambio de velocidad que ocurre durante un periodo de aceleración constante se expresa como

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{final}} - \mathbf{V}_{\text{inicial}} = \mathbf{A}\,\Delta t \qquad (7.4)$$

Asimismo, el desplazamiento correspondiente que ocurre durante un periodo de aceleración constante se escribe como:

$$\Delta \mathbf{R} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\Delta t^2 + \mathbf{V}_{\text{inicial}}\,\Delta t \qquad (7.5)$$

Las ecuaciones (7.4) y (7.5) se combinan para obtener:

$$(\mathbf{V}_{\text{final}})^2 = (\mathbf{V}_{\text{inicial}})^2 + 2\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{R} \qquad (7.6)$$

Como el movimiento rectilíneo se da a lo largo de una línea recta, la dirección del desplazamiento, la velocidad y la aceleración (r, v, a) se especifican con un signo algebraico a lo largo de un eje de coordenadas. De modo que las ecuaciones (7.4), (7.5) y (7.6) se expresan en términos de las magnitudes vectoriales (r, v, a).

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.1

El elevador exprés de un edificio alto puede alcanzar una velocidad total de 15 mph en 3 s. Suponiendo que el elevador experimenta aceleración constante, determine la aceleración y el desplazamiento durante los 3 s.

SOLUCIÓN:

1. ***Calcule la aceleración***

Suponiendo que la aceleración es constante, se debe usar básicamente la ecuación (7.3). Como el elevador parte del reposo, el cambio de velocidad se calcula como:

$$\Delta \mathbf{V} = (15 \text{ mph} - 0) = 15 \text{ mph}$$
$$= \left(\frac{15 \text{ millas}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ milla}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 22 \text{ ft/s}$$

Entonces, la aceleración se calcula como:

$$\mathbf{A} = \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{(22 \text{ ft/s})}{3 \text{ s}} = 7.3 \text{ ft/s}^2 \uparrow$$

2. ***Normalice la aceleración con respecto a la gravedad***

Cuando las personas se aceleran en un elevador, la aceleración "se normaliza" con frecuencia en relación con la aceleración de la gravedad. La aceleración estándar de la gravedad (g) sobre la tierra es de 32.17 ft/s^2 o bien 9.81 m/s^2. Por consiguiente, la aceleración del elevador se expresa como:

$$\mathbf{A} = 7.3 \text{ ft/s}^2\left(\frac{1 \text{ g}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right) = 0.22 \text{ g}$$

3. ***Calcule el desplazamiento durante el intervalo de 3 segundos***

El desplazamiento se determina con la ecuación (7.5).

$$\Delta \mathbf{R} = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_{\text{inicial}}\Delta t = \frac{1}{2}(7.3 \text{ ft/s}^2)(3 \text{ s})^2 + (0)(3 \text{ s})$$
$$= 32.9 \text{ ft} \uparrow \text{ (o aproximadamente 3 pisos)}$$

7.2.3 Aceleración y el perfil de velocidad

Como se establece en la ecuación (7.1), la aceleración instantánea es la primera derivada de la velocidad instantánea con respecto al tiempo. Ocasionalmente se encontró una ecuación de forma cerrada para la velocidad instantánea de un punto. En tales casos, la derivada de la ecuación, evaluada en el tiempo especificado, proporcionará la aceleración instantánea. Con más frecuencia, sobre todo en los actuadores programables que se usan en tareas automatizadas, los perfiles de velocidad se especifican como se hizo en el capítulo 6. Recuerde que el desplazamiento en cierto intervalo de tiempo es el área debajo de la curva v-t. En cambio, la aceleración en un cierto tiempo es la pendiente de la curva v-t.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.2

Una operación automatizada de ensamble requiere movimiento lineal de un servomotor. El desplazamiento total debe ser de 10 in. Por razones de diseño, la velocidad máxima está limitada a 2 in/s, y la aceleración o la desaceleración máximas no deben exceder 4 in/s^2. Grafique el perfil de velocidad para esta aplicación.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine los parámetros del movimiento durante la aceleración***

En el perfil estándar de velocidad de un servomotor, la parte de aceleración del movimiento es aceleración constante. Reagrupando y sustituyendo las magnitudes de la velocidad v y de la aceleración a en la ecuación (7.3), se obtiene el tiempo transcurrido durante la aceleración.

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{(2 - 0)\ \text{in/s}}{4\ \text{in/s}^2} = 0.5\ \text{s}$$

Se usa la ecuación (7.5) para calcular la magnitud del desplazamiento durante la aceleración.

$$\Delta R = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_{\text{inicial}} \Delta t$$
$$= \frac{1}{2}\left(4\ \text{in/s}^2\right)(.5\ \text{s})^2 + (0)(.5\ \text{s}) = 0.5\ \text{in}$$

2. ***Calcule los parámetros de movimiento durante la desaceleración***

En el perfil estándar de velocidad, la parte de desaceleración del movimiento es aceleración constante. El tiempo transcurrido durante la desaceleración es:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{(0 - 2)\ \text{in/s}}{-4\ \text{in/s}^2} = 0.5\ \text{s}$$

La magnitud del desplazamiento durante la desaceleración es:

$$\Delta R = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_{\text{inicial}} \Delta t$$
$$= \frac{1}{2}\left(-4\ \text{in/s}^2\right)(.5\ \text{s})^2 + 22\ \text{in/s}(.5\ \text{s}) = 0.5\ \text{in}$$

3. ***Determine los parámetros del movimiento durante el estado estacionario***

Como durante la aceleración el desplazamiento es igual a 0.5 in y de otras 0.5 in durante la desaceleración, las 9 in restantes de desplazamiento ocurren durante el movimiento de velocidad constante. Se usa la ecuación (6.2) para calcular el tiempo transcurrido durante la parte de velocidad constante.

$$\Delta t = \frac{\Delta R}{v} = \frac{9\ \text{in}}{2\ \text{in/s}} = 4.5\ \text{s}$$

4. ***Calcule los parámetros del movimiento durante el estado estacionario***

Usando la información de velocidad y tiempo de esta secuencia, se genera el perfil de velocidad mostrado en la figura 7.1.

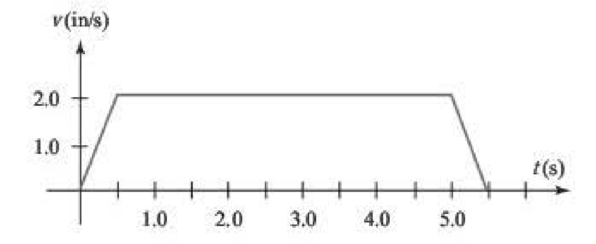


FIGURA 7.1 Perfil de velocidad del problema de ejemplo 7.2.

7.2.4 Aceleración lineal de un punto en general

Como se mencionó anteriormente, la velocidad de un punto con movimiento en general suele cambiar de dos maneras:

1. Un cambio en la magnitud de la velocidad. Este produce una aceleración que actúa a lo largo de la trayectoria del movimiento, como se señaló en la sección anterior. Esta aceleración se conoce como *aceleración tangencial* $\mathbf{A}^t$.
2. La dirección del vector velocidad puede cambiar conforme pasa el tiempo. Esto ocurre cuando el eslabón, con el cual está asociado el punto, experimenta movimiento giratorio que produce una aceleración centrífuga, la cual actúa perpendicularmente a la dirección de la trayectoria del movimiento. La aceleración se conoce como *aceleración normal* $\mathbf{A}^n$.

La figura 7.2 muestra el punto A moviéndose a lo largo de una trayectoria curva. La aceleración tangencial del punto A, $\mathbf{A}_A^t$, es la aceleración lineal a lo largo de la dirección del movimiento. Observe que el vector apunta en la dirección del movimiento porque el punto A está acelerando. Si el punto A estuviera desacelerando, el vector de la aceleración apuntaría en sentido opuesto a la dirección del movimiento. Desde luego, el vector de velocidad siempre apunta en la dirección del movimiento. Por lo tanto, un punto que acelera está asociado con un vector de aceleración tangencial que es consistente con el vector de velocidad. Por el contrario, la desaceleración está asociada con un vector de aceleración tangencial opuesto al vector de velocidad. La magnitud de la aceleración tangencial se determina usando las ecuaciones (7.1), (7.2) o (7.3).

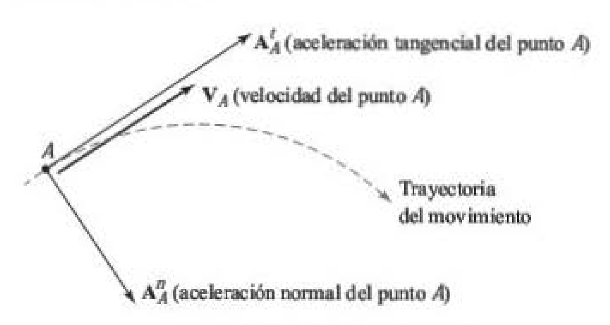


FIGURA 7.2 Aceleración del punto A.

La aceleración normal del punto A, $\mathbf{A}_A^n$, es resultado del cambio en la dirección del vector de velocidad. Actúa a lo largo de la línea perpendicular a la dirección del movimiento y hacia el centro de curvatura de la trayectoria. En la sección 7.4 se presentan detalles adicionales de las aceleraciones tangencial y normal.

7.3 ACELERACIÓN DE UN ESLABÓN

Recuerde que en la sección 6.3 se vio que cualquier movimiento, incluso un movimiento complejo, se puede visualizar como una combinación de movimiento en línea recta y movimiento giratorio. La descripción completa del movimiento de un eslabón consiste en la especificación del movimiento lineal de un punto, y el movimiento giratorio del eslabón con respecto a ese punto. Como con la velocidad, varios puntos sobre un eslabón pueden tener aceleraciones diferentes, aun cuando el eslabón completo tenga la misma aceleración giratoria.

7.3.1 Aceleración angular

La *aceleración angular* α de un eslabón es la velocidad angular de ese eslabón por unidad de tiempo. Matemáticamente, la aceleración angular de un eslabón se describe como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.7}$$

Sin embargo, como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

entonces,

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.8}$$

Para periodos de tiempo cortos, o cuando se supone que la aceleración angular es lineal, se utiliza la siguiente relación:

$$\alpha \cong \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{7.9}$$

Al igual que en el análisis de la sección 7.2, la dirección de la aceleración angular está en la dirección del movimiento cuando la velocidad angular se incrementa, o el eslabón acelera. Por el contrario, la aceleración angular tiene dirección opuesta al movimiento cuando la velocidad angular disminuye, o el eslabón desacelera. En los análisis sobre un plano, la dirección se describe como en sentido horario o en sentido antihorario.

La aceleración angular se expresa en unidades de velocidad angular (ángulo por tiempo) divididas entre unidades de tiempo, o ángulo por tiempo al cuadrado. Tanto en el sistema tradicional estadounidense como en el sistema internacional, las unidades que se usan comúnmente son grados por segundo al cuadrado (deg/s^2), revoluciones por segundo al cuadrado (rev/s^2) o la unidad preferida de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2).

7.3.2 Aceleración angular constante

Replanteando la ecuación (7.7), el cambio de velocidad angular que ocurre durante un periodo de aceleración angular constante se expresa como:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{final}} - \omega_{\text{inicial}} = \alpha\,\Delta t \tag{7.10}$$

Asimismo, el desplazamiento angular correspondiente que ocurre durante un periodo de aceleración angular constante se expresa como:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 + \omega_{\text{inicial}}\,\Delta t \tag{7.11}$$

Las ecuaciones (7.10) y (7.11) se combinan para obtener:

$$(\omega_{\text{final}})^2 = (\omega_{\text{inicial}})^2 + 2\alpha\Delta\theta \tag{7.12}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.3

Un motor eléctrico impulsa la rueda de un afilador en sentido horario, como se indica en la figura 7.3. La rueda acelera hasta 1800 rpm en 2 s cuando se enciende el motor. Suponiendo que esta aceleración es constante, determine la aceleración angular de la rueda afiladora. Determine asimismo el número de revoluciones que la rueda gira antes de alcanzar la velocidad final.

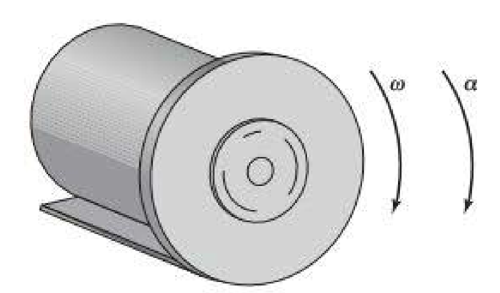


FIGURA 7.3 Rueda del afilador del problema de ejemplo 7.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la aceleración***

Como la aceleración normalmente se especifica en rad/s^2, se convierte la velocidad de la rueda del afilador a rad/s de la siguiente manera:

$$\Delta\omega = 1800 \text{ rpm}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 188.5 \text{ rad/s, en sentido horario}$$

Con aceleración constante, se debe usar la ecuación (7.9) para obtener:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$
$$= \left(\frac{188.5 \text{ rad/s} - 0}{2 \text{ s}}\right) = 94.2 \text{ rad/s}^2\text{, en sentido horario}$$

La dirección de la aceleración es en sentido horario y tiene la dirección del movimiento porque la rueda del afilador está acelerando.

2. ***Calcule el desplazamiento durante el intervalo de 2 segundos***

El número de revoluciones durante este periodo de aceleración se determina con la ecuación (7.11).

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 + \omega_{\text{inicial}}\Delta t = \frac{1}{2}\left(94.2 \text{ rad/s}^2\right)(2 \text{ s})^2 + (0)(2 \text{ s})$$
$$= 188.4 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 30.0 \text{ revoluciones}$$

7.4 ACELERACIÓN NORMAL Y TANGENCIAL

Como se expuso en la sección 7.2.4, la velocidad de un punto que se mueve en una trayectoria cualquiera cambia de dos maneras independientes: la magnitud o la dirección del vector de velocidad pueden cambiar en el tiempo. Desde luego, la aceleración es el cambio de velocidad durante el tiempo transcurrido, de manera que la aceleración generalmente se divide en dos componentes: normal y tangencial. La componente normal se forma como resultado del cambio en la dirección del vector de velocidad. La componente tangencial se forma como resultado del cambio en la magnitud del vector de velocidad.

7.4.1 Aceleración tangencial

Para un punto sobre un eslabón giratorio, se requiere poco esfuerzo para determinar la dirección de estos componentes de la aceleración. Recuerde que la velocidad instantánea de un punto sobre un eslabón que gira es perpendicular a la línea que conecta ese punto con el centro de rotación. Cualquier cambio en la magnitud de esta velocidad crea una aceleración tangencial, que

también es perpendicular a la línea que une el punto con el centro de rotación. La magnitud de la aceleración tangencial del punto A sobre un eslabón 2 que gira se expresa como:

$$a_A^t = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d(\omega_2 r_{OA})}{dt} = r_{OA}\frac{d\omega_2}{dt} = r_{OA}\alpha_2 \quad \textbf{(7.13)}$$

Es muy importante recordar que la aceleración angular α en la ecuación (7.13) se debe expresar en unidades de radianes por tiempo al cuadrado. Los radianes por segundo al cuadrado son la unidad más común. Al igual que en el análisis de la sección 7.2, la aceleración tangencial actúa en la dirección del movimiento cuando la velocidad se incrementa o el punto acelera. Por el contrario, la aceleración tangencial actúa en dirección opuesta al movimiento cuando la velocidad disminuye o el punto desacelera.

7.4.2 Aceleración normal

Cualquier cambio en la dirección de la velocidad crea una aceleración normal, la cual siempre se dirige hacia el centro de rotación. La figura 7.4a muestra un eslabón que gira a velocidad constante. La velocidad del punto A se muestra un instante antes y un instante después de la configuración en consideración, separada por un pequeño ángulo $d\theta_2$. Como el eslabón gira a velocidad constante, son iguales las magnitudes de V_A' y V_A''. De modo que $V_A' = V_A''$.

La figura 7.4b ilustra un polígono de velocidades resuelto vectorialmente para obtener el cambio dv de la velocidad. Observe que el cambio dv en el vector de velocidad está dirigido hacia el centro de rotación del eslabón. De hecho, la aceleración normal *siempre* estará dirigida hacia el centro de rotación del eslabón. Esto es así porque como el punto gira alrededor de un pivote fijo, el vector de velocidad cambiará a lo largo de la curvatura del movimiento. Por consiguiente, el vector normal a esta curvatura siempre estará dirigido hacia el pivote fijo.

Como $\Delta\theta$ es pequeño en la figura 7.4a, se establece la siguiente relación:

$$dv_A = v_A d\theta_2$$

Debido a que la aceleración se definió como el cambio de velocidad durante el tiempo transcurrido, al dividir ambos lados de la expresión anterior entre el tiempo, se obtiene:

$$a_A^n = \frac{dv_A}{dt} = v_A\frac{d\theta_2}{dt} = v_A\omega_2$$

Usando la ecuación (6.6), que relaciona las magnitudes de la velocidad lineal y la velocidad angular, se derivan las siguientes ecuaciones de la magnitud de la aceleración normal de un punto:

$$a_A^n = v_A\omega_2 = (\omega_2 r_{OA})\omega_2 = \omega_2^2 r_{OA} \quad \textbf{(7.14)}$$

$$a_A^n = v_A\omega_2 = v_A\left(\frac{v_A}{r_{OA}}\right) = \frac{v_A^2}{r_{OA}} \quad \textbf{(7.15)}$$

7.4.3 Aceleración total

Como se mencionó anteriormente, el análisis de aceleración es importante porque las aceleraciones generan fuerzas inerciales. Se deben determinar estas cargas para asegurarse que la máquina se diseñe adecuadamente para manejar estas cargas dinámicas. Las fuerzas inerciales son proporcionales a la aceleración total de un cuerpo. La *aceleración total* **A** es el vector resultante de las componentes tangencial y normal. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_A^n +> \mathbf{A}_A^t \quad \textbf{(7.16)}$$

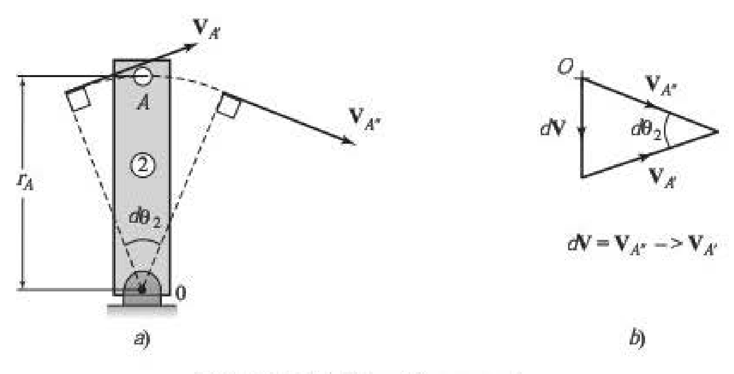


FIGURA 7.4 Aceleración normal.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.4

El mecanismo que se presenta en la figura 7.5 se usa en un centro de distribución para empujar cajas a lo largo de una plataforma hacia el área de carga. El eslabón de entrada es impulsado por un motor eléctrico el cual, en el instante mostrado, tiene una velocidad de 25 rad/s y acelera a 500 rad/s^2. Si el eslabón de entrada tiene una longitud de 250 mm, determine la aceleración instantánea del extremo del eslabón de entrada en la posición que se muestra.

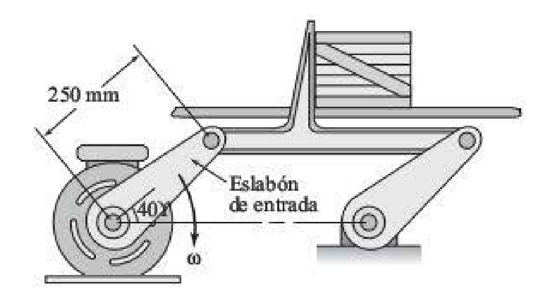


FIGURA 7.5 Mecanismo de transferencia del problema de ejemplo 7.4.

SOLUCIÓN:

1. ***Dibuje el diagrama cinemático y calcule los grados de libertad***

El diagrama cinemático del mecanismo de transferencia se muestra en la figura 7.6a. Observe que este es el conocido mecanismo de cuatro barras.

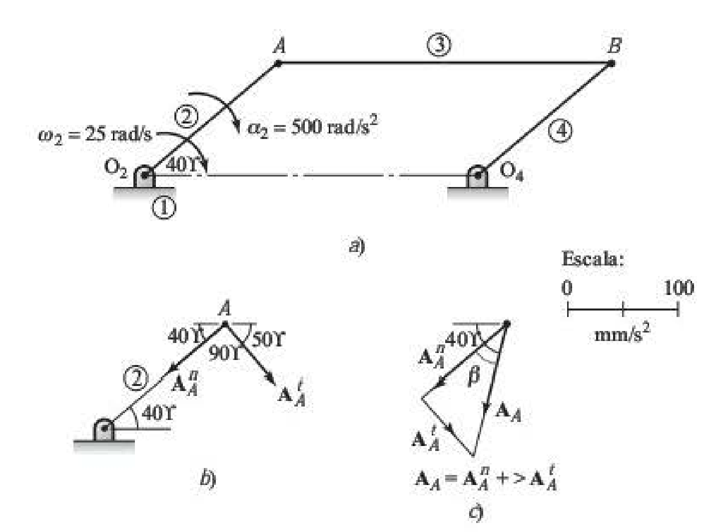


FIGURA 7.6 Diagramas del problema de ejemplo 7.4.

2. ***Determine la aceleración tangencial del punto* A**

Como el eslabón de entrada (eslabón 2) está en rotación pura, se obtienen fácilmente las componentes de aceleración en el extremo del eslabón. Se usa la ecuación (7.13) para determinar la magnitud de la aceleración tangencial.

$$a_A^t = r\alpha_2 = (250 \text{ mm})\left(500 \text{ rad/s}^2\right) = 125000 \text{ mm/s}^2 = 125.0 \text{ m/s}^2$$

Como el eslabón está acelerando, la dirección del vector se encuentra en la dirección del movimiento en el extremo del eslabón, la cual es perpendicular al eslabón mismo. Por lo tanto, la aceleración tangencial es

$$\mathbf{A}_A^t = 125.0 \text{ m/s}^2 \quad \searrow 50°$$

3. ***Determine la aceleración normal del punto* A**

Se utiliza la ecuación (7.14) para determinar la magnitud de la aceleración normal.

$$a_A^n = r_{O_2A}\omega_2^2 = (250 \text{ mm})\left(25 \text{ rad/s}\right)^2 = 156250 \text{ mm/s}^2 = 156.25 \text{ m/s}^2$$

La aceleración normal siempre apunta hacia el centro de rotación. Por consiguiente, la aceleración normal se calcula como:

$$\mathbf{A}_A^n = 156.25 \text{ m/s}^2 \quad \swarrow 40°$$

Las componentes de la aceleración se muestran en la figura 7.6b.

4. ***Determine la aceleración total del punto* A**

La aceleración total se calcula con los métodos analíticos presentados en el capítulo 3. En la figura 7.6c se muestra un diagrama de la suma de vectores. Como las componentes normal y tangencial son ortogonales, la magnitud de la aceleración total se calcula como:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2}$$
$$= \sqrt{(125.0 \text{ m/s}^2)^2 + (2156.25 \text{ m/s}^2)^2} = 200.10 \text{ m/s}^2$$

El ángulo del vector de aceleración total a partir de la componente normal se calcula de la siguiente manera:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{a_A^t}{a_A^n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{125.0 \text{ m/s}^2}{156.25 \text{ m/s}^2}\right) = 38.7^\circ$$

La dirección del vector de aceleración total a partir del eje horizontal es

$$40.0^\circ + 38.7^\circ = 78.7^\circ$$

Formalmente, la aceleración total se escribe como:

$$\mathbf{A}_A = 200.10 \text{ m/s}^2 \quad \overline{78.7^\circ \swarrow}$$

La aceleración total también se determina con un procedimiento gráfico utilizando el CAD o las técnicas de dibujo tradicional, como se explicó en el capítulo 3.

7.5 MOVIMIENTO RELATIVO

Como se vio en detalle en el capítulo 6, la diferencia entre el movimiento de dos puntos se conoce como *movimiento relativo*. La *velocidad relativa* se definió como la velocidad de un objeto observado desde otro objeto de referencia que también se está moviendo. Del mismo modo, la *aceleración relativa* es la aceleración de un objeto observado desde otro objeto de referencia que también se está moviendo.

7.5.1 Aceleración relativa

Como con la velocidad, se emplea la siguiente notación para distinguir entre aceleración absoluta y aceleración relativa:

$\mathbf{A}_A$ = aceleración absoluta (total) del punto A

$\mathbf{A}_B$ = aceleración absoluta (total) del punto B

$\mathbf{A}_{B/A}$ = aceleración relativa (total) del punto B en relación con A
= aceleración (total) del punto B "como se observa" desde el punto A

Partiendo de la ecuación (6.10), la relación entre la velocidad absoluta y la velocidad relativa se escribe como:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A +> \mathbf{V}_{B/A}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación de velocidad relativa, se obtiene la ecuación de aceleración relativa. Matemáticamente esto se escribe como:

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A +> \mathbf{A}_{B/A} \tag{7.17}$$

Normalmente, resulta más conveniente separar las aceleraciones totales de la ecuación (7.17) en sus componentes normal y tangencial, de modo que se separa cada aceleración en sus dos componentes:

$$\mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t = \mathbf{A}_A^n +> \mathbf{A}_A^t +> \mathbf{A}_{B/A}^n +> \mathbf{A}_{B/A}^t \tag{7.18}$$

Observe que las ecuaciones (7.17) y (7.18) son ecuaciones vectoriales y se deben usar las técnicas analizadas en el capítulo 3 para el manejo de tales ecuaciones.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.5

La figura 7.7 muestra una sierra de potencia para metales. En este instante, el motor eléctrico gira en sentido antihorario e impulsa el extremo libre de la manivela del motor (punto B) a una velocidad de 12 in/s. Además, la manivela está acelerando a 37 rad/s^2. La parte superior de la sierra se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 9.8 in/s y acelera a 82 in/s^2. Determine la aceleración relativa del punto C con respecto al punto B.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

La figura 7.8a presenta el diagrama cinemático de la sierra de potencia para metales. Observe que este es el conocido mecanismo de manivela-corredera con un grado de libertad.

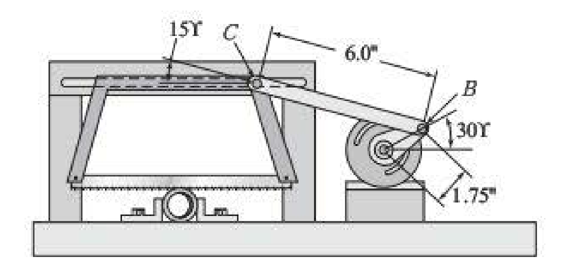


FIGURA 7.7 Sierra de potencia del problema de ejemplo 7.5.

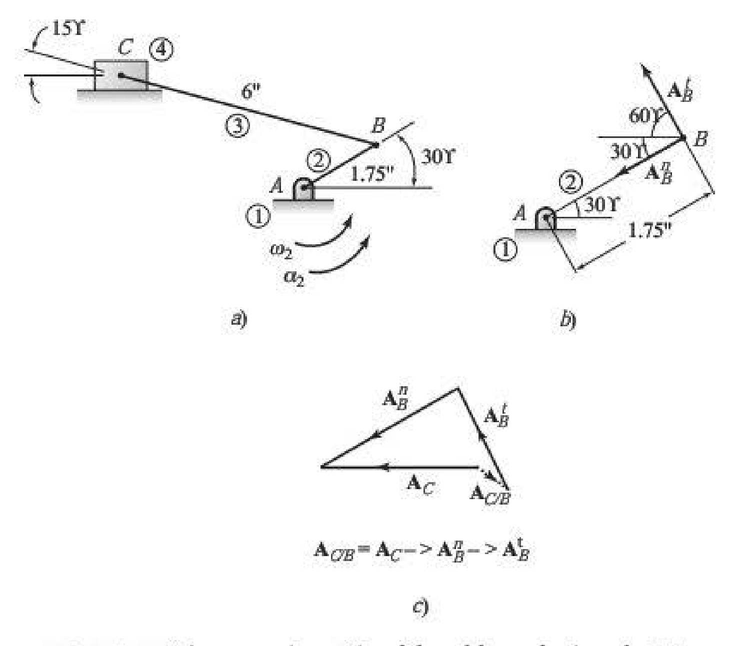


FIGURA 7.8 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 7.5.

2. ***Determine la aceleración tangencial del punto* B**

Examinando el diagrama cinemático, es evidente que el punto *B* viaja hacia arriba y a la izquierda, conforme el eslabón 2 gira en sentido antihorario. Como la manivela del motor (eslabón 2) tiene rotación pura, se calculan fácilmente las componentes de la aceleración en el extremo del eslabón. Se utiliza la ecuación (7.13) para determinar la magnitud de la aceleración tangencial.

$$a_B^t = r_{AB}\alpha_2 = (1.75 \text{ in})\left(37 \text{ rad/s}^2\right) = 64.75 \text{ in/s}^2$$

Como el eslabón acelera, la dirección del vector está en la dirección del movimiento en el extremo del eslabón. Así, la aceleración tangencial se calcula como:

$$\mathbf{A}_B^t = 64.75 \text{ in/s}^2 \quad 60°\nwarrow$$

3. ***Calcule la aceleración normal del punto* B**

Se usa la ecuación (7.15) para determinar la magnitud de la aceleración normal.

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r_{AB}} = \frac{(12 \text{ in/s})^2}{1.75 \text{ in}} = 82.29 \text{ in/s}^2$$

La aceleración normal siempre está dirigida hacia el centro de rotación. Por consiguiente, la aceleración normal es

$$\mathbf{A}_B^n = 82.29 \text{ in/s}^2 \quad 30°\swarrow$$

Se aísla el eslabón 2 y las componentes de esta aceleración se indican en la figura 7.8b.

4. ***Especifique la aceleración del punto* C**

El punto *C* está restringido a movimiento lineal. Por lo tanto, el punto *C* no experimenta aceleración normal. La aceleración total se da en el planteamiento del problema como:

$$\mathbf{A}_C = 82 \text{ in/s}^2 \leftarrow$$

5. ***Construya el polígono de aceleración de la aceleración de* C *relativa con* B**

Para determinar la aceleración relativa, se plantea la ecuación (7.16) en términos de los puntos B y C y se reagrupa como:

$$\mathbf{A}_{C/B} = \mathbf{A}_C -> \mathbf{A}_B$$

Como el punto B tiene sus dos componentes de aceleración, la ecuación se escribe como:

$$\mathbf{A}_{C/B} = \mathbf{A}_C -> (\mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t) = \mathbf{A}_C -> \mathbf{A}_B^n -> \mathbf{A}_B^t$$

A partir de esta ecuación se forma un polígono vectorial (figura 7.8c). El vector desconocido se determina con los métodos presentados en el capítulo 3. Para determinar el vector $\mathbf{A}_{C/B}$, se puede aplicar una solución gráfica o analítica.

6. ***Obtenga las magnitudes del vector desconocido***

Usando un método analítico, la aceleración $\mathbf{A}_{C/B}$ se calcula separando los vectores en sus componentes vertical y horizontal. Consulte la tabla 7.1.

TABLA 7.1 Componentes vectoriales horizontal y vertical de la aceleración $A_{C/B}$

Vector	Ángulo de referencia (θ_x)	Componente horizontal $a_h = a \cos \theta_x$	Componente vertical $a_v = a \operatorname{sen} \theta_x$
$\mathbf{A}_c$	180°	− 82.00	0
$\mathbf{A}_B{}^n$	210°	− 71.26	− 41.15
$\mathbf{A}_B{}^t$	120°	− 32.83	56.08

Se escriben ecuaciones algebraicas separadas de las componentes horizontal y vertical, de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_{C/B} = \mathbf{A}_C -> \mathbf{A}_B^n -> \mathbf{A}_B^t$$

comp. horizontal: $\mathbf{A}^h_{C/B} = (-82.0) - (-71.27) - (-32.38)$

$$= +\ 21.35 = 21.35 \text{ in/s}^2$$

comp. vertical: $\mathbf{A}^v_{C/B} = (0) - (-41.15) - (+56.08) = -14.93 \text{ in/s}^2$

La magnitud de la aceleración se calcula como:

$$\mathbf{A}_{C/B} = \sqrt{\left(a^h_{C/B}\right)^2 + \left(a^v_{C/B}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(21.35)^2 + (-14.93)^2} = 26.05 \text{ in/s}^2$$

La dirección del vector se determina como:

$$\theta_x = \tan^{-1}\left[\frac{a^h_{C/B}}{a^v_{C/B}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{-14.93 \text{ in/s}^2}{21.35 \text{ in/s}^2}\right] = -35° = \overline{\searrow 35°}$$

Finalmente, la aceleración relativa de C con respecto a B es

$$\mathbf{A}_{C/B} = 26.05 \text{ in/s}^2 \ \overline{\searrow 35°}$$

7.5.2 Componentes de la aceleración relativa

La aceleración de los puntos de un mecanismo se analiza mucho más fácilmente cuando se separa en sus componentes normal y tangencial. Para eslabones que están sujetos directamente a la bancada, la dirección de las componentes de la aceleración es evidente, como se vio en la sección anterior. La componente normal siempre está dirigida hacia el centro de rotación; mientras que la componente tangencial es perpendicular a la componente normal, y está en una dirección consistente con la aceleración o con la desaceleración del punto. Recuerde que la aceleración tangencial está en la dirección del movimiento cuando el punto acelera. Por el contrario, la aceleración tangencial es opuesta a la dirección del movimiento cuando el punto desacelera.

En puntos que se encuentran sobre el mismo eslabón, un eslabón que no está sujeto directamente a la bancada, el análisis se centra en las aceleraciones relativas de esos puntos. La figura 7.9 muestra un eslabón como este, que no está directamente sujeto a la bancada, generalmente llamado eslabón flotante. Se

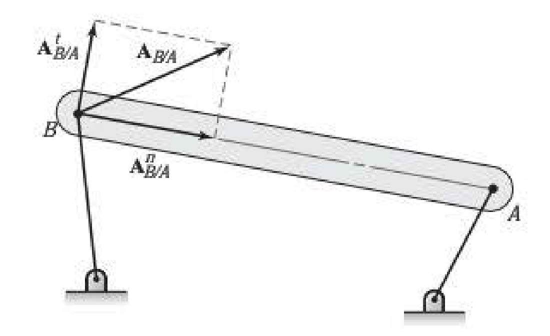


FIGURA 7.9 Aceleraciones relativas normal y tangencial.

muestra la aceleración relativa entre dos puntos que se encuentran sobre ese eslabón. Observe que también se presentan las componentes normal y tangencial de esta aceleración, y están dirigidas a lo largo del eslabón (normal) y son perpendiculares al eslabón (tangencial). Reiterando, la aceleración relativa de dos puntos es la aceleración de un punto observado desde el otro punto de referencia.

Como en el análisis de velocidad, el movimiento relativo consiste en rotación relativa pura del punto observado en relación con el punto de referencia. En otras palabras, el movimiento relativo de B con respecto a A se visualiza como si el punto B estuviera girando alrededor del punto A. Por lo tanto, la componente normal de la aceleración relativa está dirigida hacia el centro de rotación relativa, o punto de referencia. La aceleración tangencial relativa es perpendicular a la aceleración normal relativa. Las magnitudes de estas componentes se calculan de modo similar a la aceleración absoluta de los puntos que giran alrededor de puntos fijos.

$$a^t_{B/A} = \frac{dv_{B/A}}{dt} = \frac{d(\omega_3 r_{BA})}{dt} = r_{BA}\alpha_3 \quad (7.19)$$

$$a^n_{B/A} = r_{BA}\omega^2 = \frac{(v_{B/A})^2}{r_{BA}} \quad (7.20)$$

La dirección de la aceleración tangencial relativa debe ser consistente con la aceleración angular del eslabón flotante, y viceversa. En referencia a la figura 7.9, la aceleración tangencial relativa muestra la aceleración tangencial del punto B conforme gira alrededor del punto A dirigida hacia arriba a la derecha, de lo cual se deduce una aceleración angular del eslabón 3 en sentido horario.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.6

Para la sierra de potencia para metales del problema de ejemplo 7.5, determine la aceleración angular del eslabón conector de 6 in (eslabón 3).

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique la geometría del eslabón relevante***

La aceleración relativa de C con respecto a B se determinó como:

$$\mathbf{A}_{C/B} = 26.05 \text{ in/s}^2 \;\; \overline{\backslash 35°}$$

En la figura 7.7 observe asimismo que el eslabón conector tiene un ángulo de inclinación de 15°. Empleando esos datos, la aceleración relativa total se obtiene a partir de las componentes normal y tangencial, las cuales se ilustran en la figura 7.10.

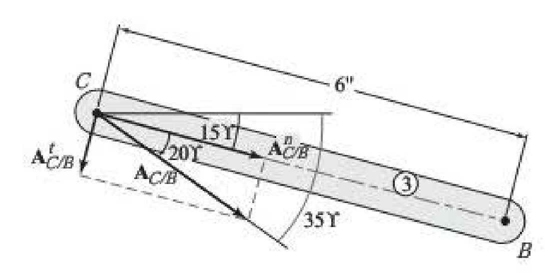


FIGURA 7.10 Aceleraciones relativas del problema de ejemplo 7.6.

2. ***Obtenga la aceleración total relativa a partir de las componentes normal y tangencial***

La figura 7.10 muestra que son 20° (35° – 15°) los que separan al vector de aceleración total relativa y la componente normal. Entonces, las magnitudes de las componentes de la aceleración relativa se determinan analíticamente con las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\mathbf{A}^t_{C/B} = a_{C/B}(\text{sen } 20°) = 26.05 \text{ in/s}^2 (\text{sen } 20°) = 8.91 \text{ in/s}^2 \;\; \overline{\backslash 15°}$$

$$\mathbf{A}^n_{C/B} = a_{C/B}(\cos 20°) = 26.05 \text{ in/s}^2 (\cos 20°) = 24.48 \text{ in/s}^2 \;\; 75°\!\!\nearrow$$

3. ***Calcule la aceleración angular del eslabón 3***

En la figura 7.10 se observa que la aceleración tangencial del punto *C* con respecto a *B* es hacia abajo a la derecha. Esto implica que la aceleración angular del eslabón 3 tiene sentido antihorario. La magnitud se determina como:

$$\alpha_3 = \frac{a^t_{C/B}}{r_{CB}} = \frac{8.91 \text{ in/s}^2}{6 \text{ in}} = 1.49 \text{ rad/s}^2$$

Por lo tanto, la aceleración angular del eslabón conector se determina de la siguiente manera:

$$\alpha_3 = 1.49 \text{ rad/s}^2\text{, en sentido antihorario}$$

7.6 ANÁLISIS DE ACELERACIÓN RELATIVA: MÉTODO GRÁFICO

El análisis de aceleración generalmente se emplea para determinar la aceleración de varios puntos sobre un mecanismo en una configuración específica. Debe entenderse que los resultados de este análisis son las características del movimiento instantáneo. Conforme el mecanismo se mueve, incluso una distancia infinitesimal, cambian las características del movimiento. Sin embargo, se necesitan las características instantáneas, sobre todo los valores extremos. Se ha hecho énfasis en que la aceleración produce fuerzas inerciales sobre los eslabones de un mecanismo. Se deben entender completamente los esfuerzos resultantes para garantizar la operación segura de una máquina.

La estrategia para determinar la aceleración de un punto implica conocer la aceleración de otro punto sobre el mismo eslabón. Asimismo, se debe conocer también la velocidad del punto que se desea calcular y la velocidad relativa entre los dos puntos. Esta información podría requerir un análisis de velocidad relativa como el descrito en el capítulo 6.

El análisis puede realizarse en todo el mecanismo usando puntos que son comunes a dos eslabones. Por ejemplo, un punto que se encuentra en una unión es común a dos eslabones. Por lo tanto, determinar la aceleración de este punto facilita determinar posteriormente la aceleración de otro punto sobre cualquier eslabón. Entonces, se puede determinar la aceleración de cualquier punto sobre un mecanismo trabajando hacia fuera, a partir del eslabón de entrada.

Recuerde de la ecuación (7.18) que la ecuación de aceleración relativa se amplía para incluir las componentes normal y tangencial.

$$\mathbf{A}^n_B +> \mathbf{A}^t_B = \mathbf{A}^n_A +> \mathbf{A}^t_A +> \mathbf{A}^n_{B/A} +> \mathbf{A}^t_{B/A}$$

Suponga que se necesita determinar la aceleración del punto *B* y se conoce la aceleración del punto *A*. Suponga también que ya se realizó un análisis completo de velocidad incluyendo los dos puntos. En una situación típica, se conocen las direcciones de las seis componentes. Todas las componentes normales están dirigidas hacia el centro de rotación relativa. Todas las componentes tangenciales son perpendiculares a las componentes normales. Asimismo, las magnitudes de todos los vectores de aceleración normales se calculan con la ecuación (7.14) o la (7.15). Desde luego, la magnitud de la aceleración tangencial del punto conocido (punto *A*) se ha determinado también. Por consiguiente, el análisis vectorial tan solo necesita determinar la magnitud de la componente tangencial del punto deseado y la magnitud de la componente tangencial relativa.

El análisis de aceleración relativa es un problema de vectores idéntico a los problemas generales presentados en las secciones 3.18 y 3.19. Son posibles tanto las soluciones gráficas como las analíticas, como se vio en el capítulo 3. En muchos problemas, el valor de ciertos términos puede ser cero, eliminando de esta manera algunas de las seis componentes vectoriales de la ecuación (7.18). Por ejemplo, cuando el punto conocido se encuentra en una unión que es común a un eslabón con velocidad angular constante, el punto no tiene aceleración tangencial. Otro ejemplo se presenta cuando un punto es común a un eslabón que está restringido a movimiento lineal. La velocidad del punto no cambia de dirección y por ello el punto no tiene aceleración normal.

Como en el análisis de velocidad, la solución gráfica de los polígonos de aceleración se realiza usando técnicas manuales de dibujo o un sistema de CAD. La lógica es idéntica; no obstante, la solución con CAD no está limitada por la exactitud del dibujo. Independientemente del método que se utilice, los conceptos subyacentes del análisis gráfico de posición se ilustran y se amplían mejor con los siguientes problemas de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.7

El mecanismo mostrado en la figura 7.11 se diseñó para mover objetos a lo largo de un transportador de bandeja y, luego, voltearlos y bajarlos a otra banda transportadora. La rueda impulsora gira con una velocidad angular constante de 12 rpm. Determine la velocidad angular del balancín que gira y baja las partes.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

La parte del mecanismo que está en consideración incluye la rueda impulsora, el brazo seguidor y el eslabón que une ambos. Observe que, nuevamente, este es el conocido mecanismo de cuatro barras que tiene un grado de libertad. En la figura 7.12a se presenta el diagrama cinemático a escala.

2. ***Elija el método para obtener la aceleración deseada***

La aceleración angular del balancín (eslabón 4) se obtiene a partir de la componente de aceleración tangencial del punto *C*. Por consiguiente, la esencia del problema es determinar la aceleración del punto *C*. En su momento, la aceleración del punto *C*, la cual se encuentra también sobre el eslabón 3, se determina conociendo la aceleración del punto *B*. El punto *B* está ubicado en los eslabones 2 y 3. Por ende, la aceleración del punto *B* se obtiene conociendo el movimiento del eslabón de entrada, el eslabón 2.

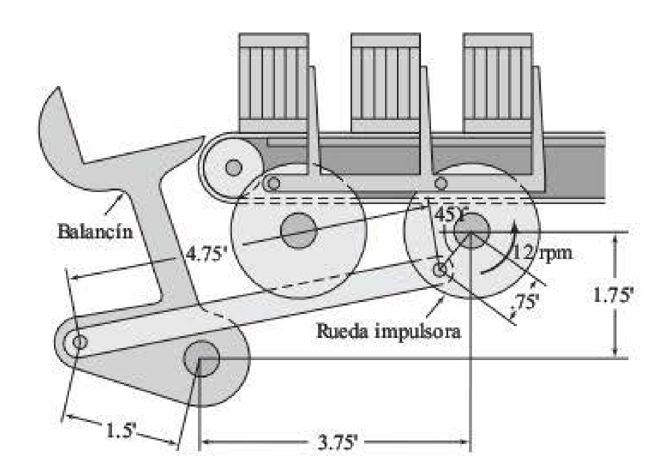
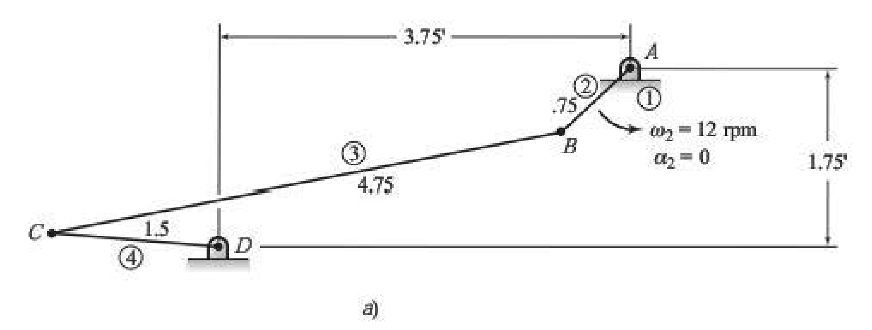


FIGURA 7.11 Mecanismo del problema de ejemplo 7.7.



a)

b)

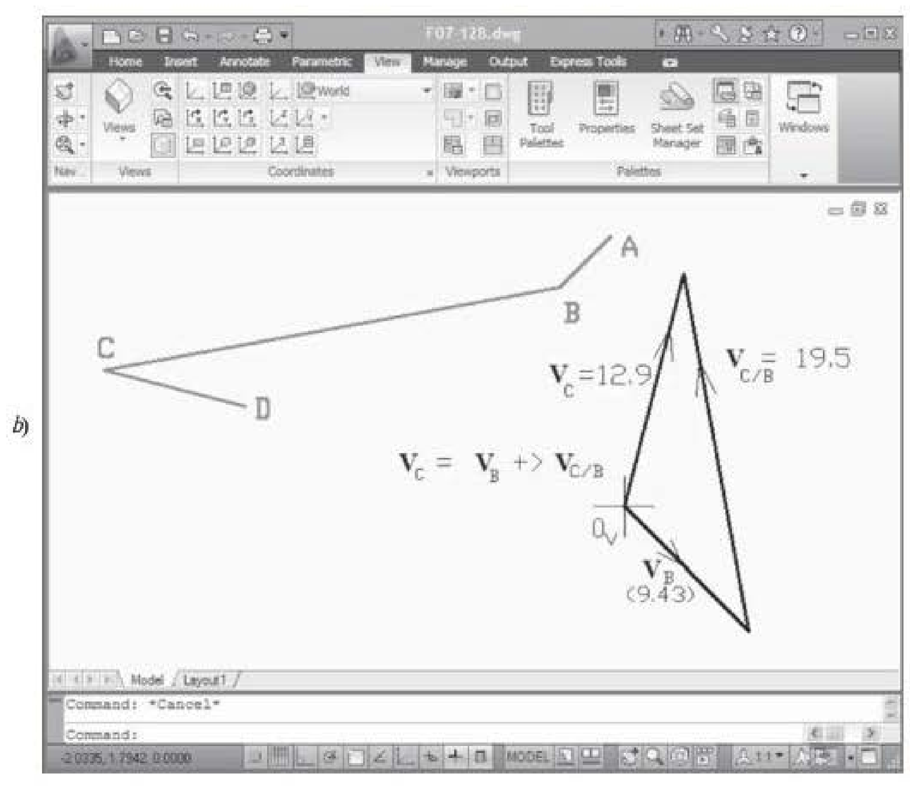


FIGURA 7.12 Diagramas del problema de ejemplo 7.7.

c)

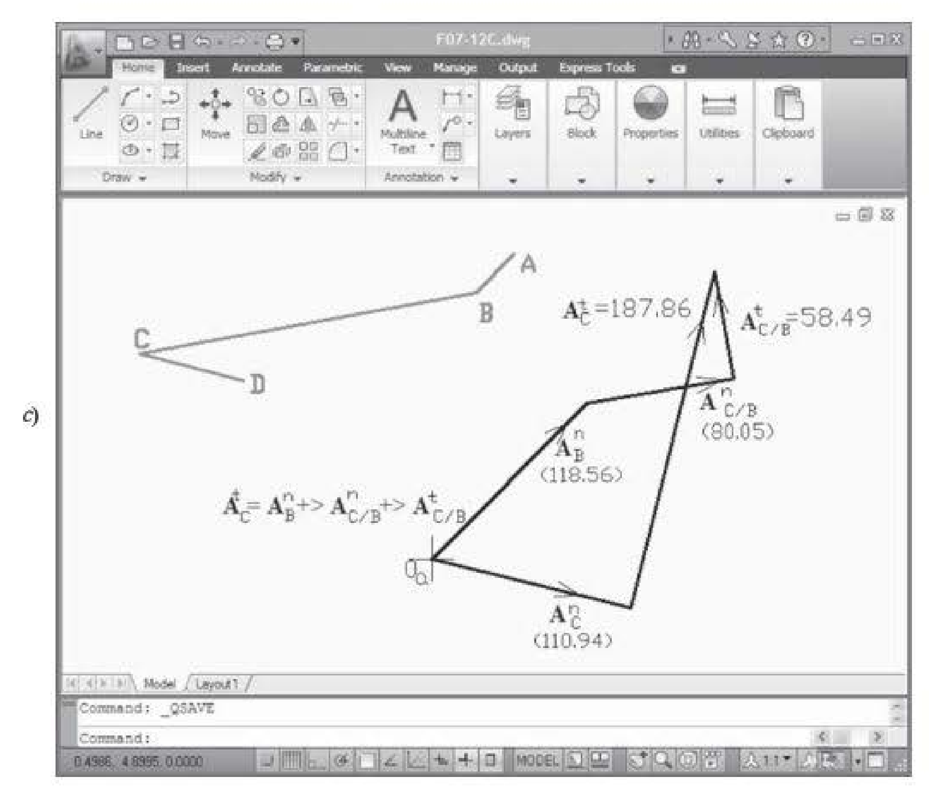


FIGURA 7.12 (*Continuación*).

3. ***Determine la velocidad de los puntos* B *y* C**

El primer paso es construir un diagrama de velocidad que incluya los puntos *B* y *C*. El cálculo de la magnitud de la velocidad del punto *B* se realiza de la siguiente manera:

$$\omega_2(\text{rad/s}) = \frac{\pi}{30}(\omega \text{ rpm}) = \frac{\pi}{30}(12 \text{ rpm}) = 1.26 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

$$\mathbf{V}_B = \omega_2 \mathbf{r}_{AB} = (1.26 \text{ rad/s})(0.75 \text{ ft}) = .943 \text{ ft/s} \quad \angle 45^\circ$$

La dirección de $\mathbf{V}_B$ es perpendicular al eslabón 2 y en una dirección consistente con ω_2, hacia abajo y a la derecha. Utilizando el CAD, se traza un vector a escala a partir del origen del diagrama de velocidad, para representar esta velocidad.

La ecuación de velocidad relativa para los puntos *B* y *C* se escribe como:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

Así, en el origen del diagrama de velocidad, se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{V}_C$. Esta es perpendicular al eslabón 4 porque el punto *C* se encuentra sobre el eslabón que pivota alrededor de un centro fijo. En el extremo del vector $\mathbf{V}_B$, también se traza una línea para representar la dirección de $\mathbf{V}_{C/B}$. Como con los vectores de velocidad relativa, la dirección es perpendicular a la línea que une los puntos *C* y *B*. La intersección de las líneas de dirección de $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_{C/B}$ determina las magnitudes de ambos vectores. En la figura 7.12b se muestra el diagrama de velocidad completo.

Midiendo con la escala adecuada los vectores del diagrama se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{V}_C = 1.290 \text{ ft/s} \quad \angle 76^\circ$$

$$\mathbf{V}_{C/B} = 1.950 \text{ ft/s} \quad 80^\circ$$

4. ***Calcule las componentes de aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración que incluya los puntos *B* y *C*. El cálculo de las magnitudes de las aceleraciones conocidas se hace de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(\mathbf{V}_B)^2}{r_{AB}} = \frac{(0.943 \text{ ft/s})^2}{0.75 \text{ ft}} = 1.186 \text{ ft/s}^2 \quad \angle 45^\circ$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto *A*)

$$a_B^t = \alpha_2 r_{AB} = (0)\,(0.75 \text{ ft}) = 0 \text{ ft/s}^2$$

$$\mathbf{A}_{C/B}^n = \frac{(\mathbf{V}_{C/B})^2}{r_{CB}} = \frac{(1.950 \text{ ft/s})^2}{4.75 \text{ ft}} = .800 \text{ ft/s}^2 \quad \angle 10^\circ$$

(dirigida de C hacia B, medida a partir del CAD)

$$\mathbf{A}_C^n = \frac{(\mathbf{V}_C)^2}{r_{CD}} = \frac{(1.290 \text{ ft/s})^2}{1.5 \text{ ft}} = 1.109 \text{ ft/s}^2 \quad 14^\circ$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto D, medida a partir del CAD)

5. ***Construya el diagrama de aceleración***

La ecuación de aceleración relativa de los puntos B y C es

$$\mathbf{A}_C^n +> \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t$$

En la elaboración del diagrama de aceleración, la construcción del vector se inicia arbitrariamente con el segundo miembro de la ecuación. Se traza una línea en el origen del diagrama de aceleración que represente el vector $\mathbf{A}_B^n$ que es totalmente conocido. Como tiene magnitud igual a cero, el vector $\mathbf{A}_B^t$ se elimina del diagrama de aceleración. Entonces, en el extremo del vector $\mathbf{A}_B^n$ se traza otra línea que represente el vector $\mathbf{A}_{C/B}^n$, el cual también es totalmente conocido. En el extremo de este vector, se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{A}_{C/B}^t$. La magnitud no se conoce, pero la dirección es perpendicular a la componente normal $\mathbf{A}_{C/B}^n$.

Centrándonos en el lado izquierdo de la ecuación, se inicia una nueva serie de vectores a partir del origen del diagrama de aceleración. Se dibuja una línea para representar el vector $\mathbf{A}_C^n$ el cual es totalmente conocido. En el extremo de este vector, se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{A}_C^t$ sin embargo, la magnitud del vector es desconocida. La línea se dirige perpendicular a la componente normal $\mathbf{A}_C^n$. Finalmente, la intersección de las direcciones de las líneas $\mathbf{A}_C^t$ y $\mathbf{A}_{C/B}^t$ determina las magnitudes de ambos vectores. En la figura 7.12c se muestra el diagrama de aceleración completo.

6. ***Mida las componentes de la aceleración que se desea conocer***

Midiendo con la escala adecuada las magnitudes en el diagrama, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{A}_C^t = 1.879 \text{ ft/s}^2 \angle 76^\circ$$

$$\mathbf{A}_{C/B}^t = .585 \text{ ft/s}^2 \quad 80^\circ$$

Advierta que la aceleración tangencial del punto C está en la misma dirección que la velocidad. Ello indica que el punto C está acelerando (incrementado su velocidad), no desacelerando.

7. ***Calcule la aceleración angular que se desea conocer***

Finalmente, se calcula la aceleración angular del eslabón 4. Observando la dirección de la componente tangencial de la aceleración del punto C (arriba y a la derecha), es evidente que el eslabón 4 acelera en dirección horaria. La magnitud de esta aceleración angular se calcula de la siguiente manera:

$$\alpha_4 = \frac{a_C^t}{r_{CD}} = \frac{(1.879 \text{ ft/s}^2)}{1.5 \text{ ft}} = 1.25 \text{ rad/s}^2$$

Entonces, la aceleración angular del balancín es

$$\alpha_4 = 1.25 \text{ rad/s}^2, \text{ en sentido horario}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.8

El mecanismo mostrado en la figura 7.13 es una troqueladora diseñada para realizar operaciones de estampado sucesivas. La máquina acaba de encenderse y en el instante mostrado funciona a toda velocidad. El eje motor gira en sentido horario con una velocidad angular de 72 rad/s y acelera a 250 rad/s^2. En el instante mostrado, determine la aceleración de la matriz de estampado que golpea la pieza de trabajo.

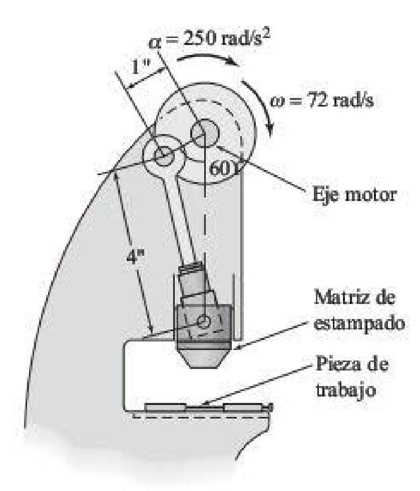


FIGURA 7.13 Mecanismo del problema de ejemplo 7.8.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

   La parte del mecanismo que está en consideración incluye la rueda impulsora, la matriz de estampado y el eslabón que los une. Observe que este es el conocido mecanismo de manivela-corredera que tiene un solo grado de libertad. En la figura 7.14a se muestra el diagrama cinemático a escala.

2. ***Elija el método para calcular la aceleración deseada***

   La aceleración de la matriz (eslabón 4) corresponde a un movimiento estrictamente de traslación y es idéntico al movimiento del punto *A*. La aceleración del punto *A*, el cual también se encuentra sobre el eslabón 3, se determina conociendo la aceleración del punto *B*. El punto *B* se encuentra tanto en el eslabón 2 como en el eslabón 3. Por lo tanto, la aceleración del punto *B* se determina una vez que se conoce el movimiento del eslabón de entrada, el eslabón 2.

3. ***Determine la velocidad de los puntos* A *y* B**

   El cálculo de la magnitud de la velocidad del punto *B* es como sigue:

$$\mathbf{V}_B = \omega_2 r_{AB} = (72 \text{ rad/s})(1.0 \text{ in}) = 72 \text{ in/s} \quad 60^\circ \nwarrow$$

La dirección de $\mathbf{V}_B$ es perpendicular al eslabón 2 y es consistente con la dirección de ω_2, hacia arriba a la izquierda. Usando el CAD, se dibuja un vector a escala, a partir del origen del diagrama de velocidad, para representar esta velocidad.

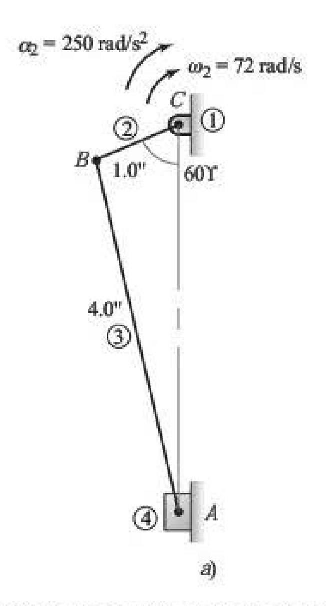
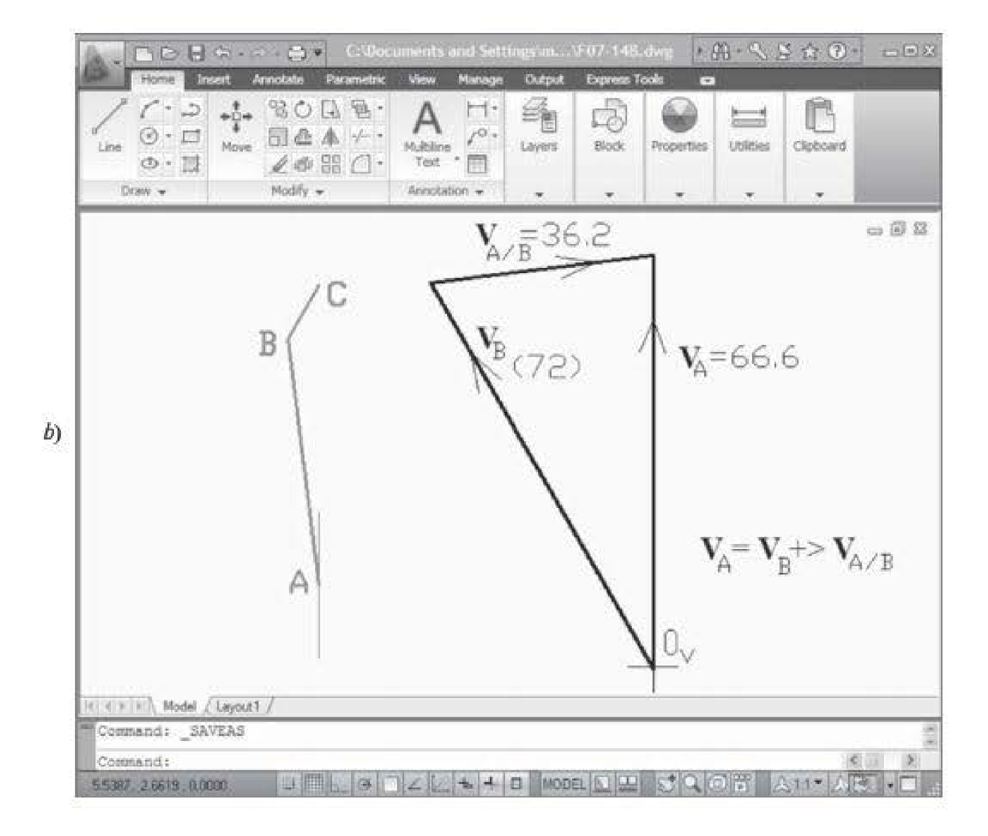


FIGURA 7.14 Diagramas del problema de ejemplo 7.8.

b)



c)

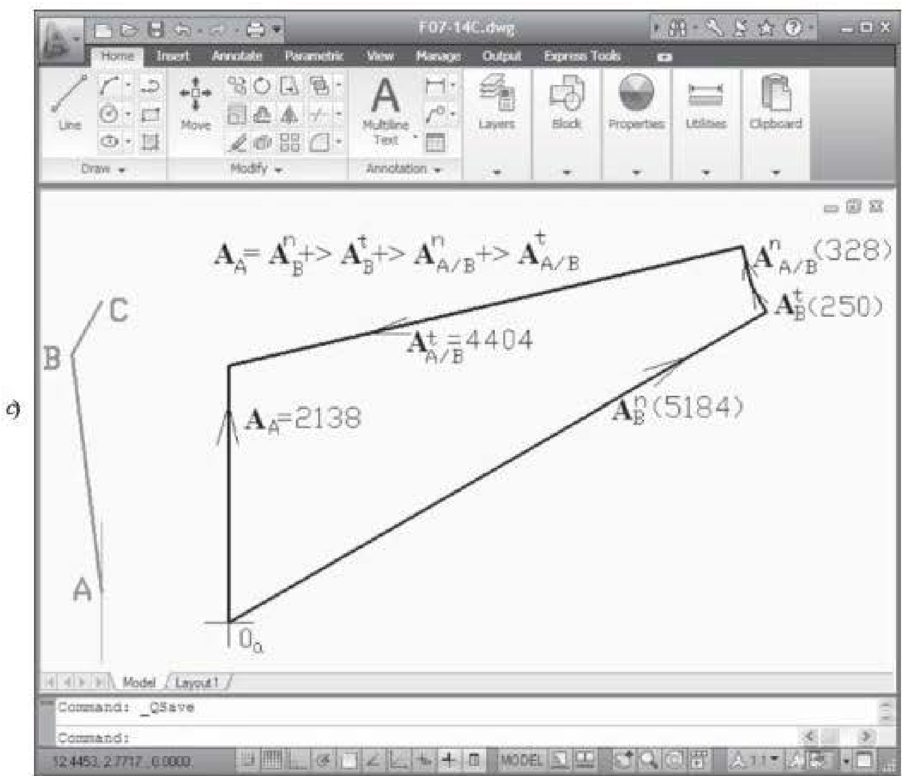


FIGURA 7.14 (*Continuación*).

El paso siguiente es construir un diagrama de velocidad que incluya los puntos *A* y *B*. La ecuación de velocidad relativa de los puntos *A* y *B* es

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{A/B}$$

Así, en el origen del diagrama de velocidad, se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{V}_A$. Esta es paralela a la superficie de deslizamiento porque el eslabón 4 está restringido al movimiento de deslizamiento

vertical. En el extremo del vector $\mathbf{V}_B$, se traza una línea que represente la dirección de $\mathbf{V}_{A/B}$. Como con todos los vectores de velocidad relativa entre dos puntos sobre la misma línea, la dirección es perpendicular a la línea que une los puntos A y B. La intersección de las líneas de dirección de $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_{A/B}$ determina las magnitudes de ambos vectores. En la figura 7.14b se ilustra el diagrama de velocidad completo.

Midiendo con la escala adecuada las magnitudes de los vectores del diagrama, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{V}_A = 70.3 \text{ in/s} \uparrow$$
$$\mathbf{V}_{A/B} = 36.8 \text{ in/s} \quad \angle 13^\circ$$

4. ***Calcule las componentes de la aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración que incluya los puntos A y B. El cálculo de las magnitudes de las aceleraciones conocidas se realiza con las ecuaciones:

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(v_B)^2}{r_{BC}} = \frac{(72 \text{ in/s})^2}{1.0 \text{ in}} = 5184 \text{ in/s}^2 \quad \angle 30^\circ$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto C)

$$\mathbf{A}_B^t = \alpha_2 r_{AB} = (250 \text{ rad/s}^2)(1.0 \text{ in}) = 250 \text{ in/s}^2 \quad 60^\circ$$

(en dirección perpendicular a BC, en la dirección de la aceleración angular)

$$\mathbf{A}_{A/B}^n = \frac{(v_{A/B})^2}{r_{AB}} = \frac{(36.8 \text{ in/s})^2}{4.0 \text{ in}} = 338 \text{ in/s}^2 \quad 77^\circ$$

(dirigida de A hacia B, medida del CAD)

Observe que el punto A no tiene aceleración normal porque el movimiento es estrictamente de traslación.

5. ***Construya el diagrama de aceleración***

La ecuación de aceleración relativa de los puntos A y B se escribe como:

$$\mathbf{A}_A^n +> \mathbf{A}_A^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{A/B}^n +> \mathbf{A}_{A/B}^t$$

Al elaborar el diagrama de aceleración, la construcción vectorial iniciará arbitrariamente en el segundo miembro de la ecuación. En el origen del diagrama de aceleración se traza una línea que represente el vector $\mathbf{A}_B^n$ que se conoce. En el extremo de $\mathbf{A}_B^n$ se traza una línea que represente el vector $\mathbf{A}_B^t$ que también se conoce. En el extremo de este vector, se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{A}_{A/B}^t$. Este es perpendicular a la componente normal $\mathbf{A}_{A/B}^n$, pero tiene magnitud desconocida.

Centrándose en el lado izquierdo de la ecuación, se inicia una nueva serie de vectores a partir del origen del diagrama de aceleración. El vector $\mathbf{A}_A^n$ tiene magnitud igual a cero y se ignora. Se traza una línea que represente la dirección del vector $\mathbf{A}_A^t$; sin embargo, la magnitud es desconocida. La línea es paralela al movimiento de deslizamiento del eslabón 4. Finalmente, la intersección de las direcciones de $\mathbf{A}_A^t$ y $\mathbf{A}_{A/B}^t$ determina las magnitudes de ambos vectores. El diagrama de aceleración terminado se muestra en la figura 7.14c.

6. ***Mida las componentes de la aceleración que se desea obtener***

Midiendo con la escala adecuada las magnitudes de los vectores en el diagrama, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{A}_{A/B}^t = 4404 \text{ in/s}^2 \quad 13^\circ$$
$$\mathbf{A}_A^t = 2138 \text{ in/s}^2 \uparrow$$

De modo que la aceleración total del punto A es

$$\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_A^t = 2138 \text{ in/s}^2 = 178 \text{ ft/s}^2 = 5.53 \text{ g} \uparrow$$

Observe que la aceleración tangencial del punto A se encuentra en la misma dirección que la velocidad. Esto indica que el punto A acelera (aumenta de velocidad), no desacelera.

7.7 ANÁLISIS DE ACELERACIÓN RELATIVA: MÉTODO ANALÍTICO

La estrategia para determinar analíticamente la aceleración de varios puntos sobre un mecanismo es idéntica al método descrito en la sección anterior. La diferencia es que los polígonos vectoriales tan solo necesitan estar graficados burdamente. La magnitud y los ángulos se determinan usando los métodos analíticos presentados en el capítulo 3 e incorporados en el capítulo 6 y en las secciones previas de este capítulo. La forma más efectiva de presentar el método analítico del análisis de aceleración es con un problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.9

El mecanismo que se presenta en la figura 7.15 se utiliza para alimentar cajas de cartón a una máquina etiquetadota y, al mismo tiempo, evitar que se caigan las cajas almacenadas. A toda velocidad, el eje impulsor gira con una velocidad angular de 200 rpm en sentido horario. En el instante mostrado, determine la aceleración del ariete y la aceleración angular de la biela.

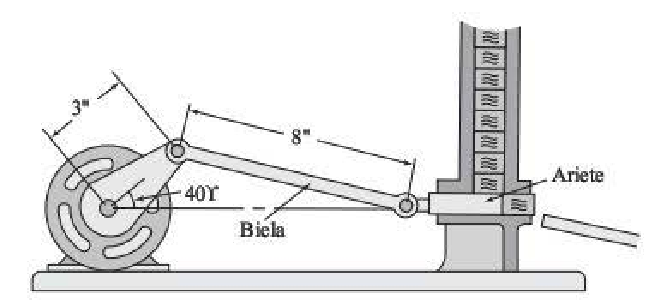


FIGURA 7.15 Mecanismo del problema de ejemplo 7.9.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático***

La parte del mecanismo que está en consideración incluye la manivela impulsora, el ariete de empuje y el eslabón que une a ambos. Nuevamente, observe que este es el conocido mecanismo de manivela-corredera en línea. En la figura 7.16a se presenta el diagrama cinemático.

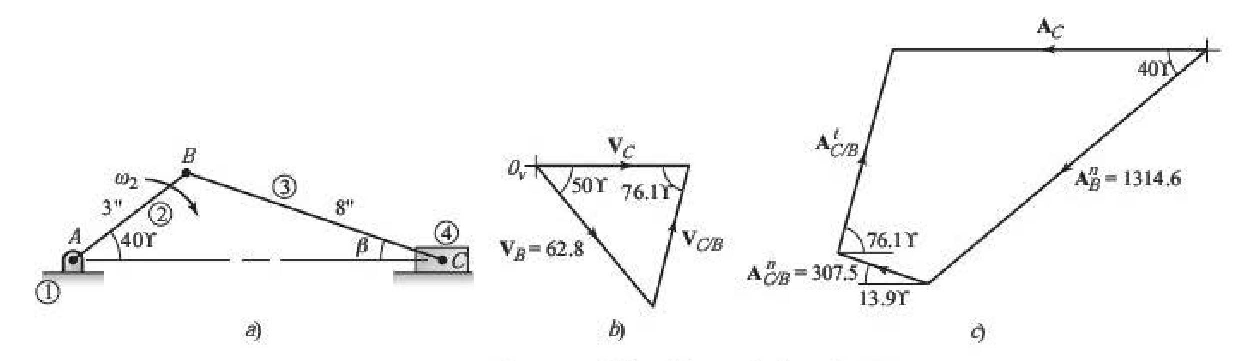


FIGURA 7.16 Diagramas del problema de ejemplo 7.9.

2. ***Elija el método para obtener la aceleración deseada***

Como en el problema de ejemplo 7.8, la aceleración del ariete (eslabón 4) corresponde a un movimiento estrictamente de traslación y es idéntica al movimiento del punto *C*. La aceleración del punto *C*, el cual también reside en el eslabón 3, se determina conociendo la aceleración del punto *B*. El punto *B* se encuentra tanto en el eslabón 2 como en el eslabón 3. Por lo tanto, la aceleración del punto *B* se determina conociendo el movimiento del eslabón de entrada, el eslabón 2.

3. ***Analice la geometría del mecanismo***

El ángulo entre el eslabón 3 y la superficie horizontal de deslizamiento del eslabón 4, β en la figura 7.16a, se determina usando la ley de los senos.

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{r_{AB}\,\text{sen}\,40°}{r_{BC}}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(3\text{ in})\,\text{sen}\,40°}{(8\text{ in})}\right) = 13.9°$$

4. ***Determine la velocidad de los puntos* B *y* C**

Se calcula la magnitud de la velocidad del punto B usando la siguiente ecuación:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{30}(200 \text{ rpm}) = 20.9 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{V}_B = \omega_2 r_{AB} = (20.9 \text{ rad/s})(3.0 \text{ in}) = 62.8 \text{ in/s} \quad \searrow 50^\circ$$

La dirección de $\mathbf{V}_B$ es perpendicular al eslabón 2 y es consistente con la dirección de ω_2, hacia abajo y a la derecha. La velocidad del punto C es paralela a la superficie horizontal de deslizamiento, y la velocidad de C con respecto a B es perpendicular al eslabón que une los puntos B y C. Calculando este ángulo:

$$90^\circ + (-\beta) = 90^\circ + (-13.9^\circ) = 76.1^\circ$$

Conociendo las direcciones de los vectores de interés se ensambla el polígono de velocidad (figura 7.16b). La magnitud del tercer ángulo en el polígono de velocidad se determina porque la suma de todos los ángulos en un triángulo es de 180°.

$$180^\circ - (50^\circ + 76.1^\circ) = 53.9^\circ$$

Las magnitudes de las velocidades se determinan con la ley de los senos.

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B\left(\frac{\text{sen } 53.9^\circ}{\text{sen } 76.1^\circ}\right) = 62.8 \text{ in/s}\left(\frac{\text{sen } 53.9^\circ}{\text{sen } 76.1^\circ}\right) = 52.3 \text{ in/s} \rightarrow$$

Las velocidades desconocidas se obtienen de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_{C/B} = \mathbf{V}_B\left(\frac{\text{sen } 50^\circ}{\text{sen } 76.1^\circ}\right) = 62.8 \text{ in/s}\left(\frac{\text{sen } 50^\circ}{\text{sen } 76.1^\circ}\right) = 49.6 \text{ in/s} \quad \nearrow 76.1^\circ$$

5. ***Calcule las componentes de aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración que incluya los puntos B y C. Calcule las magnitudes de las aceleraciones conocidas usando las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(V_B)^2}{r_{AB}} = \frac{(62.8 \text{ in/s})^2}{3.0 \text{ in}} = 1314.6 \text{ in/s}^2 \quad 40^\circ \swarrow$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto A)

$$\mathbf{A}_B^t = \alpha_2 r_{AB} = (0 \text{ rad/s}^2)(3.0 \text{ in}) = 0$$

(porque el eslabón impulsor gira a velocidad constante)

$$\mathbf{A}_{C/B}^n = \frac{(\mathbf{V}_{C/B})^2}{r_{BC}} = \frac{(49.6 \text{ in/s})^2}{8.0 \text{ in}} = 307.5 \text{ in/s}^2 \quad 13.9^\circ \nwarrow$$

(dirigida de C hacia B)

Advierta que el punto C no tiene aceleración normal porque el movimiento es estrictamente de traslación.

6. ***Use métodos vectoriales para resolver la ecuación de aceleración relativa***

La ecuación de aceleración relativa para los puntos B y C se escribe como:

$$\mathbf{A}_C^n +> \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t$$

Al elaborar el diagrama de aceleración, la ubicación vectorial inicia arbitrariamente en el lado derecho de la ecuación. En el origen del diagrama de aceleración, se coloca el vector $\mathbf{A}_B^n$ que es completamente conocido. Como no hay componente tangencial de la aceleración del punto B, se ignora el término $\mathbf{A}_B^t$. El vector $\mathbf{A}_{C/B}^n$ que también es completamente conocido se coloca en el extremo de $\mathbf{A}_B^n$. En el extremo del vector $\mathbf{A}_{C/B}^n$ se coloca el vector $\mathbf{A}_{C/B}^t$; sin embargo, solamente se conoce la dirección de este vector. Es perpendicular a la componente normal $\mathbf{A}_{C/B}^n$ y, por lo tanto, perpendicular a la línea que une B y C. El ángulo se calcula como:

$$90^\circ + (-\beta) = 90^\circ + (-13.4^\circ) = 76.1^\circ$$

Se ignora el primer término del primer miembro de la ecuación porque no existe componente normal de la aceleración del punto C. Entonces, el vector que representa la aceleración tangencial del punto C se coloca en el origen. Sin embargo, únicamente se conoce la dirección de este vector: es paralelo a la superficie horizontal en la cual está restringido el deslizamiento del eslabón 4. En la figura 7.16c se muestra el

polígono vectorial. Las magnitudes vectoriales desconocidas, $A^t_{C/B}$ y A^t_C, se determinan usando los métodos presentados en el capítulo 3. Primero se separa cada vector en sus componentes horizontal y vertical, como se indica en la tabla 7.2.

TABLA 7.2 Componentes de aceleración del problema de ejemplo 7.9

Vector	Ángulo de referencia (θ_x)	Componente horizontal $a_h = a \cos \theta_x$	Componente vertical $a_v = a \operatorname{sen} \theta_x$
$a^n_B A^n_B$	220°	1007.0	845.0
$A^n_{C/B}$	166.1°	−298.5	73.9
$A^t_{C/B}$	76.1°	$.240\ a^t_{C/B}$	$.971\ a^t_{C/B}$
A_C	180°	$-a_C$	0

Se escriben ecuaciones algebraicas separadas de las componentes horizontal y vertical.

$$A_C = A^n_B +> A^n_{C/B} +> A^t_{C/B}$$

$$\underline{\text{comp. horizontal:}}\ + a_C = (-1007.0) + (-298.5) + \left(+0.240\ a^t_{C/B}\right)$$

$$\underline{\text{comp. vertical:}}\quad 0 = (-845.0) + (+73.9) + \left(+0.971\ a^t_{C/B}\right)$$

La ecuación de la componente vertical se resuelve algebraicamente para obtener:

$$a^t_{C/B} = 794.1 \text{ in/s}^2$$

Este resultado se sustituye luego en la ecuación de la componente horizontal para darnos la magnitud

$$a_C = 1496.1 \text{ in/s}^2$$

7. ***Especifique con claridad los resultados deseados***

La respuesta formal del movimiento del ariete es

$$V_c = 52.3 \text{ in/s} \rightarrow$$

$$A_c = 1496.1 \text{ in/s} \leftarrow$$

Advierta que como la aceleración tiene dirección opuesta al movimiento y a la velocidad del ariete, el ariete desacelera.

8. ***Calcule la aceleración angular***

Finalmente, se calcula el movimiento de la biela.

$$\omega_3 = \frac{v_{C/B}}{r_{CB}} = \frac{49.6 \text{ in/s}}{8 \text{ in}} = 6.2 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

donde la dirección es consistente con la velocidad de C relativa con B, en sentido antihorario. Asimismo,

$$\alpha_3 = \frac{a^t_{C/B}}{r_{CB}} = \frac{794.1 \text{ in/s}}{8.0 \text{ in}} = 99.3 \text{ rad/s}^2\text{, en sentido antihorario}$$

donde la dirección es consistente con la aceleración tangencial de C relativa con B, en sentido antihorario.

7.8 SOLUCIONES ALGEBRAICAS DE MECANISMOS COMUNES

Para los conocidos mecanismos de manivela-corredera y de cuatro barras, se dispone de soluciones algebraicas de forma cerrada [ref. 12]. Estas se proporcionan en las siguientes secciones.

7.8.1 Mecanismo de manivela-corredera

En la figura 4.20 se presenta un mecanismo de manivela-corredera en general que se define tan solo por las dimensiones L_1, L_2 y L_3. Con un grado de libertad, únicamente se debe especificar el movimiento de un eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia es la manivela la que se impulsa y se especifican θ_2, ω_2 y α_2. Para resolver fácilmente un mecanismo de

manivela-corredera, están disponibles las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración (en función de θ_2, ω_2 y α_2). Como se vio en el capítulo 4, las ecuaciones de posición son:

$$\theta_3 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{L_1 + L_2 \operatorname{sen}\theta_2}{L_3}\right) \quad (4.6)$$

$$L_4 = L_2 \cos(\theta_2) + L_3 \cos(\theta_3) \quad (4.7)$$

Como se expuso en el capítulo 6, las ecuaciones de velocidad son:

$$\omega_3 = -\omega_2\left(\frac{L_2 \cos\theta_2}{L_3 \cos\theta_3}\right) \quad (6.12)$$

$$v_4 = -\omega_2 L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \omega_3 L_3 \operatorname{sen}\theta_3 \quad (6.13)$$

Las ecuaciones de aceleración están dadas por [ref. 12]

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \omega_2^3 L_3 \operatorname{sen}\theta_3 - \alpha_2 L_2 \cos\theta_2}{L_3 \cos\theta_3} \quad (7.21)$$

$$\alpha_4 = -\alpha_2 L_2 \operatorname{sen}\theta_2 - \alpha_3 L_3 \operatorname{sen}\theta_3 - \omega_2^2 L_2 \cos\theta_2 - \omega_3^2 L_3 \cos\theta_3 \quad (7.22)$$

Observe que el análisis de una manivela-corredera en línea se realiza haciendo L_1 igual a cero en la ecuación (4.6).

7.8.2 Mecanismo de cuatro barras

En la figura 4.22 se ilustra un mecanismo de cuatro barras en general que se define únicamente con las dimensiones L_1, L_2, L_3 y L_4. Con un grado de libertad, tan solo se debe especificar el movimiento de un eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia, es la manivela la que se impulsa, y se especifican θ_2, ω_2 y α_2. Para resolver fácilmente un mecanismo de cuatro barras, están disponibles las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración (en función de θ_2, ω_2 y α_2). Como se indicó en el capítulo 4, las ecuaciones de posición son:

$$BD = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2(L_1)(L_2)\cos(\theta_2)} \quad (4.9)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{L_3^2 + L_4^2 - BD^2}{2(L_3)(L_4)}\right) \quad (4.10)$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + L_4 \operatorname{sen}\gamma}{L_1 + L_3 - L_2\cos\theta_2 - L_4\cos\gamma}\right] \quad (4.11)$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}\theta_2 - L_3 \operatorname{sen}\gamma}{L_2\cos\theta_2 + L_4 - L_1 - L_3\cos\gamma}\right] \quad (4.12)$$

Como se expuso en el capítulo 6, las ecuaciones de velocidad son:

$$\omega_3 = -\omega_2\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{L_3 \operatorname{sen}\gamma}\right] \quad (6.14)$$

$$\omega_4 = -\omega_2\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{L_4 \operatorname{sen}\gamma}\right] \quad (6.15)$$

Las ecuaciones de aceleración se presentan como:

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2 L_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \omega_4^2 L_4 + \omega_3^2 L_3 \cos(\theta_4 - \theta_3)}{L_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (7.23)$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_2 L_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \omega_3^2 L_4 \cos(\theta_4 - \theta_3) + \omega_3^2 L_3}{L_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (7.24)$$

7.9 ACELERACIÓN DE UN PUNTO EN GENERAL SOBRE UN ESLABÓN FLOTANTE

Recuerde que un eslabón flotante no está unido directamente al eslabón fijo. Por lo tanto, el movimiento de un eslabón flotante no está limitado solamente a rotación o a traslación, sino a una combinación de ambos. A su vez, por lo general no se conoce la dirección del movimiento de los puntos que se encuentran sobre un eslabón flotante. Compárelo con el movimiento de un punto que se encuentra sobre un eslabón unido al eslabón fijo. El movimiento de ese punto debe pivotar a una distancia fija de la unión de perno. Por consiguiente, se conoce la dirección del movimiento.

En los análisis de aceleración presentados en las secciones anteriores, la premisa subyacente de la solución es que se conoce la dirección del movimiento. Para un punto en general sobre un eslabón flotante, esto no es válido. En dichos casos, se deben usar y despejar simultáneamente dos ecuaciones de aceleración relativa.

Para conocer la estrategia de obtención de la aceleración de un punto en general sobre un eslabón flotante, considere el diagrama cinemático del mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 7.17.

El eslabón 3 es un eslabón flotante porque no está sujeto directamente al eslabón 1, el eslabón fijo. Como los puntos A y B se encuentran sobre eslabones sujetos a un eslabón fijo, la aceleración de estos puntos se determina fácilmente. Es decir, usando los métodos de las dos secciones anteriores, se calcula tanto la dirección como la magnitud de $\mathbf{A}_A^n$, $\mathbf{A}_A^t$, $\mathbf{A}_B^n$ y $\mathbf{A}_B^t$.

Sin embargo, el punto C no se encuentra sobre un eslabón sujeto directamente a un eslabón fijo. Por consiguiente, no es evidente la trayectoria exacta del movimiento del punto C. No obstante, se escriben dos ecuaciones de aceleración relativa como:

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t \quad (7.25)$$

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_A^n +> \mathbf{A}_A^t +> \mathbf{A}_{C/A}^n +> \mathbf{A}_{C/A}^t \quad (7.26)$$

En la ecuación (7.25) se desconocen tanto la magnitud como la dirección de a_C junto con la magnitud de $a_{C/B}^t$. La ecuación (7.26) presenta una incógnita adicional; a saber, la magnitud de $\mathbf{A}_{C/A}^t$. En general, se pueden escribir dos ecuaciones vectoriales, cada una con la capacidad de determinar dos

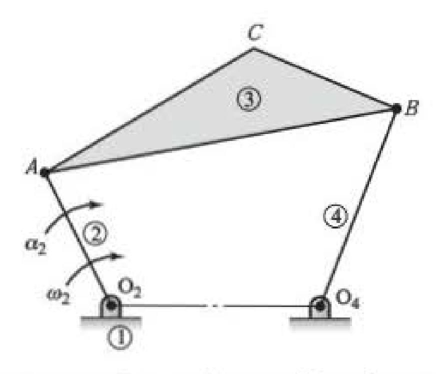


FIGURA 7.17 Punto sobre un eslabón flotante.

incógnitas. En un análisis típico, estas ecuaciones presentan cuatro cantidades desconocidas, de manera que al usar las dos ecuaciones simultáneamente, se logra determinar la aceleración del punto C aplicando ya sea un procedimiento gráfico o un procedimiento analítico. El siguiente problema de ejemplo ilustra este método.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.10

El mecanismo mostrado en la figura 7.18 sirve para jalar película cinematográfica a través de un proyector. El mecanismo es activado por la rueda impulsora giratoria a una velocidad constante de 560 rpm. En el instante mostrado, determine gráficamente la aceleración de la uña que se engancha en la película.

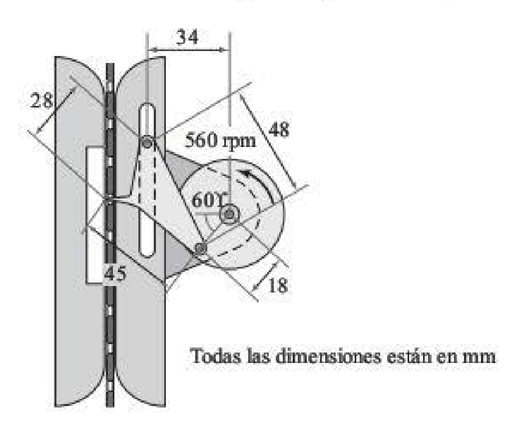


FIGURA 7.18 Mecanismo de avance de la película del problema de ejemplo 7.10.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático***

En la figura 7.19a se ilustra el diagrama cinemático a escala de este mecanismo. Observe que se trata del mecanismo básico de manivela-corredera con un punto de interés, el punto X, ubicado en la uña.

El primer paso es construir un diagrama de velocidad que incluya los puntos B, C y X. Calcule la magnitud de la velocidad del punto B de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{\pi}{30}(560 \text{ rpm}) = 58.6 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

$$\mathbf{V}_B = \omega_2 r_{AB} = 258.6 \text{ rad/s}(18 \text{ mm}) = 1055 \text{ mm/s} = 1.055 \text{ mm/s} \quad \overline{\searrow 30°}$$

La dirección de $\mathbf{V}_{B2}$ es perpendicular al eslabón 2 y es consistente con la dirección de ω_2, hacia abajo y a la derecha. Por lo tanto, se dibuja un vector a escala a partir del origen en el diagrama de velocidad para representar esta velocidad.

La ecuación de velocidad relativa de los puntos B y C se escribe como:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

La velocidad de C está restringida a traslación en dirección vertical. Desde luego, la velocidad relativa de C con respecto a B es perpendicular a la línea que une C y B. Se dibujó el diagrama de velocidad mostrado en la figura 7.19b y se midieron las magnitudes vectoriales para obtener:

$$\mathbf{V}_C = 1.087 \text{ m/s} \downarrow$$

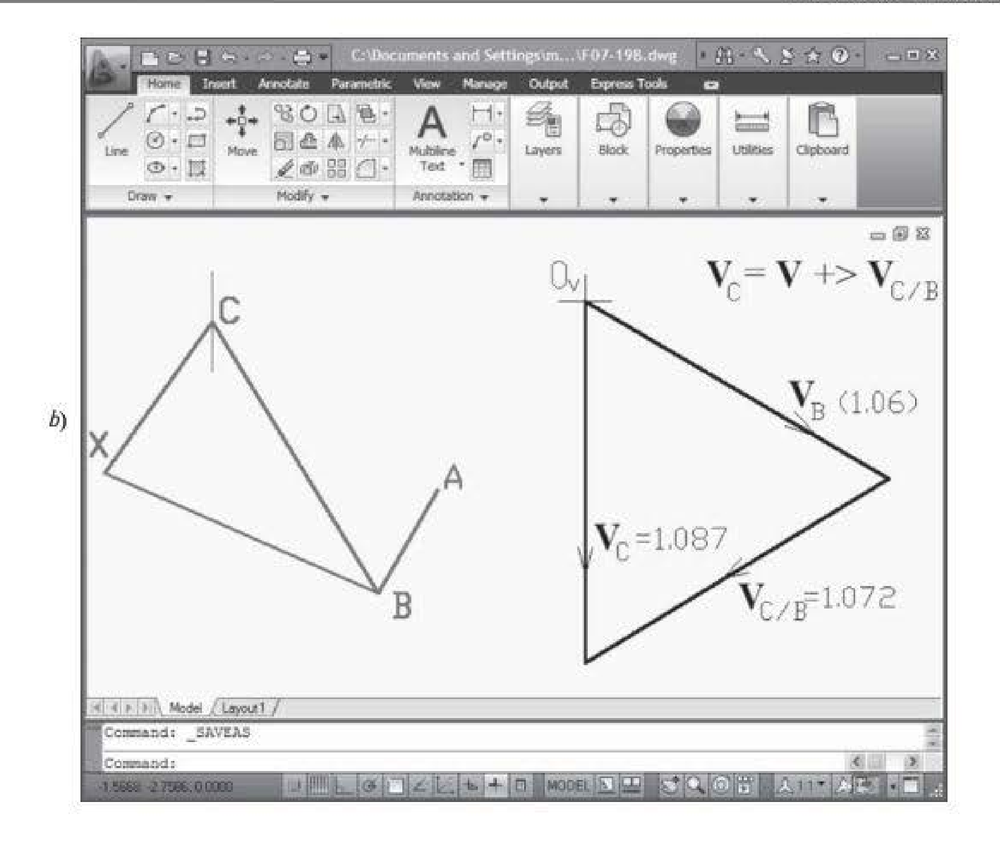
$$\mathbf{V}_{C/B} = 1.072 \text{ m/s} \quad \overline{31.5°\swarrow}$$

34 mm
Escala: 0 25 mm
④ C
28 48 mm ① 60° A
X ③ ② 18 $\omega_2 = 560$ rpm
45 B $\alpha_2 = 0$

a)

FIGURA 7.19 Diagramas del problema de ejemplo 7.10.

b)



c)

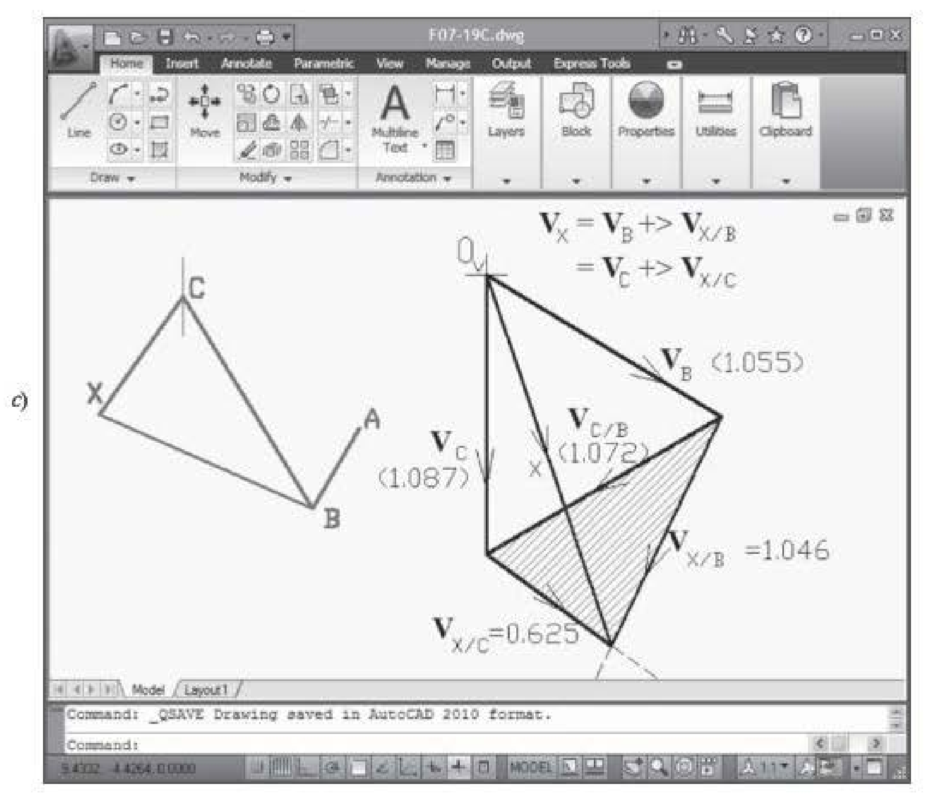
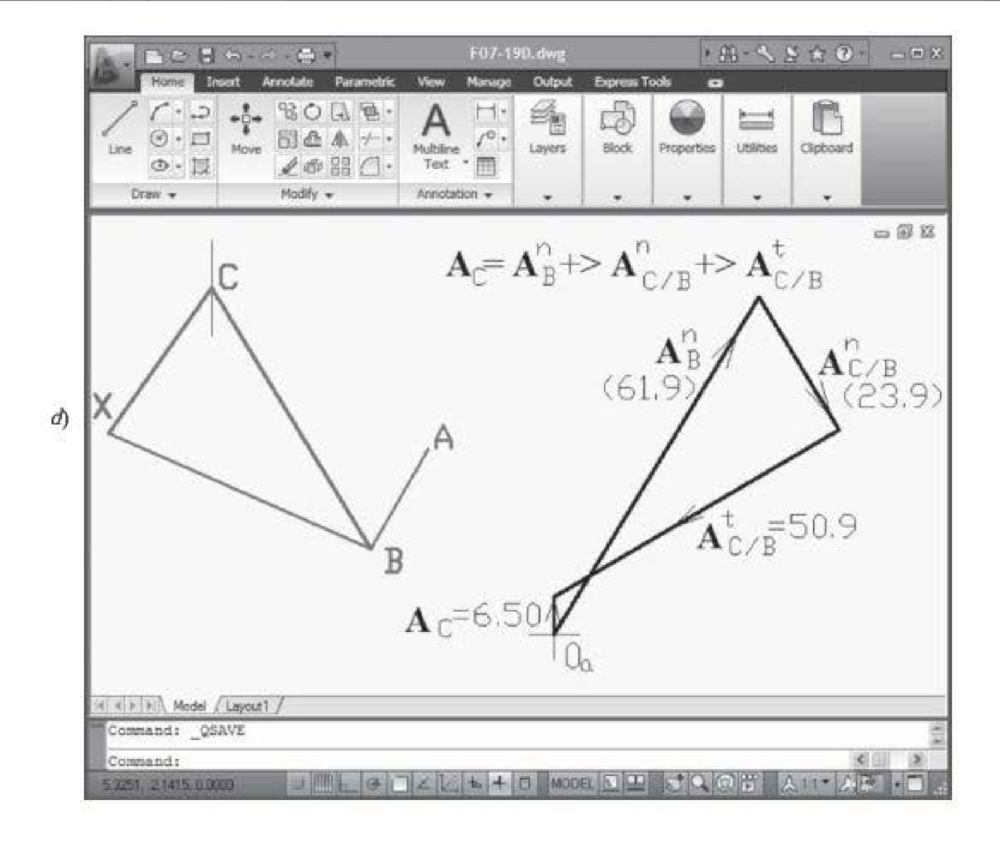


FIGURA 7.19 (*Continuación*).

d)



e)

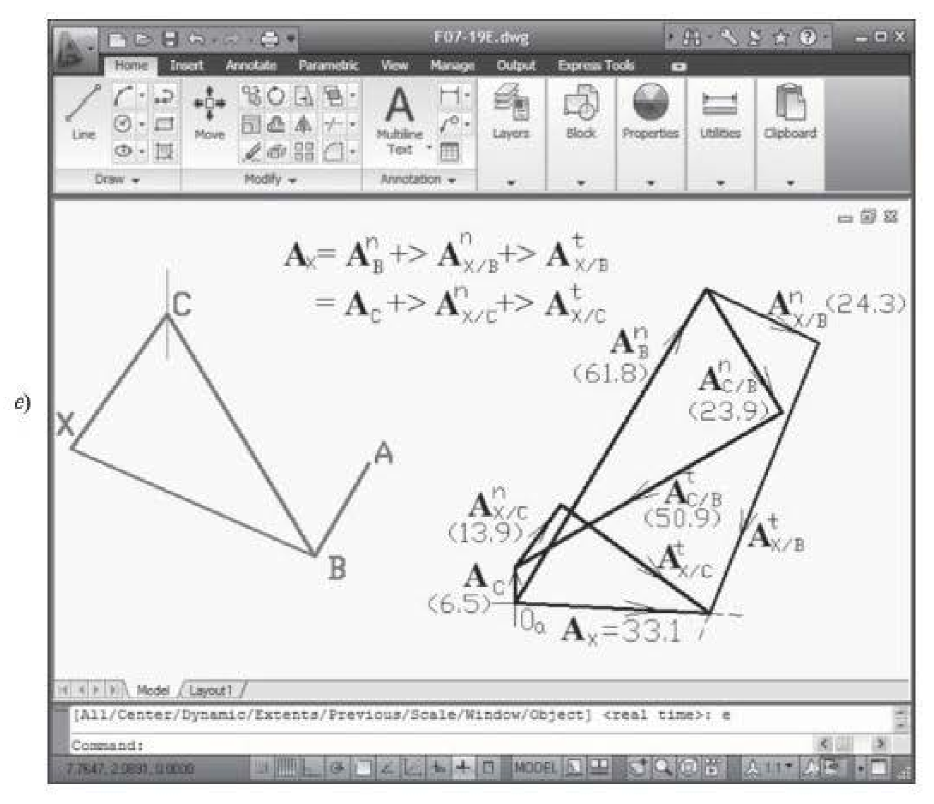


FIGURA 7.19 (*Continuación*).

Como se trata de un punto en general sobre un eslabón flotante, la velocidad del punto X se determina resolviendo las ecuaciones vectoriales simultáneas.

$$\mathbf{V}_X = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{X/B}$$

$$\mathbf{V}_X = \mathbf{V}_C +> \mathbf{V}_{X/C}$$

Ya se conocen las velocidades de los puntos B y C, en tanto que las direcciones de $V_{X/B}$ y $V_{X/C}$ son perpendiculares a las líneas que conectan los puntos X y B, y X y C, respectivamente. Sus velocidades se trazaron a escala y se agregaron al polígono de velocidad. En la figura 7.19c se muestra el diagrama de velocidad completo. Las magnitudes de las velocidades desconocidas se calcularon como:

$$\mathbf{V}_{X/C} = 0.625 \text{ m/s } \searrow 35.2°$$
$$\mathbf{V}_{X/B} = 1.046 \text{ m/s } 66.4° \swarrow$$

2. ***Calcule las componentes de la aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración que incluya los puntos A y B y, a final de cuentas, X. Calcule las magnitudes de las aceleraciones conocidas de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(v_B)^2}{r_{AB}} = \frac{(1055 \text{ mm/s})^2}{18 \text{ mm}} = 61834 \text{ mm/s}^2 = 61.8 \text{ m/s}^2 \nearrow 60°$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto A)

$$\mathbf{A}_B^t = 0 \text{ (porque } \alpha_2 = 0)$$

$$\mathbf{A}_{C/B}^n = \frac{(v_{C/B})^2}{r_{CB}} = \frac{(1072 \text{ mm/s})^2}{48 \text{ mm}} = 23941 \text{ mm/s}^2 = 23.9 \text{ m/s}^2 \searrow 58.5°$$

(dirigida de C hacia B medida sobre el diagrama de CAD)

Observe que el punto C no tiene aceleración normal, ya que el movimiento es estrictamente de traslación.

$$\mathbf{A}_{X/B}^n = \frac{(v_{X/B})^2}{r_{BX}} = \frac{(1046 \text{ mm/s})^2}{45 \text{ mm}} = 24313 \text{ mm/s}^2 = 24.3 \text{ m/s}^2 \searrow 23.6°$$

(dirigida de X hacia B medida sobre el diagrama de CAD)

$$\mathbf{A}_{X/C}^n = \frac{(v_{X/C})^2}{r_{CX}} = \frac{(62.5 \text{ mm/s})^2}{28 \text{ mm}} = 13950 \text{ mm/s}^2 = 13.9 \text{ m/s}^2 \nearrow 54.8°$$

(dirigida de X hacia C medida sobre el diagrama de CAD)

3. ***Construir el diagrama de aceleración***

Si se sabe que no existen las componentes $\mathbf{A}_B^t$ y $\mathbf{A}_C^n$ de aceleración, la ecuación de aceleración relativa de los puntos B y C se escribe como:

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t$$

En la figura 7.19d se muestra el diagrama de aceleración a escala.

4. ***Mida las componentes desconocidas***

Midiendo con la escala adecuada las magnitudes del diagrama, se obtienen los siguientes resultados.

$$\mathbf{A}_{C/B}^t = 50.9 \text{ m/s}^2 \quad 31.5° \swarrow$$
$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_C^t = 6.5 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

5. ***Continúe el diagrama de aceleración***

Como con las velocidades, debido a que el punto X es un punto en general sobre un eslabón flotante, su aceleración se debe determinar despejando las ecuaciones vectoriales simultáneas.

$$\mathbf{A}_X = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{X/B}^n +> \mathbf{A}_{X/B}^t$$
$$\mathbf{A}_X = \mathbf{A}_C^n +> \mathbf{A}_C^t +> \mathbf{A}_{X/C}^n +> \mathbf{A}_{X/C}^t$$

Como se vio, las aceleraciones $\mathbf{A}_B^t$ y $\mathbf{A}_C^n$ son iguales a cero. Asimismo, ya se determinaron $\mathbf{A}_B^n$, $\mathbf{A}_C^t$, $\mathbf{A}_{X/B}^n$ y $\mathbf{A}_{X/C}^n$.

De nueva cuenta, de manera similar al análisis de velocidad, las dos ecuaciones de aceleración se superponen en el polígono de aceleración original. Las aceleraciones se dibujaron a escala, y el diagrama completo de aceleración se ilustra en la figura 7.19e.

6. ***Mida las componentes que se desean conocer***

Las magnitudes de las aceleraciones desconocidas se midieron como:

$$\mathbf{A}^t_{X/C} = 31.6 \text{ m/s}^2 \quad 35.2°$$

$$\mathbf{A}^t_{X/B} = 48.1 \text{ m/s}^2 \quad 66.4°$$

y, finalmente,

$$\mathbf{A}_X = 33.8 \text{ m/s}^2 \quad 0.3°$$

7.10 IMAGEN DE ACELERACIÓN

Como en el polígono de velocidad, cada eslabón de un mecanismo tiene una imagen en el polígono de aceleración [ref. 10]. Para ilustrarlo, en la figura 7.20a se presenta un mecanismo, con su diagrama de velocidad asociado en la figura 7.20b, y los diagramas de aceleración en las figuras 7.20c y 7.20d.

En la figura 7.20c se dibujó un triángulo usando todos los vectores de aceleración de los puntos *B* y *X*. Observe que este triángulo es una imagen proporcional del eslabón que contiene los puntos *B* y *X*. De manera similar, la figura 7.20d muestra un triángulo que se construyó a partir de todos los vectores de aceleración de los puntos *B*, *C* y *Y*. Otra vez, este triángulo es una imagen proporcional del eslabón que contiene los puntos *B*, *C* y *Y*. Estas formas de los polígonos de aceleración se conocen justificadamente como *imágenes de aceleración* de los eslabones.

Este concepto ofrece medios convenientes para construir el polígono de aceleración de un mecanismo con eslabones complejos. Las magnitudes de los vectores de aceleración relativa de todos los puntos sobre un eslabón son proporcionales a la dis-

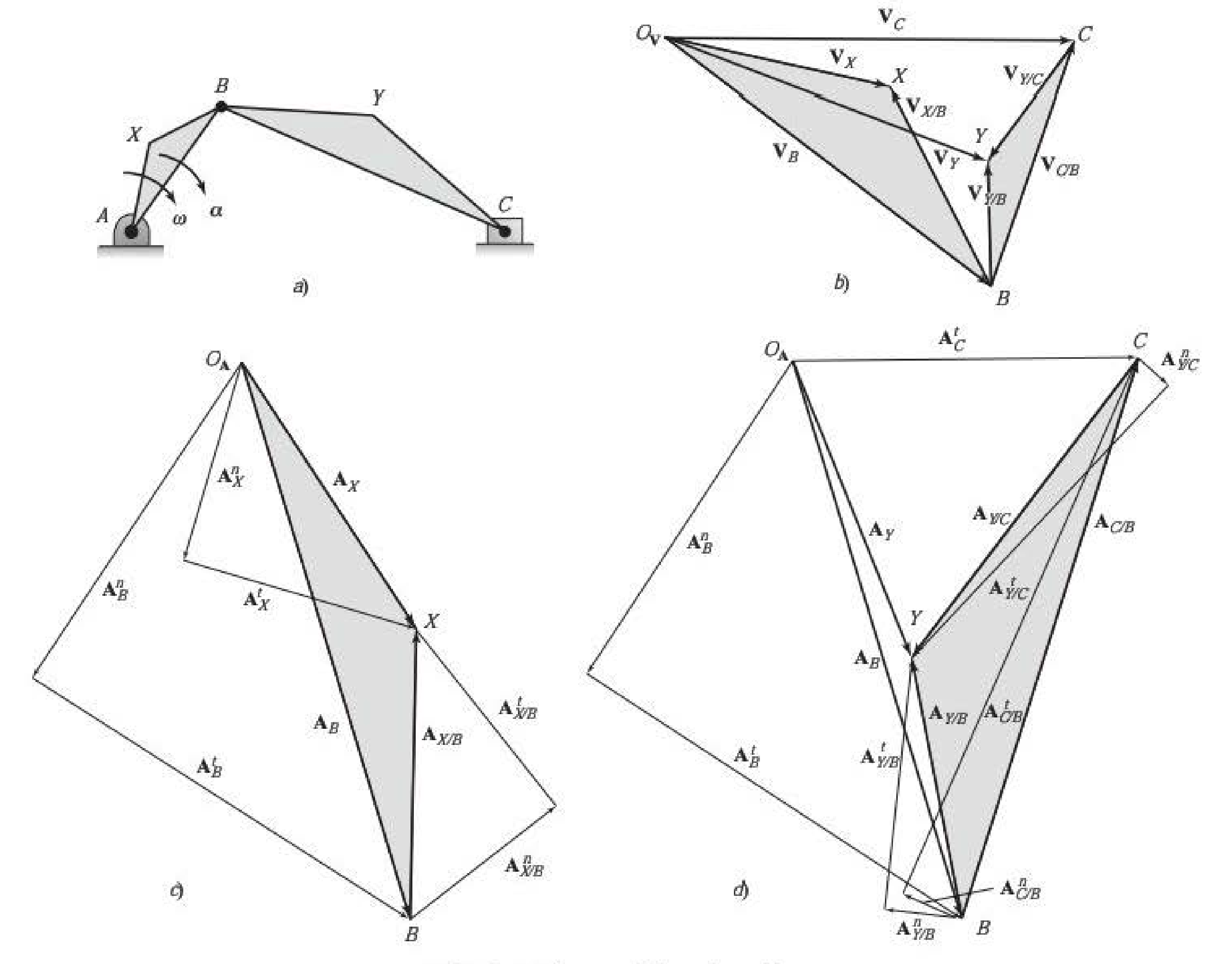


FIGURA 7.20 Imagen de la aceleración.

tancia entre los puntos, lo cual significa que los puntos del diagrama de aceleración formarán una imagen con los puntos correspondientes del diagrama cinemático. Una vez que se determina la aceleración de dos puntos sobre un eslabón, la aceleración de otro punto cualesquiera se determina fácilmente. Los dos puntos sirven como base de la imagen de la aceleración. Sin embargo, como con la imagen de velocidad, se debe tener cuidado de no hacer simétrica la forma del eslabón entre el diagrama cinemático y el polígono de aceleración.

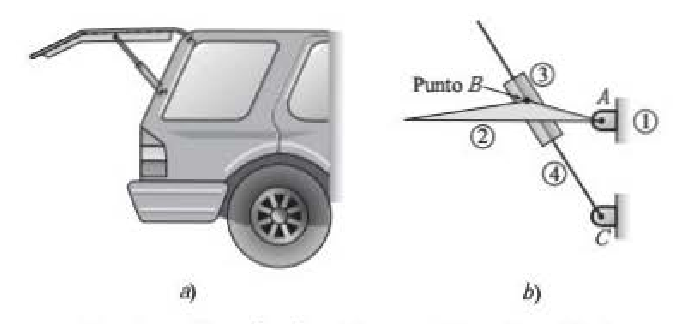


FIGURA 7.21 Caso donde está presente la aceleración de Coriolis.

7.11 ACELERACIÓN DE CORIOLIS

A través de los análisis anteriores, se examinaron exhaustivamente las dos componentes de un vector de aceleración (es decir, la normal y la tangencial). En ciertas condiciones, se presenta una tercera componente de la aceleración. Esta componente adicional se conoce como *componente de aceleración de Coriolis* y se presenta en casos donde existe contacto de deslizamiento entre dos eslabones giratorios.

Se sabe que algunos mecanismos utilizados en máquinas han fallado debido a la falta de consideración de esta componente. La omisión de la componente de Coriolis subestima la aceleración de un eslabón y las fuerzas inerciales asociadas. Los esfuerzos reales en las componentes de la máquina pueden ser mayores de lo que el diseño permite, y podría ocurrir una falla. Por lo tanto, en cada situación se debe evaluar si existe o no la componente de aceleración de Coriolis.

Específicamente, la componente de Coriolis se encuentra en la aceleración relativa de dos puntos cuando se presentan simultáneamente las tres condiciones siguientes:

1. Los dos puntos son coincidentes, pero se encuentran en diferentes eslabones;
2. El punto sobre un eslabón sigue una trayectoria que se encuentra sobre el otro eslabón, y
3. Gira el eslabón sobre el cual se encuentra la trayectoria.

La figura 7.21 muestra la ventanilla trasera de una minivan y el diagrama cinemático relacionado. Observe que el punto B se puede relacionar con los eslabones 2, 3 o 4. Para aclarar la asociación con un eslabón, el punto B se identifica como B_2, B_3 y B_4. Hasta esta parte del capítulo, se sabe que un punto coincidente sobre eslabones diferentes tiene la misma aceleración porque tan solo se usan uniones de perno para unir dos eslabones giratorios. En la figura 7.21 se usan tanto uniones de perno como de deslizamiento para conectar dos eslabones giratorios, los eslabones 2 y 4. En este caso, las velocidades y las aceleraciones de los puntos coincidentes B_2 y B_4 no son las mismas.

Se pueden usar las ecuaciones de movimiento relativo para relacionar las velocidades y las aceleraciones de la manera siguiente:

$$\mathbf{V}_{B2} = \mathbf{V}_{B4} +> \mathbf{V}_{B2/B4}$$

$$\mathbf{A}_{B2} = \mathbf{A}_{B4} +> \mathbf{A}_{B2/B4}$$

Esta situación representa el caso de análisis de un mecanismo donde se debe incluir la componente de Coriolis en el término de aceleración relativa $\mathbf{A}_{B2/B4}$. Observe que

- Los puntos son coincidentes, pero no sobre el mismo eslabón (condición 1);
- El punto B_2 se desliza a lo largo de una trayectoria sobre el eslabón 4 (condición 2) y
- El eslabón sobre el que se encuentra la trayectoria, el eslabón 4, gira (condición 3).

Separando el término de aceleración relativa en sus componentes,

$$\mathbf{A}_{B2/B4} = \mathbf{A}^n_{B2/B4} +> \mathbf{A}^t_{B2/B4} +> \mathbf{A}^c_{B2/B4} \qquad (7.27)$$

donde

$\mathbf{A}^c_{B2/B4}$ = componente de aceleración de Coriolis

La magnitud de la componente de aceleración de Coriolis se definió [ref. 4] como

$$a^c_{B2/B4} = 2v_{B2/B4}\omega_4 \qquad (7.28)$$

Tanto la velocidad lineal relativa como la velocidad angular absoluta se determinan a partir de un análisis exhaustivo de la velocidad del mecanismo. La velocidad angular ω debe ser la del eslabón que contiene la trayectoria del punto que se desliza. Hay que tener cuidado porque un error común en el cálculo de la componente de Coriolis es la selección de la velocidad angular incorrecta.

La dirección de la componente de Coriolis es perpendicular al vector de velocidad relativa $v_{B4/B2}$. El sentido se obtiene girando el vector de velocidad relativa, de modo que la punta del vector esté orientada en la dirección de la velocidad angular de la trayectoria. Entonces, cuando la velocidad angular ω_4 de la trayectoria gira en sentido horario, la dirección de Coriolis se obtiene girando el vector de velocidad relativa 90° en sentido horario. Por el contrario, cuando la velocidad angular de la trayectoria, ω_4, gira en sentido antihorario, la dirección de Coriolis se obtiene girando el vector de velocidad relativa 90° en sentido antihorario. La figura 7.22 presenta los cuatro casos donde se determina la dirección de la componente de Coriolis.

Como la magnitud y la dirección de la componente de Coriolis se calculan fácilmente a partir de los datos de velocidad, no se agregan incógnitas adicionales a la ecuación de aceleración. Sin embargo, en la solución de problemas, es más conveniente escribir la ecuación de aceleración con el punto que describe la trayectoria del lado izquierdo. La técnica de este análisis de aceleración se ilustra mejor a través del siguiente problema de ejemplo.

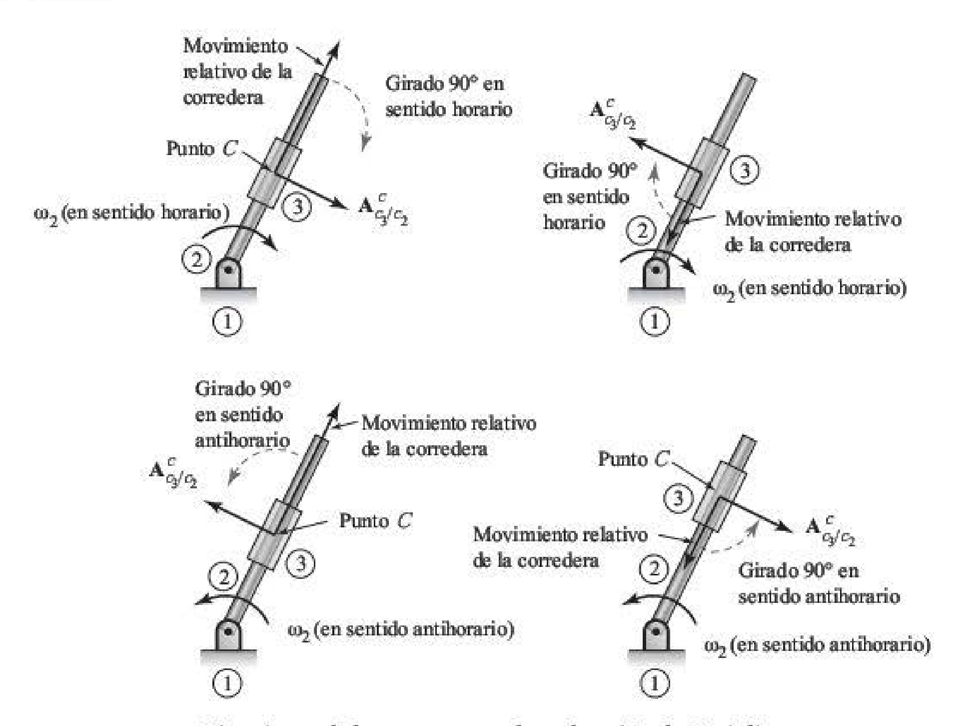


FIGURA 7.22 Direcciones de la componente de aceleración de Coriolis.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.11

La figura 7.23 ilustra unas tijeras manuales para cortar maleza o para cortar césped en áreas difíciles de alcanzar con podadoras ordinarias. La rueda impulsora gira a 400 rpm en sentido antihorario. Determine la aceleración angular de las cuchillas oscilantes en el momento mostrado.

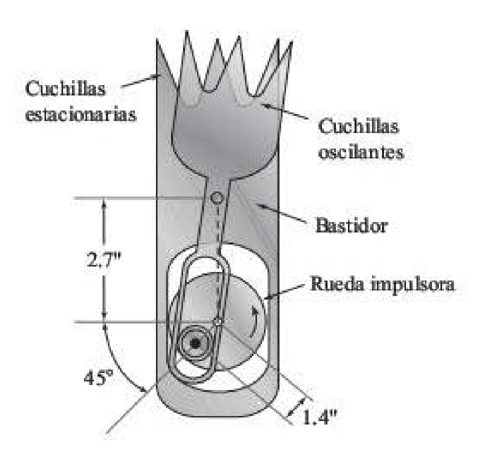


FIGURA 7.23 Tijeras para cortar césped del problema de ejemplo 7.11.

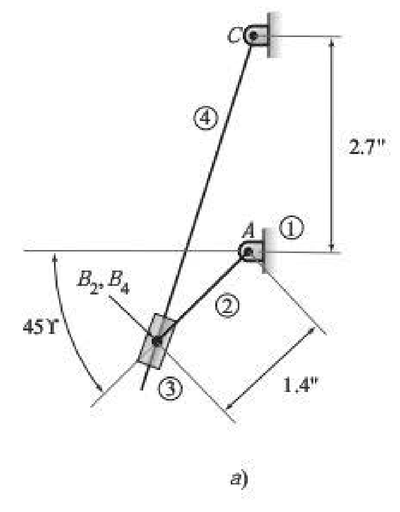
SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático***

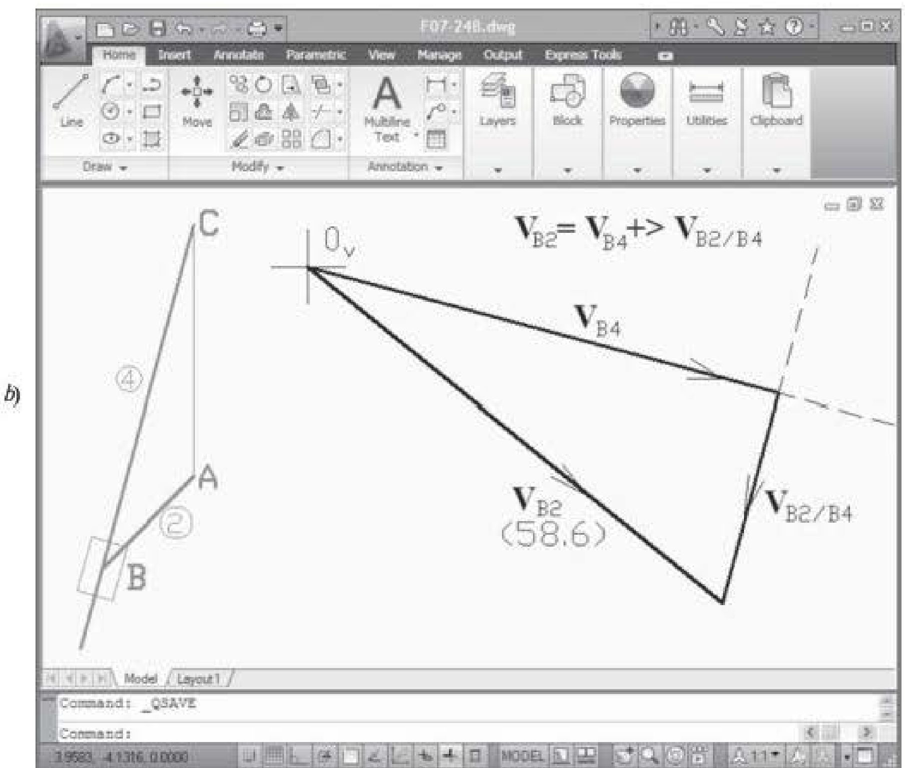
   En la figura 7.24a se presenta el diagrama cinemático a escala de este mecanismo.

2. ***Elija el método para obtener la aceleración deseada***

   La aceleración de B_2 se determina fácilmente a partir de la información de entrada del eslabón 2. Se debe obtener la aceleración de B_4 para calcular la aceleración angular del eslabón 4. Observe que existe deslizamiento entre los eslabones giratorios (2 y 4); por consiguiente, se cumplen las tres condiciones de Coriolis. La aceleración del eslabón 4 se obtendrá usando las ecuaciones (7.27) y (7.28).



a)



b)

FIGURA 7.24 Diagramas del problema de ejemplo 7.11.

3. *Realice un análisis completo de velocidad*

El primer paso es construir un diagrama de velocidad que incluya los puntos B_2 y B_4. Calcule la magnitud de la velocidad del punto B_2 de la manera siguiente:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{30}(400 \text{ rpm}) = 41.9 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

$$V_{B2} = \omega_2 r_{AB} = 241.9 \text{ rad/s} (1.4 \text{ in}) = 58.6 \text{ in/s} \quad \angle 45°$$

La dirección de V_{B2} es perpendicular al eslabón 2 y es consistente con la dirección de ω_2, hacia abajo y a la derecha. Por lo tanto, se dibuja un vector a escala a partir del origen del diagrama de velocidad para representar esta velocidad.

La ecuación de velocidad relativa de los puntos B_2 y B_4 se escribe como:

$$V_{B2} = V_{B4} +> V_{B2/B4}$$

Como el eslabón 4 está sujeto con un perno al eslabón fijo, la velocidad de B_4 es perpendicular a la línea que conecta B_4 con el centro de rotación (el punto C). En este caso, la velocidad relativa de B_2 con respecto a B_4 es

c)

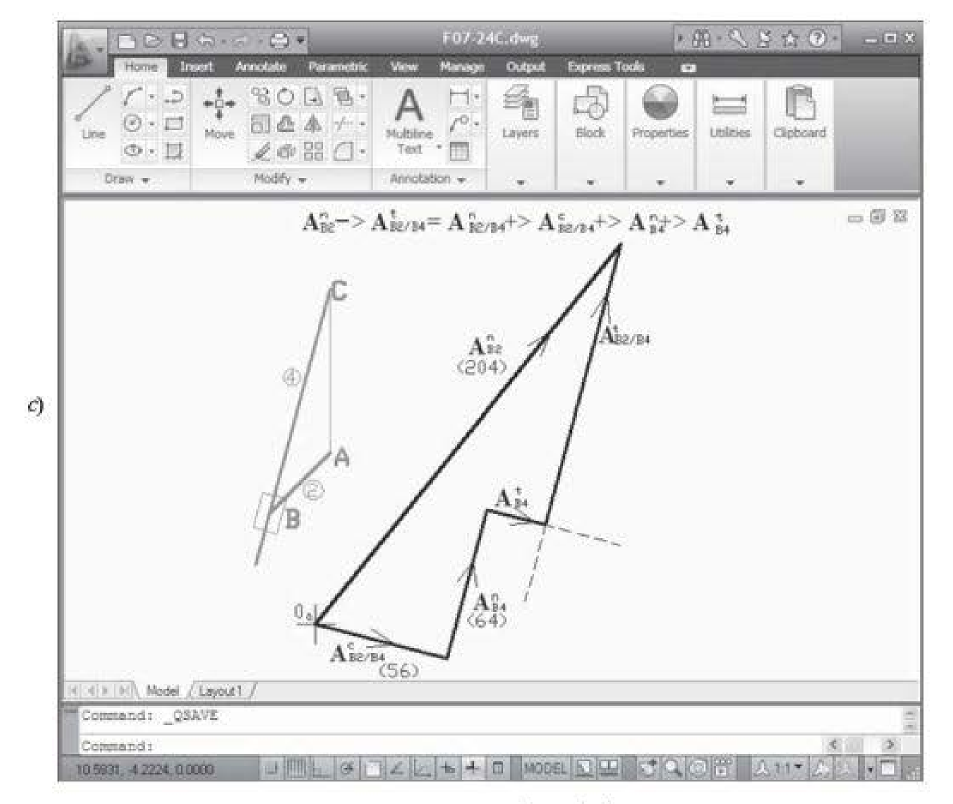


FIGURA 7.24 (*Continuación*).

paralela al eslabón 4 porque B_2 se desliza a lo largo del eslabón 4. El diagrama de velocidad mostrado en la figura 7.24b se elaboró a escala para obtener las magnitudes de velocidad de

$$\mathbf{V}_{B4} = 50.7 \text{ in/s} \quad 15°$$

$$\mathbf{V}_{B2/B4} = 29.3 \text{ in/s} \quad 75°$$

La distancia entre los puntos C y B_4 de 3.8 in se obtuvo midiendo con CAD. Por consiguiente, la velocidad angular del eslabón 4 se calcula como:

$$\omega_4 = \frac{\mathbf{V}_{B4}}{r_{CB4}} = \frac{50.7 \text{ in/s}}{3.8 \text{ in}} = 13.3 \text{ rad/s, en sentido antihorario}$$

Como se determinó que la velocidad de B_4 está hacia abajo y a la derecha, la velocidad angular de B_4 debe estar en sentido antihorario.

4. ***Calcule las componentes de la aceleración***

Determine las magnitudes de las aceleraciones conocidas como sigue:

$$\mathbf{A}^n_{B2} = \frac{(\mathbf{V}_{B2})^2}{r_{CB2}} = \frac{(58.6 \text{ in/s})^2}{1.4 \text{ in}} = 2453 \text{ in/s}^2 = 204 \text{ ft/s}^2 \quad 45°$$

(dirigida hacia el centro de rotación, punto A)

$$\mathbf{A}^t_{B2} = 0 \ (\alpha_2 = 0)$$

$$\mathbf{A}^n_{B4} = \frac{(\mathbf{V}_{B4})^2}{r_{CB4}} = \frac{(50.7 \text{ in/s})^2}{3.8 \text{ in}} = 676 \text{ in/s}^2 = 56 \text{ ft/s}^2 \quad 75°$$

(dirigida hacia el centro de rotación, el punto C)

$$\mathbf{A}^n_{B2/B4} = 0$$

(ya que B_2 se desliza sobre B_4 y el movimiento relativo es de traslación pura)

$$\mathbf{A}^c_{B2/B4} = 2(v_{B2/B4})(\omega_4) = 2(29.3 \text{ in/s})\ (13.3 \text{ rad/s}) = 779 \text{ in/s}^2 = 65 \text{ ft/s}^2 \quad 15°$$

La dirección de la componente de Coriolis es $v_{B2/B4}$, que es paralela a la trayectoria de B_2 en relación con B_4 (75°), girada 90° en la dirección de ω_4 (sentido antihorario). Entonces, la componente de Coriolis es perpendicular al eslabón 4, hacia abajo y a la derecha (15°).

5. ***Construya el diagrama de aceleración***

El paso siguiente es construir el diagrama de aceleración que incluya los puntos B_2 y B_4. Como se mencionó, generalmente resulta más conveniente escribir la ecuación de aceleración con el punto que recorre la trayectoria, B_2, del primer miembro. Con esta directriz, la ecuación de la aceleración se escribe como:

$$\mathbf{A}_{B2}^{n} +> \mathbf{A}_{B2}^{t} = \mathbf{A}_{B4}^{n} +> \mathbf{A}_{B4}^{t} +> \mathbf{A}_{B2/B4}^{n} +> \mathbf{A}_{B2/B4}^{t} +> \mathbf{A}_{B2/B4}^{c}$$

Las incógnitas en la ecuación de aceleración son A_{B4}^{t} y $A_{B2/B4}^{t}$. Reagrupando la ecuación de aceleración de manera que cada incógnita sea el último término de cada miembro de la ecuación:

$$\mathbf{A}_{B2}^{n} +> \mathbf{A}_{B2}^{t} +> \mathbf{A}_{B2/B4}^{t} = \mathbf{A}_{B2/B4}^{n} +> \mathbf{A}_{B2/B4}^{c} +> \mathbf{A}_{B4}^{n} +> \mathbf{A}_{B4}^{t}$$

El diagrama de aceleración dibujado a escala se presenta en la figura 7.24c.

6. ***Mida las componentes de la aceleración que se desea conocer***

Se obtienen a escala las magnitudes de los vectores del diagrama usando las siguientes ecuaciones:

$$A_{B2/B4}^{t} = 112 \text{ ft/s}^2 \quad 75°$$

$$A_{B4}^{t} = 37 \text{ ft/s}^2 = 444 \text{ in/s}^2 \quad 15°$$

y, finalmente,

$$\alpha_4 = \frac{a_{B4}^{t}}{r_{CB4}} = \frac{444 \text{ in/s}^2}{3.8 \text{ in}} = 117 \text{ rad/s}^2$$

Como se determinó que la aceleración tangencial de B_4 es hacia abajo y a la derecha, la aceleración angular correspondiente del eslabón 4 debe ser en el sentido antihorario; por lo tanto,

$$\alpha_4 = 177 \text{ rad/s}^2, \text{ en sentido antihorario}$$

7.12 MECANISMOS EQUIVALENTES

Hasta este punto del libro, los ejemplos de análisis de movimiento han incluido tan solo mecanismos con uniones principales; es decir, uniones de perno y de corredera. Recuerde del capítulo 1 que una unión de orden superior, como una unión de leva o de engrane, implica movimiento de rodamiento y deslizamiento. Tanto las levas como los engranes son el tema de estudio en capítulos posteriores. Sin embargo, el análisis de movimiento de mecanismos con uniones de orden superior se realiza usando los conceptos ya estudiados.

El análisis de velocidad y aceleración de mecanismos que utilizan uniones de orden superior se simplifica significativamente con la construcción de un mecanismo equivalente. Este método convierte la configuración instantánea de un mecanismo en un *mecanismo equivalente*, donde los eslabones están conectados con uniones principales. La figura 7.25 ilustra dos mecanismos de leva que tienen uniones de rodamiento y deslizamiento. Las líneas punteadas representan los mecanismos equivalentes.

Observe que el acoplador de estos mecanismos equivalentes está dibujado desde los centros de curvatura respectivos de los dos eslabones aparejados. Para un periodo de tiempo finito, los dos centros de curvatura de los eslabones aparejados permanecerán separados a una distancia constante. En la figura 7.25 observe que el acoplador se utiliza para sustituir la unión de orden superior. Este acoplador se extiende entre el centro de curvatura de las superficies en contacto de los dos eslabones aparejados. Para un periodo de tiempo finito, los centros de curvatura de dos superficies aparejadas permanecerán separados a una distancia constante. El fundamento proviene del concepto de centro instantáneo introducido en la sección 6.10. Por lo tanto, se puede usar un eslabón acoplador, con dos uniones de perno, para reemplazar la unión de orden superior. Es importante observar que la ubicación del centro de curvatura cambiará conforme el mecanismo se mueve. Sin embargo, una vez que se haya construido el mecanismo equivalente, el método de análisis es idéntico a los problemas expuestos anteriormente en este texto.

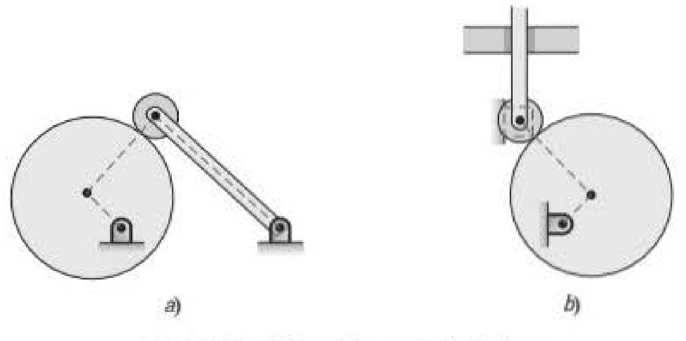


FIGURA 7.25 Mecanismos equivalentes.

7.13 CURVAS DE ACELERACIÓN

Los análisis presentados hasta ahora sirven para calcular la aceleración de puntos sobre un mecanismo en un instante específico. Aun cuando son importantes, los resultados ofrecen tan solo una foto instantánea del movimiento. La desventaja evidente de este análisis es que se dificulta la obtención de las condiciones extremas durante un ciclo. Se requieren investigar varias posiciones del mecanismo para descubrir las fases críticas.

Como se mostró con la velocidad, también es conveniente seguir la magnitud de la aceleración de cierto punto, o eslabón, conforme el mecanismo se mueve a través de su ciclo. Tal seguimiento brinda información acerca de las fases críticas del ciclo. La curva de aceleración proporciona ese trazo. La curva de aceleración grafica la aceleración de un punto o un eslabón en función del tiempo. Se puede generar a partir de la curva de velocidad, la cual se presentó en la sección 6.14.

Recuerde que la curva de velocidad grafica la magnitud de la velocidad de un punto o un eslabón en función del tiempo. La curva de velocidad se genera a partir de la curva de desplazamiento, la cual se presentó en la sección 4.11. Por consiguiente, se utiliza una curva de desplazamiento para generar la curva de velocidad que, a la vez, sirve para generar la curva de aceleración. Esto se debe a que la aceleración se puede expresar como:

$$\text{Aceleración} = \frac{d(\text{velocidad})}{dt}$$

El cálculo diferencial sugiere que la aceleración en un instante particular es la pendiente de la curva de velocidad en ese instante. Como la velocidad es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, la aceleración también se expresa como:

$$\text{Aceleración} = \frac{d^2(\text{desplazamiento})}{dt^2}$$

Esta ecuación sugiere que la aceleración en un instante particular es la curvatura en la curva de desplazamiento. Se debe admitir que la curvatura quizá no sea muy conveniente para calcular la pendiente. Sin embargo, es fácil visualizar las ubicaciones de aceleraciones extremas, localizando las regiones puntiagudas de las curvas sobre el diagrama de desplazamiento. Aun cuando los valores sean difíciles de calcular, el mecanismo se puede configurar en la posición deseada y, luego, ejecutar un análisis de aceleración exhaustivo, como se presentó en las secciones anteriores.

Para determinar los valores de las curvas de aceleración, es mejor determinar la pendiente en varias regiones de la curva de velocidad (véase la sección 6.14).

7.13.1 DIFERENCIALES GRÁFICAS

La tarea consiste en estimar la pendiente de la curva de velocidad en varios puntos. La pendiente de una curva en un punto se estima gráficamente dibujando una línea tangente a la curva en el punto de interés. La pendiente de la línea se determina calculando el cambio medido en la "elevación" (velocidad) dividido entre el cambio medido en la "corrida" (tiempo).

Este procedimiento se puede repetir en varios puntos a lo largo del diagrama de velocidad. Sin embargo, generalmente tan solo se desean conocer los cambios abruptos y extremos en la aceleración. Usando los conceptos de cálculo diferencial y de pendientes, las posiciones de interés se logran detectar visualmente. Estas incluyen:

- Las partes más inclinadas del diagrama de velocidad, que corresponden a las aceleraciones extremas, y
- Las ubicaciones del diagrama de velocidad con la curvatura más grande, las cuales corresponden a los cambios abruptos de las aceleraciones.

Se debe destacar que quizá ocurran fácilmente errores en la determinación de la pendiente de una curva. Tales errores se magnifican conforme la pendiente se mide en una curva derivada. Este es el caso cuando la curva de aceleración se obtiene a partir de la curva de velocidad, la cual proviene a la vez de una curva de desplazamiento. Por ende, los valores obtenidos para del diagrama de aceleración se deberían usar con precaución.

No obstante, es invaluable la identificación de las posiciones extremas de aceleración. Se debería realizar entonces un análisis de aceleración exhaustivo, como el presentado en las secciones anteriores de este capítulo, en esas orientaciones del mecanismo para obtener valores de aceleración precisos. El beneficio de la curva de aceleración es ubicar las configuraciones importantes del mecanismo; por lo tanto, se tiene que realizar un análisis meticuloso de la aceleración.

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.12

En el problema de ejemplo 6.18 se construyó la curva de velocidad de un mecanismo compresor. Con esos datos grafique una curva de aceleración.

SOLUCIÓN: 1. ***Identifique las partes horizontales del diagrama de velocidad***

La tarea principal en la construcción de una curva de aceleración es determinar la pendiente de muchos puntos de la curva de velocidad. Esta curva de velocidad se construyó en el problema de ejemplo 6.18 y se reproduce en la figura 7.26.

En esta curva es evidente que hay tangentes horizontales, o de pendiente igual a cero, en 0.007 y 0.027 s. Entonces, la aceleración del pistón es cero en 0.007 y 0.027 s, cuyos puntos están identificados como t_1 y t_3, respectivamente.

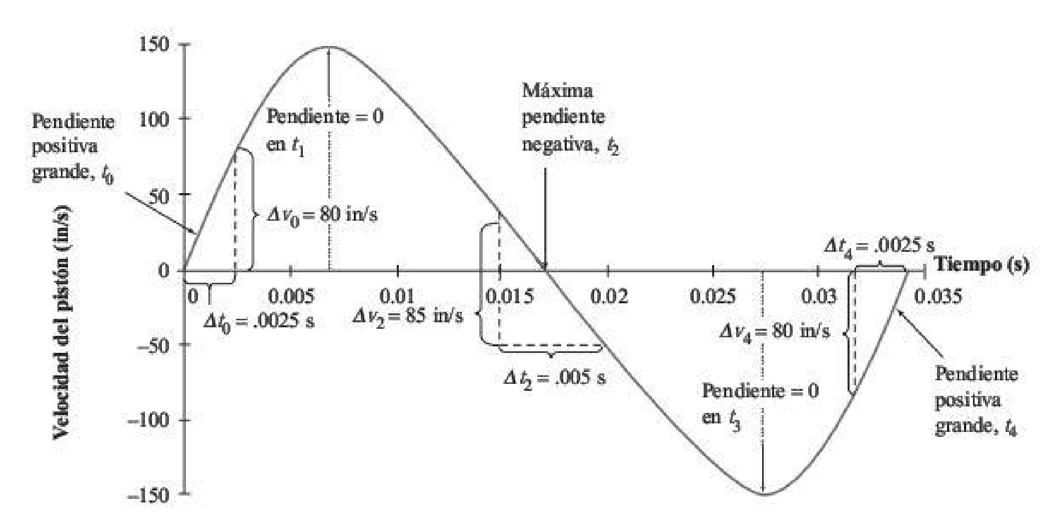


FIGURA 7.26 Curva de velocidad del problema de ejemplo 7.12.

2. ***Calcule la pendiente en las partes sobresalientes de la curva de velocidad***

La pendiente máxima hacia arriba se encuentra en 0 s. Este punto se identifica como t_0. Se puede hacer un estimado de la velocidad a partir de los valores de Δv_0 y Δt_0 leídos en la gráfica. La aceleración en 0 se estima como:

$$a_0 = \frac{\Delta v_0}{\Delta t_0} = \frac{80 \text{ in/s}}{0.0025 \text{ s}} = 32000 \text{ in/s}^2$$

Asimismo, la pendiente máxima hacia abajo aparece en 0.017 s. Este punto se identifica como t_2. Nuevamente, el estimado de la aceleración se hace a partir de los valores de Δv_2 y Δt_2 leídos en la gráfica. La aceleración en 0.017 s. se estima como:

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{-85 \text{ in/s}}{0.005 \text{ s}} = -17000 \text{ in/s}^2$$

3. ***Dibuje la curva de aceleración***

El procedimiento para determinar la pendiente de la curva de velocidad se repite con otros valores de tiempo. Recopilando la información de la pendiente y el tiempo, se construye la curva de aceleración (figura 7.27).

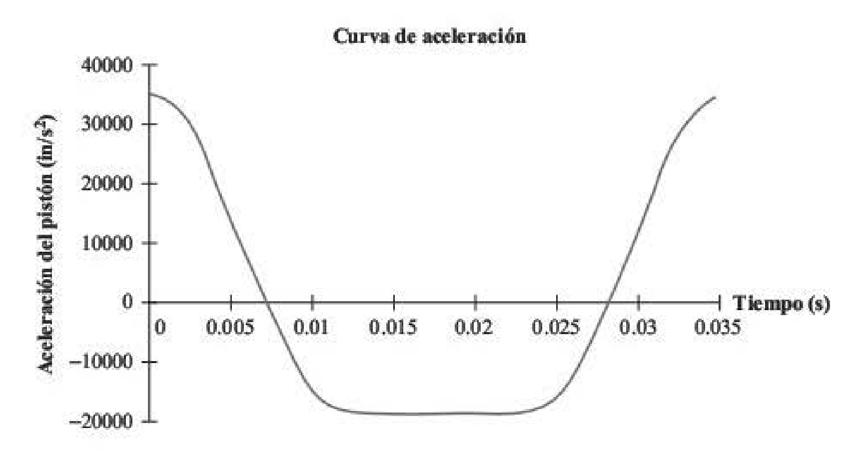


FIGURA 7.27 Curva de aceleración del problema de ejemplo 7.12.

7.13.2 Diferenciales numéricas

Como en la sección 6.14.2, la curva de aceleración se determina a partir de los datos de velocidad mediante diferenciales numéricas. Nuevamente, se usa el método de Richardson [ref. 3] para obtener la derivada de una serie de datos puntuales, a intervalos iguales, de la variable independiente. De modo que la derivada de la curva de velocidad-tiempo se aproxima numéricamente con la siguiente ecuación:

$$a_i = \left[\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\,\Delta t}\right] - \left[\frac{v_{i+2} - 2v_{i+1} + 2v_{i-1} - v_{i-2}}{12\,\Delta t}\right] \quad (7.29)$$

donde:

i = subíndice de datos puntuales

v_i = velocidad en el dato puntual i

$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$

t_i = tiempo en el dato puntual i

También se puede determinar la segunda derivada mediante aproximación numérica. Aun cuando no es exacta, esto permite que la curva de aceleración se derive directamente de la curva de desplazamiento-tiempo. De nuevo, se usa el método de Richardson para determinar numéricamente la segunda derivada con la siguiente ecuación:

$$a_i = \left[\frac{\Delta R_{i+1} - 2\Delta R_i + \Delta R_{i-1}}{\Delta t^2}\right] \quad (7.30)$$

donde, además de la notación anterior,

ΔR_i = desplazamiento en el dato puntual i

PROBLEMA DE EJEMPLO 7.13

En el problema de ejemplo 4.11 se graficó un diagrama de desplazamiento de un pistón que funciona en un compresor. Partiendo de este diagrama, se derivó la curva de velocidad en el problema de ejemplo 6.18. Use estos datos para generar numéricamente la curva de aceleración.

SOLUCIÓN:

1. ***Determine el incremento de tiempo entre los datos puntuales***

   Los datos de la hoja de cálculo del problema de ejemplo 6.17 (figura 6.40) se amplían para insertar una columna adicional que incluya la magnitud de la aceleración del pistón. Asimismo, en el problema de ejemplo 6.18 el incremento de tiempo se calculó como:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (0.00286 - 0.0) = 0.00286 \text{ s}$$

2. ***Use la ecuación (7.29) para calcular los datos puntuales de aceleración***

   Para ilustrar el cálculo de las aceleraciones, a continuación se presentan unos cuantos ejemplos de cálculo usando la ecuación (7.29):

$$a_2 = \left[\frac{v_3 - v_1}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{v_4 - 2v_3 + 2v_1 - v_{12}}{12\,\Delta t}\right]$$

$$= \left[\frac{142.67 - 0.0}{2(.00286)}\right] - \left[\frac{137.50 - 2(142.67) + 2(0.0) - (-91.47)}{12(.00286)}\right]$$

$$= 26898 \text{ in/s}^2$$

$$a_9 = \left[\frac{v_{10} - v_8}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{v_{11} - 2v_{10} + 2v_8 - v_7}{12\,\Delta t}\right]$$

$$= \left[\frac{(-142.67) - (-95.48)}{2(.00286)}\right] - \left[\frac{(-91.47) - 2(-142.67) + 2(-95.48) - (46.03)}{12(.00286)}\right]$$

$$= -17305 \text{ in/s}^2$$

$$a_{12} = \left[\frac{v_{13} - v_{11}}{2\Delta t}\right] - \left[\frac{v_2 - 2v_{13} + 2v_{11} - v_{10}}{12\,\Delta t}\right]$$

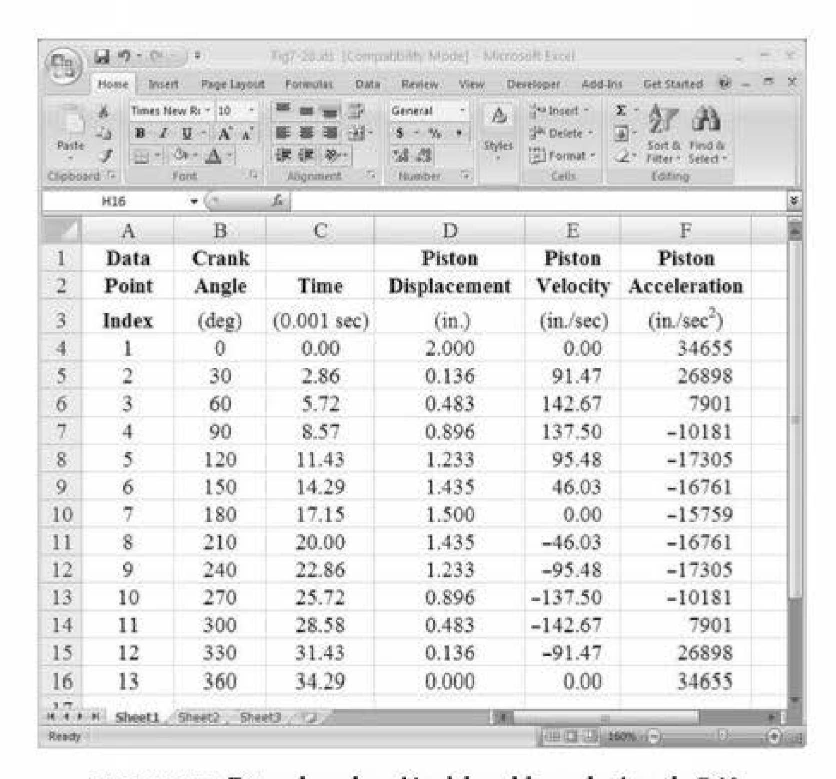
$$= \left[\frac{(0.0) - (-142.67)}{2(.00286)}\right] - \left[\frac{(91.47) - 2(0.0) + 2(-91.47) - (142.67)}{12(.00286)}\right]$$

$$= 26898 \text{ in/s}^2$$

3. ***Reúna los resultados de aceleración y grafique la curva***

La información resultante, con todas las magnitudes de aceleración calculadas, se proporciona en la figura 7.28. Estos valores están graficados en la figura 7.29 para formar el diagrama de aceleración en relación con el tiempo.

Observe que esta curva es todavía muy burda. Para efectos de exactitud, se recomienda ampliamente que el incremento en el ángulo de la manivela se reduzca a 10° o 15°. Cuando se usa una hoja de cálculo para generar los datos de aceleración, son aconsejables incluso incrementos menores para no volver la tarea más difícil.



Data Point Index	Crank Angle (deg)	Time (0.001 sec)	Piston Displacement (in.)	Piston Velocity (in./sec)	Piston Acceleration (in./sec^2)
1	0	0.00	2.000	0.00	34655
2	30	2.86	0.136	91.47	26898
3	60	5.72	0.483	142.67	7901
4	90	8.57	0.896	137.50	-10181
5	120	11.43	1.233	95.48	-17305
6	150	14.29	1.435	46.03	-16761
7	180	17.15	1.500	0.00	-15759
8	210	20.00	1.435	-46.03	-16761
9	240	22.86	1.233	-95.48	-17305
10	270	25.72	0.896	-137.50	-10181
11	300	28.58	0.483	-142.67	7901
12	330	31.43	0.136	-91.47	26898
13	360	34.29	0.000	0.00	34655

FIGURA 7.28 Datos de aceleración del problema de ejemplo 7.13.

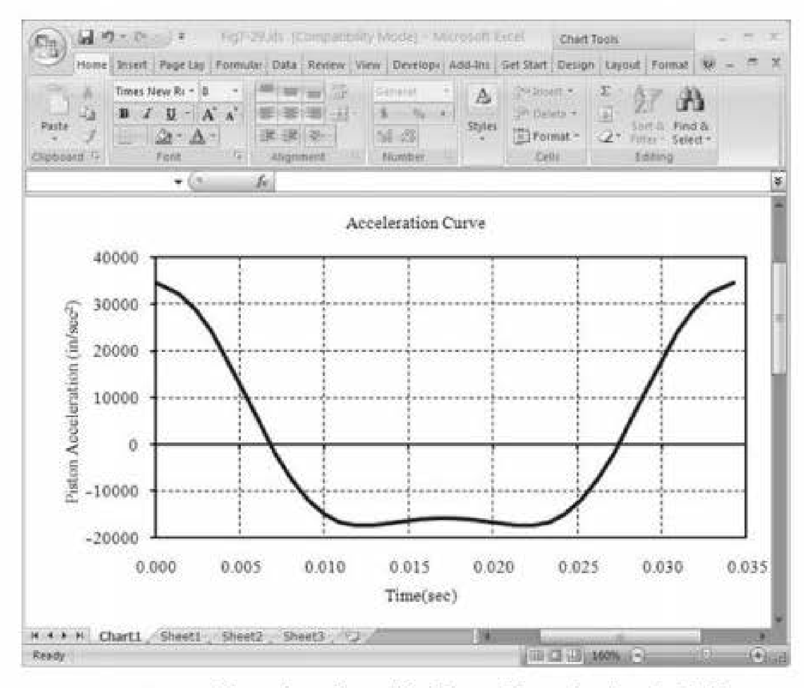


FIGURA 7.29 Curva de aceleración del problema de ejemplo 7.13.

PROBLEMAS

Las técnicas manuales de dibujo son muy didácticas en los problemas donde se requieren soluciones gráficas; no obstante, se recomienda ampliamente el uso de un sistema de CAD.

Aceleración en general

7–1. Cuando se activa una banda transportadora, hay algunas cajas encima de ella que se mueven hacia la derecha. La banda alcanza una velocidad total de 45 fpm (ft/min) en 0.5 s. Determine la aceleración lineal de las cajas, suponiendo que la aceleración es constante. Determine también el desplazamiento lineal de las cajas durante este periodo de aceleración.

7–2. Un vehículo de alto rendimiento va de 0 a 60 (mph) en un tiempo de 8.3 s. Determine la aceleración lineal del vehículo y la distancia recorrida para alcanzar 60 mph.

7–3. Un elevador se mueve hacia arriba a una velocidad de 12 ft/s. Determine la distancia requerida para detenerlo, si la desaceleración constante no excede los 10 ft/s^2.

7–4. El punto *A* se encuentra sobre una corredera que acelera uniformemente hacia arriba a lo largo de una trayectoria recta vertical. La corredera tiene una velocidad de 100 mm/s cuando pasa por un punto, y de 300 mm/s cuando pasa por un segundo punto, 0.2 s más tarde. Determine la aceleración lineal y el desplazamiento lineal del punto *A* durante este intervalo de tiempo.

7–5. Se usa un actuador lineal para empujar una carga hacia la izquierda. Partiendo del reposo, se requieren 1.5 s para alcanzar una velocidad total de 0.75 m/s. Determine la aceleración lineal de la carga. Calcule asimismo el desplazamiento lineal de la carga durante esta fase de aceleración del movimiento.

7–6. Partiendo del reposo, una leva acelera uniformemente hasta 750 rpm en 8 s en sentido horario. Determine la aceleración angular de la leva.

7–7. El rotor de un motor de reacción gira en sentido horario y se estabiliza en 10000 rpm. Cuando se corta el suministro de combustible, el motor disminuye la velocidad hasta detenerse en 2 min. Suponiendo que la velocidad se reduce uniformemente, determine la aceleración angular del motor. Calcule asimismo el desplazamiento angular del rotor durante este periodo de apagado.

7–8. La velocidad angular de un eje se incrementa con aceleración constante de 1000 a 2500 rpm en 20 s en sentido horario. Determine la aceleración angular del eje.

7–9. Una rueda gira 400 revoluciones en sentido antihorario mientras desacelera de 1100 a 800 rpm. Determine la aceleración angular de la rueda.

Perfiles de velocidad

7–10. Un actuador servoimpulsado está programado para extenderse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P7.10. Determine la aceleración máxima, la desaceleración máxima y el desplazamiento lineal durante ese movimiento programado.

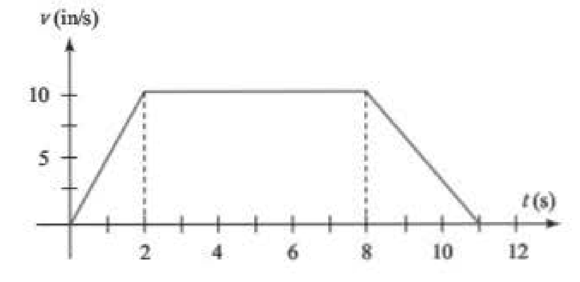


FIGURA P7.10 Problemas 10 y 11.

7–11. Un actuador servoimpulsado está programado para extenderse de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P7.10. Use una hoja de cálculo para generar las gráficas de desplazamiento contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo, durante este movimiento programado.

7–12. Un motor lineal está programado para moverse hacia la derecha de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P7.12. Determine la aceleración máxima, la desaceleración máxima y el desplazamiento lineal durante este movimiento programado.

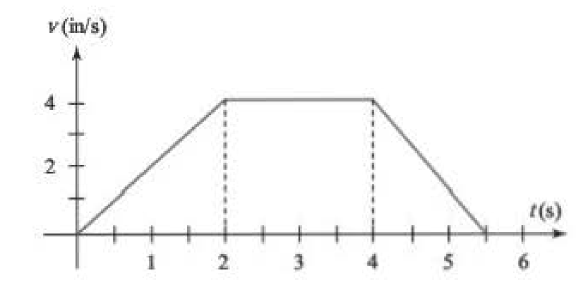


FIGURA P7.12 Problemas 12 y 13.

7–13. Un motor lineal está programado para moverse hacia la derecha de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la figura P7.12. Use una hoja de cálculo para generar las gráficas de desplazamiento contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo durante este movimiento programado.

7–14. Un actuador lineal está programado para moverse 10 in. La velocidad máxima es de 4 in/s, y la aceleración y la desaceleración constantes están limitadas a 6 in/s^2. Use una hoja de cálculo para generar las gráficas de desplazamiento contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo durante este movimiento programado.

7–15. Un actuador lineal está programado para moverse 75 mm. La velocidad máxima es de 50 mm/s, y la aceleración y la desaceleración constantes están limitadas a 100 mm/s^2. Use una hoja de cálculo para generar las gráficas de desplazamiento contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo durante este movimiento programado.

Aceleración normal y tangencial

7–16. En la figura P7.16 se muestra el eslabón 2 que se aisló de un diagrama cinemático y gira a una velocidad constante de 300 rpm en sentido antihorario. Determine la

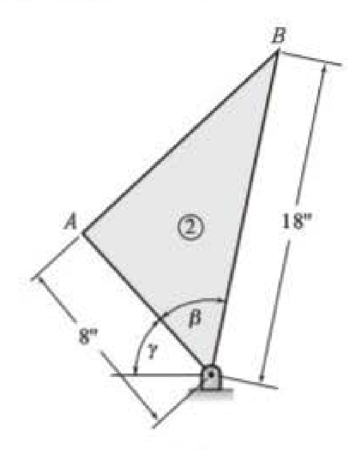


FIGURA P7.16 Problemas 16, 17 y 18.

aceleración lineal total de los puntos A y B. Use $\gamma = 50°$ y $\beta = 60°$.

7–17. En la figura P7.16 se presenta el eslabón 2 que se aisló de un diagrama cinemático. El eslabón gira a una velocidad de 200 rpm en sentido antihorario, y acelera a 400 rad/s^2. Determine la aceleración lineal total de los puntos A y B. Utilice $\gamma = 50°$ y $\beta = 60°$.

7–18. En la figura P7.16 se presenta el eslabón 2 que se aisló de un diagrama cinemático. El eslabón gira a una velocidad de 300 rpm en sentido antihorario y desacelera a 800 rad/s^2. Determine la aceleración lineal total de los puntos A y B. Utilice $\gamma = 50°$ y $\beta = 60°$.

La figura P7.19 ilustra un embrague centrífugo que acopla dos ejes a una velocidad angular crítica.

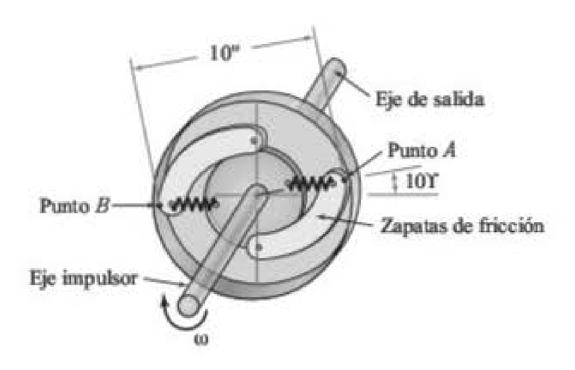


FIGURA P7.19 Problemas 19, 20 y 21.

7–19. Determine la aceleración total del punto A sobre la zapata del embrague centrífugo mostrado en la figura P7.19. En el instante mostrado, el eje impulsor gira a 300 rpm constantes en sentido horario.

7–20. Determine la aceleración total del punto A sobre la zapata del embrague centrífugo mostrado en la figura P7.19. En el instante mostrado, el eje impulsor gira a 300 rpm en sentido horario y acelera a 300 rad/s^2.

7–21. Determine la aceleración total del punto A sobre la zapata del embrague centrífugo mostrado en la figura P7.19. En el instante mostrado, el eje impulsor gira a 300 rpm en sentido horario y desacelera a 300 rad/s^2.

Aceleración relativa

7–22. En el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.22, la longitud del eslabón AB es de 100 mm y $\theta = 35°$. El bloque A se mueve hacia arriba a una velocidad de 10 mm/s y acelera a 5 mm/s^2. Al mismo tiempo, la velocidad del bloque B es de 7 mm/s y acelera a 25 mm/s^2. Determine gráficamente la velocidad lineal de A con respecto a B y la aceleración lineal de A con respecto a B.

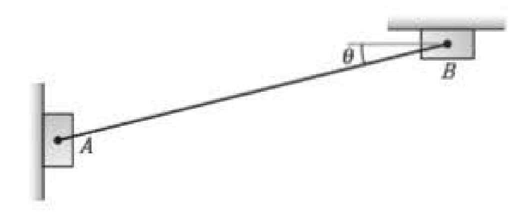


FIGURA P7.22 Problemas 22 y 23.

7–23. En el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.22, la longitud del eslabón AB es de 15 in y $\theta = 40°$. El bloque A se mueve hacia arriba a una velocidad de 50 in/s y desacelera a 125 in/s^2. Al mismo tiempo, la velocidad del bloque B es de 42 in/s y acelera a 48.6 in/s^2. Determine analíticamente la velocidad lineal de A con respecto a B y la aceleración lineal de A con respecto a B.

7–24. En la figura P7.24 se ilustra un dispositivo para abrir ventanas que se encuentra comúnmente en sitios elevados de gimnasios y fábricas. En el instante en que $\theta = 25°$, la tuerca impulsora se mueve a la derecha a una velocidad de 1 ft/s y acelera a 1 ft/s^2. Al mismo tiempo, la velocidad de la zapata es de 0.47 ft/s, y acelera a una velocidad de 0.91 ft/s^2. Determine gráficamente la velocidad lineal de C con respecto a B y la aceleración lineal de C con respecto a B.

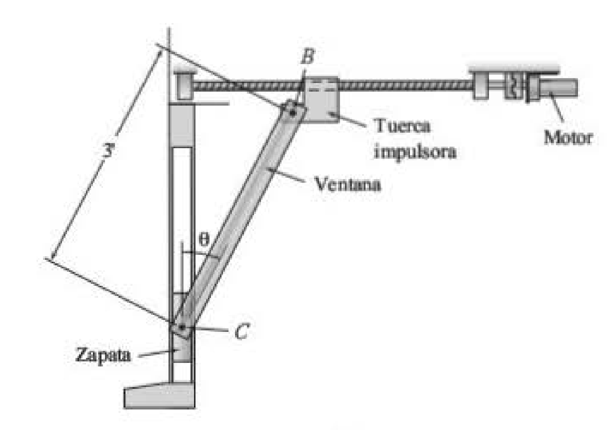


FIGURA P7.24 Problemas 24 y 25.

7–25. En la figura P7.24 se muestra un dispositivo para abrir ventanas. En el instante en que $\theta = 55°$, la tuerca impulsora se mueve a la derecha a una velocidad de 2 ft/s y acelera a 1 ft/s^2. Al mismo tiempo, la velocidad de la

zapata es de 2.85 ft/s, y acelera a 8.51 ft/s^2. Determine gráficamente la velocidad lineal de C con respecto a B y la aceleración lineal de C con respecto a B.

Método de aclaración relativa: gráfico

7–26. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26, utilice el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal del pistón conforme la manivela gira a una velocidad constante de 1150 rpm en sentido horario.

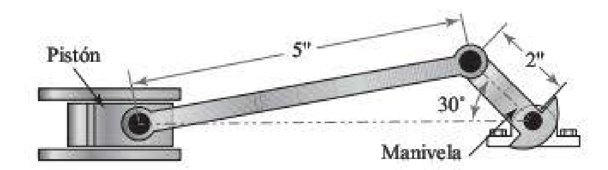


FIGURA P7.26 Problemas 26, 27, 28, 44, 75, 81 y 87.

7–27. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26, en el instante mostrado, la manivela gira a 2000 rpm en sentido antihorario y acelera a 10000 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal del pistón.

7–28. Para el mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26, en el instante mostrado, la manivela gira a 1500 rpm en sentido horario y desacelera a 12000 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal del pistón.

7–29. Para el mecanismo de la máquina de coser mostrado en la figura P7.29, en el instante en que $\theta = 30°$, la rueda impulsora gira a 200 rpm constantes en sentido antihorario. Use el método de la aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la aguja.

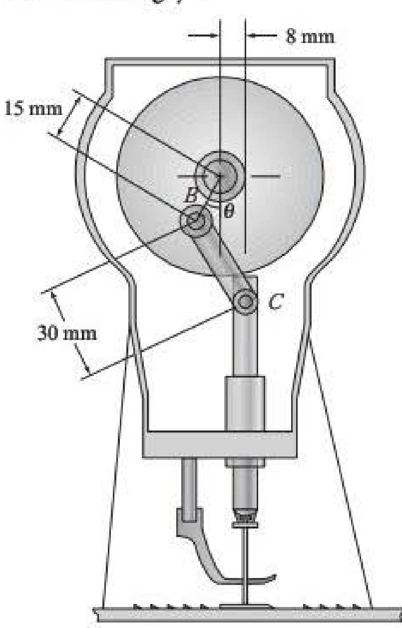


FIGURA P7.29 Problemas 29, 30, 31, 45, 76, 82 y 88.

7–30. Para el mecanismo de la máquina de coser mostrado en la figura P7.29, en el instante en que $\theta = 30°$, la rueda impulsora gira a 300 rpm en sentido horario y acelera a 800 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la aguja.

7–31. Para el mecanismo de la máquina de coser mostrado en la figura P7.29, en el instante en que $\theta = 120°$, la rueda impulsora gira a 200 rpm en sentido horario y desacelera a 400 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la aguja.

7–32. En la sierra de potencia para metales de la figura P7.32, en el instante mostrado, la manivela de 1.75 in gira a 800 rpm constantes en sentido horario. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

7–33. En la sierra de potencia para metales de la figura P7.32, en el instante mostrado, la manivela de 1.75 in gira a 60 rpm en sentido horario y acelera a 40 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

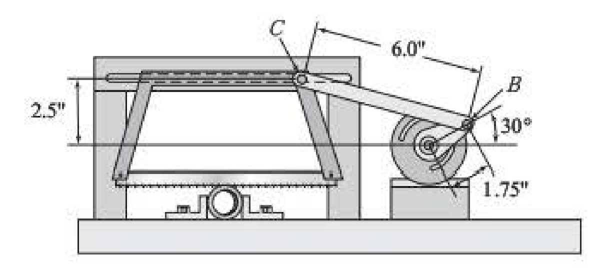


FIGURA P7.32 Problemas 32, 33, 34, 46, 77, 83 y 89.

7–34. En la sierra de potencia para metales de la figura P7.32, en el instante mostrado, la manivela de 1.75 in gira a 70 rpm en sentido horario y desacelera a 45 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

7–35. El motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 gira a una velocidad constante de 90 rpm en sentido

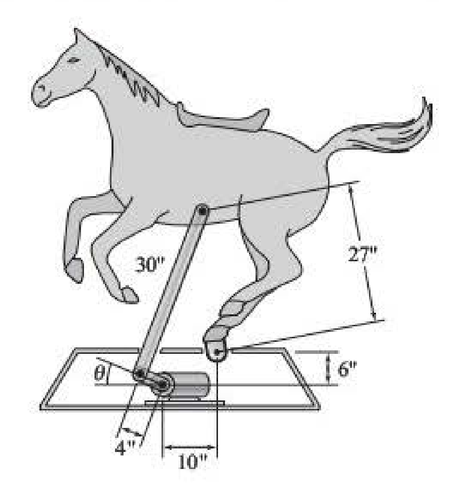


FIGURA P7.35 Problemas 35, 36, 37, 47, 78, 84 y 90.

horario. En el instante en que $\theta = 30°$, use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del caballo.

7–36. En el instante en que $\theta = 45°$, el motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 gira a 60 rpm en sentido horario y acelera a 30 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del caballo.

7–37. En el instante en que $\theta = 120°$, el motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 gira a 40 rpm en sentido horario y desacelera a 20 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del caballo.

7–38. El motor del rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 gira a una velocidad constante de 120 rpm en sentido antihorario. Use el método de aceleración relativa, en el momento en que $\theta = 40°$, para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del brazo de la boquilla.

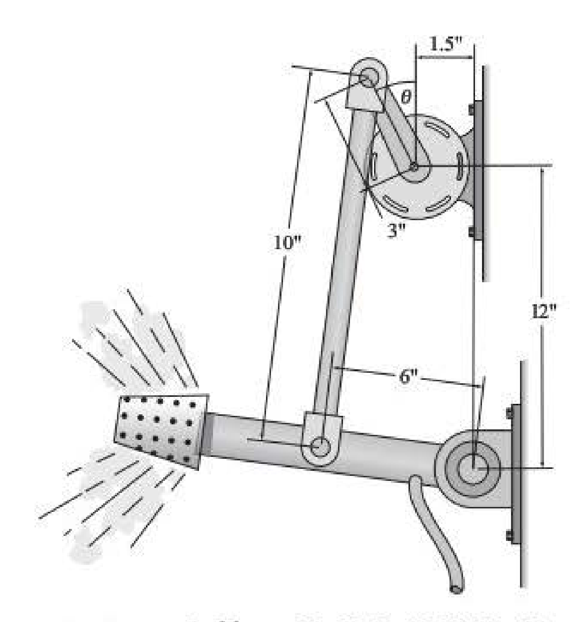


FIGURA P7.38 Problemas 38, 39, 40, 48, 79, 85 y 91.

7–39. En el momento en que $\theta = 90°$, el motor del rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 gira a una velocidad de 150 rpm en sentido antihorario y acelera a 200 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del brazo de la boquilla.

7–40. En el momento en que $\theta = 120°$, el motor del rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 gira a una velocidad de 100 rpm en sentido antihorario y desacelera a 100 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular del brazo de la boquilla.

7–41. La manivela de 12 in sobre el engrane impulsor del tren de aterrizaje de un avión pequeño, mostrado en la figura P7.41, gira a una velocidad constante de 20 rpm en sentido antihorario. En el instante mostrado, use el método de la aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda del ensamble.

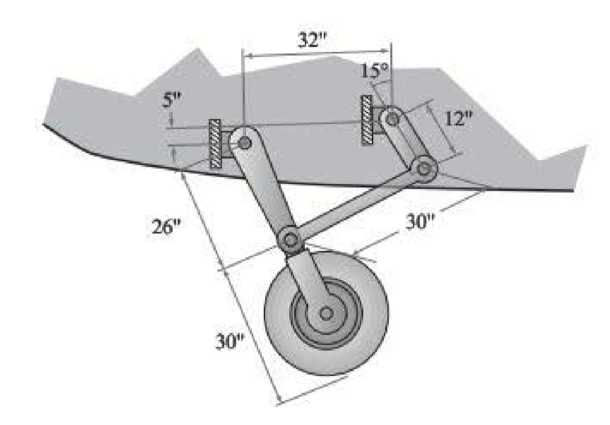


FIGURA P7.41 Problemas 41, 42, 43, 49, 80, 86 y 92.

7–42. En el instante mostrado, la manivela de 12 in sobre el engrane impulsor del tren de aterrizaje de un avión pequeño, mostrado en la figura P7.41, gira a 15 rpm en sentido antihorario y acelera a 4 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda del ensamble.

7–43. En el instante mostrado, la manivela de 12 in sobre el engrane impulsor del tren de aterrizaje de un avión pequeño, mostrado en la figura P7.41, gira a 18 rpm en sentido antihorario y desacelera a 3.5 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar gráficamente la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda del ensamble.

Método analítico de la aceleración relativa

7–44. En el mecanismo compresor de la figura P7.26, en el instante mostrado, la manivela gira a 1800 rpm en sentido horario y acelera a 12000 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad lineal y la aceleración lineal del pistón.

7–45. Para el mecanismo de la máquina de coser de la figura P7.29, en el instante en que $\theta = 30°$, la rueda impulsora gira a 250 rpm en sentido horario y acelera a 6000 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la aguja.

7–46. Para la sierra de potencia para metales de la figura P7.32, en el instante mostrado, la manivela de 1.75 in gira a 55 rpm en sentido horario y desacelera a 35 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad lineal y la aceleración lineal de la sierra.

7–47. En el instante en que $\theta = 45°$, el motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 gira a 45 rpm en sentido horario y acelera a 25 rad/s^2. Use el método de la aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad angular y la aceleración angular del caballo.

7–48. En el momento en que $\theta = 90°$, el motor del rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 gira a 130 rpm en sentido antihorario y desacelera a 180 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad angular y la aceleración angular del brazo de la boquilla.

7–49. En el instante mostrado, la manivela de 12 in sobre el engrane impulsor del tren de aterrizaje del avión pequeño mostrado en la figura P7.41 gira a 12 rpm en sentido antihorario y acelera a 3 rad/s^2. Use el método de aceleración relativa para determinar analíticamente la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda del ensamble.

Aceleración de puntos sobre un eslabón flotante: método gráfico

7–50. El eslabón de 3.25 in del mecanismo de la troqueladora de la figura P7.50 gira a una velocidad constante de 20 rpm en sentido horario. En el momento en que $\theta = 60°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X sobre la troqueladora.

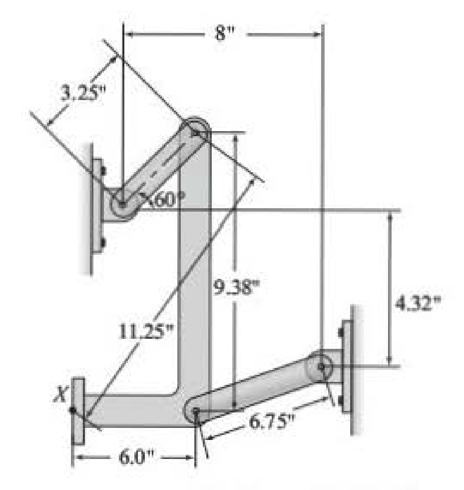


FIGURA P7.50 Problemas 50 a 53, 58.

7–51. El eslabón de 3.25 in del mecanismo de la troqueladora de la figura P7.50 gira a una velocidad constante de 20 rpm en sentido horario. En el momento en que $\theta = 120°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X sobre la troqueladora.

7–52. El eslabón de 3.25 in del mecanismo de la troqueladora de la figura P7.50 gira a 30 rpm en sentido horario y acelera a 6 rad/s^2. En el momento en que $\theta = 90°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X sobre la troqueladora.

7–53. El eslabón de 3.25 in del mecanismo de la troqueladora de la figura P7.50 gira a 30 rpm en sentido horario y desacelera a 6 rad/s^2. En el momento en que $\theta = 90°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X sobre la troqueladora.

7–54. El eslabón de 0.5 m del mecanismo levadizo de la figura P7.54 gira a una velocidad constante de 12 rpm en sentido antihorario. En el instante en que $\theta = 20°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X.

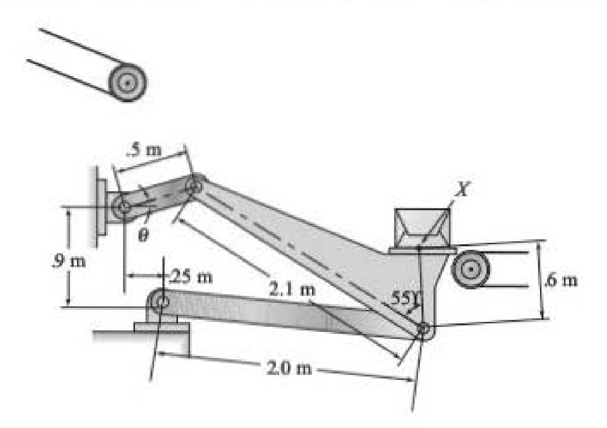


FIGURA P7.54 Problemas 54 a 57, 59.

7–55. El eslabón de 0.5 m del mecanismo levadizo de la figura P7.54 gira a una velocidad constante de 20 rpm en sentido horario. En el instante en que $\theta = 30°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X.

7–56. El eslabón de 0.5 m del mecanismo levadizo de la figura P7.54 gira a 30 rpm en sentido horario y acelera a 5 rad/s^2. En el instante en que $\theta = 20°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X.

7–57. El eslabón de 0.5 m del mecanismo levadizo de la figura P7.54 gira a 18 rpm en sentido antihorario y desacelera a 5 rad/s^2. En el instante en que $\theta = 0°$, determine gráficamente la aceleración lineal del punto X.

Aceleración de puntos sobre un eslabón flotante: método analítico

7–58. El eslabón de 3.25 in del mecanismo de la troqueladora de la figura P7.50 gira a una velocidad constante de 20 rpm en sentido horario. En el momento en que $\theta = 60°$, determine analíticamente la aceleración lineal del punto X sobre la troqueladora.

7–59. El eslabón de 0.5 m del mecanismo levadizo de la figura P7.54 gira a una velocidad constante de 12 rpm en sentido antihorario. En el instante en que $\theta = 20°$, determine analíticamente la aceleración lineal del punto X.

Aceleración de Coriolis

7–60. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.60, en el instante en que $\theta = 60°$, la velocidad angular del eslabón 2 es de 30 rad/s en sentido horario. La corredera 3 también se mueve hacia afuera sobre el eslabón 2 a una velocidad de 15 mm/s. Determine la aceleración de Coriolis del punto B sobre el eslabón 3 relativa con el eslabón 2.

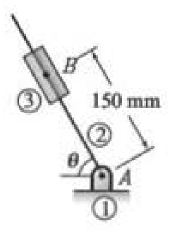


FIGURA P7.60 Problemas 60 a 62.

7–61. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.60, en el instante en que $\theta = 45°$, la velocidad angular del eslabón 2 es de 30 rad/s en sentido antihorario. La corredera 3 también se mueve hacia afuera sobre el eslabón 2 a una velocidad de 15 mm/s. Determine la aceleración de Coriolis del punto *B* sobre el eslabón 3 relativa con el eslabón 2.

7–62. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.60, en el instante en que $\theta = 30°$, la velocidad angular del eslabón 2 es de 30 rad/s en sentido horario. La corredera 3 también se mueve hacia adentro sobre el eslabón 2 a una velocidad de 15 mm/s. Determine la aceleración de Coriolis del punto *B* sobre el eslabón 3 relativa con el eslabón 2.

Mecanismo con aceleración de Coriolis: método gráfico

7–63. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.63, la velocidad angular del eslabón 2 es de 20 rad/s en sentido antihorario. Determine gráficamente la velocidad angular del eslabón 4, la velocidad de deslizamiento del eslabón 3 sobre el eslabón 4 y la aceleración angular del eslabón 4.

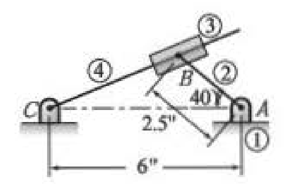


FIGURA P7.63 Problemas 63, 64 y 71.

7–64. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.63, la velocidad angular del eslabón 2 es de 20 rad/s en sentido antihorario, y acelera a 5 rad/s². Determine gráficamente la velocidad angular del eslabón 4, la velocidad de deslizamiento del eslabón 3 sobre el eslabón 4 y la aceleración angular del eslabón 4.

7–65. La figura P7.65 ilustra el mecanismo impulsor de una sierra caladora. En el instante mostrado, la manivela gira a una velocidad constante de 300 rpm en sentido horario. Determine gráficamente la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

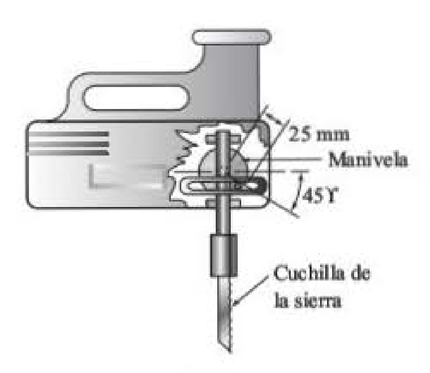


FIGURA P7.65 Problemas 65, 66 y 72.

7–66. En el mecanismo de la sierra caladora de la figura P7.65, la manivela gira a una velocidad de 200 rpm en sentido horario y acelera a una tasa de 45 rad/s². Determine gráficamente la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

7–67. La figura P7.67 presenta el mecanismo de una bomba para bicicleta. En el instante mostrado, el cilindro se retrae a una velocidad constante de 2 in/s. Determine gráficamente la aceleración angular del ensamble del pedal y la aceleración lineal del punto *X*.

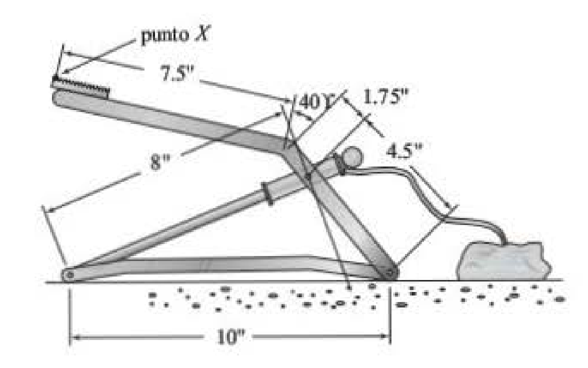


FIGURA P7.67 Problemas 67, 68 y 73.

7–68. En la bomba para bicicleta de la figura P7.67, el cilindro se retrae a una velocidad de 2 in/s y acelera a 3 in/s². Determine gráficamente la aceleración angular del ensamble del pedal y la aceleración lineal del punto *X*.

7–69. La figura P7.69 presenta el mecanismo del timón usado en la conducción de embarcaciones. En el instante mostrado, el impulsor se está extendiendo a una velocidad constante de 0.1 m/s. Determine gráficamente la velocidad y la aceleración angulares del ensamble del timón.

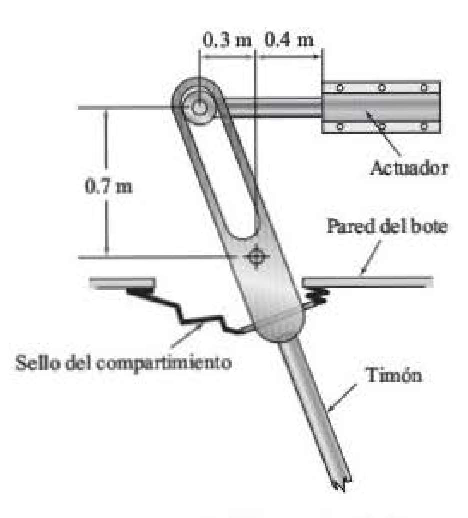


FIGURA P7.69 Problemas 69, 70 y 74.

7–70. En el mecanismo del timón de la figura P7.69, el impulsor se está extendiendo a una velocidad de 0.1 m/s y desacelera a una velocidad de 0.3 m/s². Determine gráficamente la velocidad y la aceleración angulares del ensamble del timón.

Mecanismo con aceleración de Coriolis: método analítico

7–71. Para el diagrama cinemático mostrado en la figura P7.63, la velocidad angular del eslabón 2 es de 20 rad/s en sentido antihorario. Determine analíticamente la velocidad angular del eslabón 4, la velocidad de deslizamiento del eslabón 3 sobre el eslabón 4, y la aceleración angular del eslabón 4.

7–72. La figura P7.65 muestra el mecanismo impulsor de una sierra caladora. En el instante mostrado, la manivela gira a una velocidad constante de 300 rpm en sentido horario. Determine analíticamente la aceleración lineal de la cuchilla de la sierra.

7–73. La figura P7.67 muestra el mecanismo de una bomba para bicicleta. En el instante mostrado, el cilindro se retrae a una velocidad constante de 2 in/s. Determine analíticamente la aceleración angular del ensamble del pedal y la aceleración lineal del punto *X*.

7–74. La figura P7.69 presenta el mecanismo del timón usado en la conducción de embarcaciones. En el instante mostrado, el impulsor se extiende a una velocidad constante de 0.1 m/s. Determine analíticamente la velocidad y la aceleración angulares del ensamble del timón.

Curvas de aceleración: método gráfico

7–75. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26 es impulsada a una velocidad constante de 1750 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente una curva de desplazamiento lineal del pistón en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad y de aceleración del pistón en función del tiempo.

7–76. La manivela del mecanismo de la máquina de coser mostrada en la figura P7.29 es impulsada a una velocidad constante de 175 rpm en sentido antihorario. Elabore gráficamente la curva de desplazamiento lineal de la aguja en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad y de aceleración de la aguja en función del tiempo.

7–77. La manivela de la sierra de potencia para metales mostrada en la figura P7.32 es impulsada a una velocidad constante de 90 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva de desplazamiento lineal de la sierra en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad y de aceleración de la sierra en función del tiempo.

7–78. El motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 es impulsado a una velocidad constante de 70 rpm en sentido horario. Elabore gráficamente la curva de desplazamiento angular del caballo en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular del caballo en función del tiempo.

7–79. El motor del mecanismo rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 es impulsado a una velocidad constante de 100 rpm en sentido antihorario. Elabore gráficamente la curva de desplazamiento angular del brazo de la boquilla en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular del brazo de la boquilla en función del tiempo.

7–80. La manivela sobre el engrane del mecanismo del tren de aterrizaje mostrado en la figura P7.41 es impulsada a una velocidad constante de 18 rpm en sentido antihorario. Elabore gráficamente la curva de desplazamiento angular del ensamble de la rueda en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, calcule gráficamente la pendiente para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular de la rueda del ensamble en función del tiempo.

Curvas de aceleración: método analítico

7–81. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26 es impulsada a una velocidad constante de 1450 rpm en sentido horario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva de desplazamiento lineal del pistón en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el ángulo de la manivela. Luego, use diferenciales numéricas para obtener las curvas de velocidad y de aceleración del pistón en función del tiempo.

7–82. La manivela del mecanismo de la máquina de coser mostrado en la figura P7.29 es impulsada a una velocidad constante de 160 rpm en sentido antihorario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva de desplazamiento lineal de la aguja en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, use diferenciales numéricas para obtener las curvas de velocidad y de aceleración de la aguja en función del tiempo.

7–83. La manivela de la sierra de poder para metales mostrada en la figura P7.32 es impulsada a una velocidad constante de 85 rpm en sentido horario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva de desplazamiento lineal de la cuchilla de la sierra en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, use diferenciales numéricas para obtener las curvas de velocidad y de aceleración de la cuchilla de la sierra en función del tiempo.

7–84. El motor del caballo tragamonedas mostrado en la figura P7.35 es impulsado a una velocidad constante de 80 rpm en sentido horario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva de desplazamiento angular del caballo en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, use diferenciales numéricas para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular del caballo en función del tiempo.

7–85. El motor del mecanismo rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 es impulsado a una velocidad constante de 110 rpm en sentido antihorario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva

de desplazamiento angular de la boquilla en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, use diferenciación numérica para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular de la boquilla en función del tiempo.

7–86. La manivela sobre el engrane del mecanismo del tren de aterrizaje mostrado en la figura P7.41 es impulsada a una velocidad constante de 16 rpm en sentido antihorario. Use una hoja de cálculo para obtener analíticamente la curva de desplazamiento angular del ensamble de la rueda en función del ángulo de la manivela. Convierta a tiempo el eje del ángulo de la manivela. Luego, use diferenciación numérica para obtener las curvas de velocidad angular y de aceleración angular del ensamble de la rueda en función del tiempo.

Aceleración usando Working Model

7–87. La manivela del mecanismo compresor mostrado en la figura P7.26 es impulsada a una velocidad constante de 1750 rpm en sentido horario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración lineal del pistón en función del tiempo.

7–88. La manivela del mecanismo de la máquina de coser mostrada en la figura P7.29 es impulsada a una velocidad constante de 175 rpm en sentido antihorario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración lineal de la aguja en función del tiempo.

7–89. La manivela de la sierra de potencia para metales mostrada en la figura P7.32 es impulsada a una velocidad constante de 90 rpm en sentido horario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración lineal de la cuchilla de la sierra en función del tiempo.

7–90. El motor del caballo tragamonedas de la figura P7.35 es impulsado a una velocidad constante de 70 rpm en sentido horario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración angular del caballo en función del tiempo.

7–91. El motor del mecanismo rociador para lavar automóviles de la figura P7.38 es impulsado a una velocidad constante de 100 rpm en sentido antihorario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración angular del brazo de la boquilla en función del tiempo.

7–92. La manivela sobre el engrane del mecanismo del tren de aterrizaje mostrado en la figura P7.41 es impulsada a una velocidad constante de 18 rpm en sentido antihorario. Use el software Working Model para crear una simulación y graficar la curva de aceleración angular de la rueda del ensamble en función del tiempo.

ESTUDIOS DE CASO

7–1. La figura E7.1 muestra una máquina especializada impulsada por cigüeñal *I*. La saliente superior *H* de la máquina impulsa otro mecanismo, el cual no se muestra. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las preguntas siguientes para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.

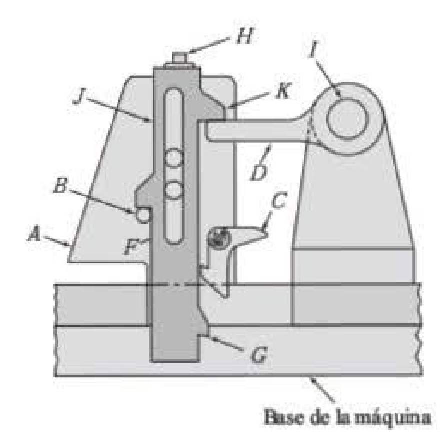


FIGURA E7.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme el cigüeñal *I* gira 30° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento de la corredera *J*?
2. Conforme el cigüeñal *I* gira unos cuantos grados más en sentido horario, ¿qué sucede con el mecanismo?
3. ¿Para qué sirve la parte *C*?
4. Conforme el cigüeñal *I* continúa girando, describa el movimiento de la corredera.
5. ¿Para qué sirve la parte *B*?
6. Describa el objetivo de este mecanismo.

7–2. La figura E7.2 presenta una máquina que alimenta remaches a una máquina ensambladora automatizada. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las preguntas siguientes para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.

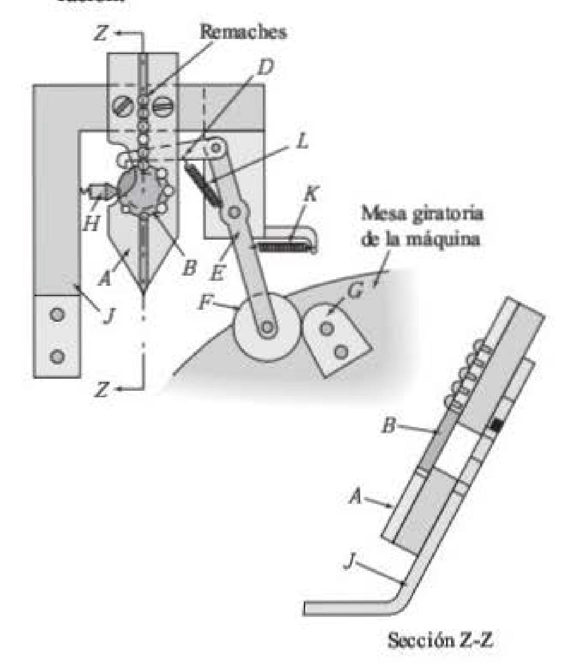


FIGURA E7.2 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme la mesa giratoria de la máquina gira en sentido antihorario, ¿qué sucede con la palanca *E*?
2. ¿Para qué sirve el resorte *K*?

3. Conforme gira la mesa rotatoria, ¿cuál es el movimiento de la parte *D*?
4. ¿Para qué sirve el resorte *L*?
5. ¿Cuál es el nombre general del tipo de unión entre las partes *B* y *D*? Describa los detalles de su función.
6. ¿Cuál es el objetivo de las componentes de la parte *H*?
7. Describa el movimiento y las acciones que ocurren durante la operación de esta máquina.

7–3. La figura E7.3 ilustra una máquina especializada que acepta cajas enrolladas parcialmente desde la ranura *B*. La máquina pliega los desenrolladores superior e inferior, y mueve la caja hacia otra operación. En la posición que se ilustra, se muestra una caja en *A* que está saliendo de la máquina. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.

1. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento de la palanca acodada *H*?
2. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento del alimentador *E* y de la placa *C*?
3. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento del perno *S*? (Observe que el perno *S* está sujeto a la corredera *D* y no está restringido a moverse en la ranura).
4. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento del perno guía *R*? (Observe que el perno *R* está limitado a moverse en la ranura).

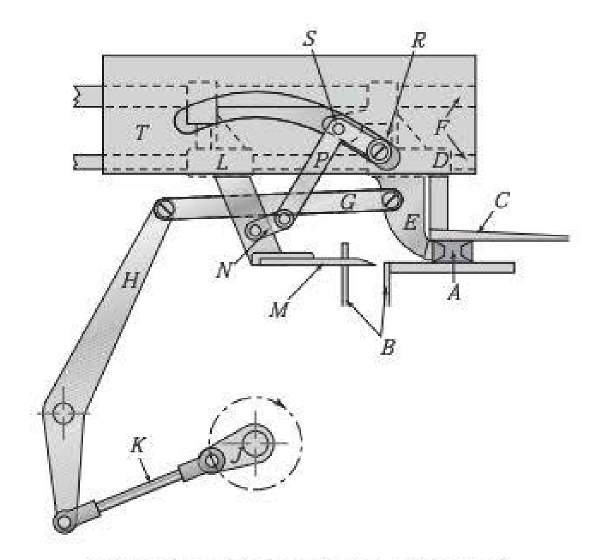


FIGURA E7.3 (Cortesía de Industrial Press).

5. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento de la palanca acodada *P*?
6. Conforme el eslabón *J* gira 90° en sentido horario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento de la corredera *L* y de la placa *M*?
7. ¿Por qué es necesario el eslabón corto *N*? ¿Puede el eslabón *P* conectarse directamente a la corredera *L*?
8. Comente algo acerca del espaciamiento relativo entre las placas *C* y *M* después de que el eslabón *J* gira 90° en sentido horario.
9. Comente algo acerca del movimiento continuo de las placas *C* y *M* a lo largo del alimentador *E*.

ANÁLISIS DE MECANISMOS ASISTIDO POR COMPUTADORA

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Entender los fundamentos de una hoja de cálculo en general.**
2. **Comprender la estrategia para usar una hoja de cálculo en general en el análisis de mecanismos.**
3. **Crear rutinas de cómputo para determinar las propiedades cinemáticas de mecanismos de cuatro barras o de manivela-corredera.**

8.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del libro, se han presentado técnicas tanto gráficas como analíticas para el análisis de mecanismos. Como son más precisas, es mejor utilizar soluciones analíticas para diversas posiciones de un mecanismo, aunque el número de cálculos se podría volver difícil de manejar. En tales situaciones, lo más adecuado son las soluciones por computadora, las cuales también son valiosas cuando se deben analizar varias iteraciones del diseño. En la sección 2.2, "Simulación por computadora de mecanismos", se mencionaron sistemas de software dedicado al análisis dinámico. Este capítulo se centra en otros métodos por computadora para el análisis de mecanismos. Dichos métodos incluyen el uso de hojas de cálculo y la creación de rutinas con el uso de lenguajes de programación.

8.2 HOJAS DE CÁLCULO

Las hojas de cálculo, como Excel de Microsoft®, son muy populares en el ambiente profesional para una multitud de tareas. Las hojas de cálculo tienen muchas funciones numéricas integradas, facilidad para graficar los resultados y capacidad para reconocer fórmulas. Son características analíticas que favorecieron el uso generalizado de las hojas de cálculo para resolver los problemas de mecanismos más rutinarios. Se han utilizado hojas de cálculo en varias de las soluciones de los problemas de este texto. Esta sección describe los fundamentos en el uso de hojas de cálculo. Desde luego, se recomienda consultar los manuales del software específico para mayores detalles.

Una hoja de cálculo está configurada como una matriz grande de filas y columnas. El número de filas y columnas varía entre los diferentes productos de software. Los encabezados de las columnas se identifican con caracteres alfabéticos de la A a la Z, luego de la AA a la AZ, luego de la BA a la BZ, y así sucesivamente. Las filas se identifican numerándolas como 1, 2, 3,

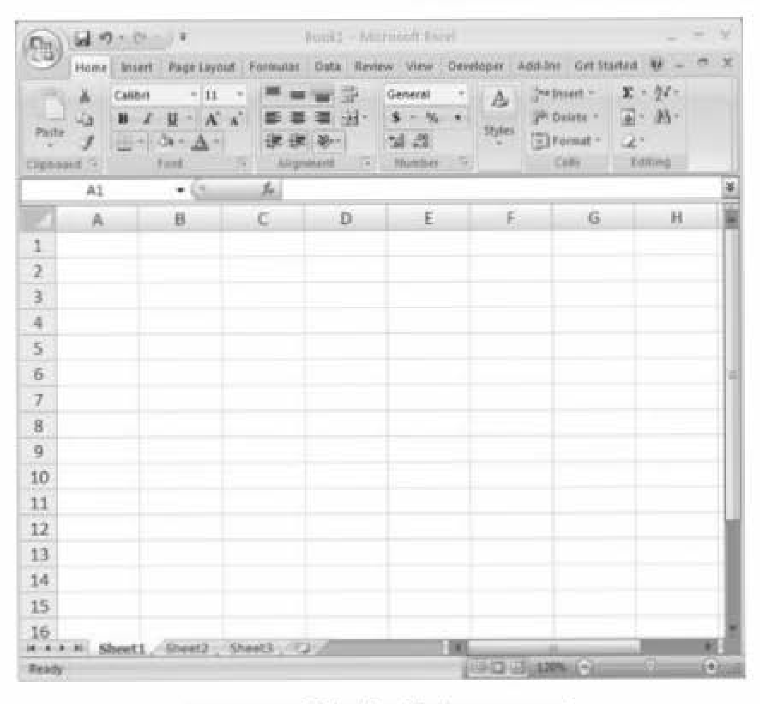


FIGURA 8.1 Hoja de cálculo en general.

etcétera. En la figura 8.1 se muestra la esquina superior de una hoja de cálculo en general. La intersección de una columna con una fila se conoce como celda. Cada celda se identifica con una dirección, que se compone con la columna y la fila que la definen. La celda D3 está definida por la cuarta columna (D) y la tercera fila. El cursor se mueve a través de las celdas con el teclado (teclas de flechas) o con el ratón.

El valor de una hoja de cálculo radica en el almacenamiento, la manipulación y el desplegado de los datos contenidos en una celda. Los datos generalmente son texto, números o fórmulas. La hoja de cálculo que se muestra en la figura 8.2 tiene texto en las celdas A1, F1 y F2, así como números en las celdas A2 a A24, G1 y G2.

Aunque quizás haya diferencias sutiles en la sintaxis entre los programas de hoja de cálculo, la lógica subyacente para crear las fórmulas es idéntica. La sintaxis que aquí se proporciona corresponde a Excel de Microsoft. Se recomienda consultar el manual del usuario de algún otro producto para conocer las diferencias en la sintaxis.

La introducción de una fórmula en una celda inicia con el signo igual (=). Luego, se construye la fórmula con el uso de valores, operadores (+, –, *, /), referencias a celdas (p. ej. G2) y funciones (p. ej. SENO, PROMEDIO, ATAN y RADIANES). Las fórmulas del análisis cinemático suelen ser bastantes complejas. Como un ejemplo, se coloca una fórmula simple en la celda A8:

= A7 + 10 **(8.1)**

Aun cuando la celda contendría esta fórmula, mostraría visualmente el número 60 en la celda A8. El cálculo se realiza en forma automática. Como otro ejemplo, se inserta la siguiente expresión en la celda B2:

= ASENO(G1 * SENO(A2 * PI()/180)/G2) * 180/PI() **(8.2)**

La expresión representa el ángulo entre la biela y el plano de deslizamiento de un mecanismo de manivela-corredera en línea que se mostró como la ecuación (4.3) en el capítulo 4:

$$\theta_3 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{L_2}{L_3} \operatorname{sen}\theta_2 \right) \qquad \textbf{(4.3)}$$

La fórmula en la hoja de cálculo supone que se introdujeron los siguientes valores:

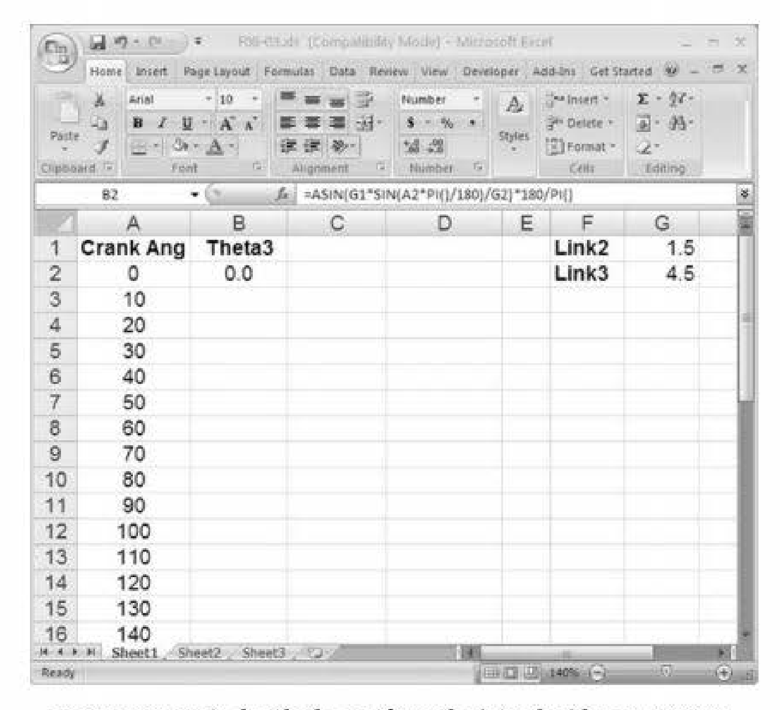
- θ_2 en la celda A2
- L_2 en la celda G1
- L_3 en la celda G2

Se debería observar que, como en la mayoría de las funciones de computadora, cualquier referencia a valores angulares se tiene que especificar en radianes. Observe que A2, un ángulo expresado en grados, se multiplica por $\pi/180$ para convertirlo en radianes. Después de usar la función inversa del seno, ASENO, el valor resultante también es un ángulo en radianes. Por lo tanto, se debe convertir de nuevo a grados multiplicándolo por $180/\pi$. Excel también tiene predefinidas las funciones de RADIANES y GRADOS que pueden ser de ayuda en las conversiones. La ecuación (4.3) se inserta alternativamente en la celda B2 de la hoja de cálculo como:

= GRADOS(ASENO(G1 * SENO(RADIANES(A2))/G2)) **(8.3)**

Si la expresión (8.1) se tecleara en A8 y la expresión (8.2) u (8.3) se tecleara en B2, la hoja de cálculo resultante sería como la que se ilustra en la figura 8.3. Es importante recordar que cuando se modifica el contenido de una celda que contenía datos de entrada, todos los resultados se actualizan. Lo anterior permite que se efectúen iteraciones de diseño con facilidad.

FIGURA 8.2 Hoja de cálculo con texto y números en las celdas.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Crank Ang	Theta3				Link2	1.5
2	0	0.0				Link3	4.5
3	10						
4	20						
5	30						
6	40						
7	50						
8	60						
9	70						
10	80						
11	90						
12	100						
13	110						
14	120						
15	130						
16	140						

FIGURA 8.3 Hoja de cálculo con fórmulas introducidas en A8 y B2.

Otra característica importante de una hoja de cálculo es la función de copiar y pegar. El contenido de una celda se puede duplicar e insertar en otra celda. La característica de copiar y pegar elimina la introducción redundante de ecuaciones en las celdas.

La referencia a celdas en una fórmula es relativa o absoluta. Las referencias relativas se ajustan automáticamente cuando la copia de una celda se coloca en una nueva celda. Considere la siguiente fórmula introducida en la celda A8:

$$= \text{A7} + 10$$

La referencia a la celda A7 es una referencia relativa a la celda inmediatamente arriba de la celda A8 que contiene la fórmula. Si esta ecuación se copiara y se colocara en la celda A9, la fórmula nueva se convertiría en:

$$= \text{A8} + 10$$

Otra vez, la referencia a la celda A8 es relativa; por lo tanto, la hoja de cálculo ajustaría automáticamente la fórmula.

La dirección absoluta no modifica automáticamente la referencia a la celda después de usar la función de copiar y pegar. Sin embargo, para especificar una referencia absoluta, se debe colocar un símbolo de pesos antes de la fila y la columna. Por ejemplo, una referencia absoluta a la celda G1 tiene que aparecer como $G$1.

Suponga que la expresión (8.2) se va a colocar en la celda B2. Para hacerlo de una manera más eficiente, esta fórmula se modificaría ligeramente:

= ASENO($G$1 * (SENO(A2 * PI()/180)/$G$2)) * 180/PI()

Así, tan solo el ángulo de la celda A2 es una dirección relativa. Si la fórmula se fuera a copiar en la celda B3, la nueva fórmula sería:

= ASENO($G$1 * (SENO(A3 * PI()/180)/$G$2)) * 180/PI()

Observe que el direccionamiento de la celda A2 se ajustó automáticamente para leer "A3". El ángulo de la biela se calcula para el ángulo de la manivela especificado en la celda A3.

Para continuar con el análisis de un mecanismo, se debe teclear la siguiente fórmula en la celda C2:

$$= 180 - (\text{A2} + \text{B2})$$

Esta fórmula, mostrada en la figura 8.4, calcula el ángulo interior entre la manivela y la biela (ecuación 4.4):

$$\gamma = 180° - (\theta_2 + \theta_3) \qquad \textbf{(4.4)}$$

Como los ángulos simplemente se suman, y la función no se ha requerido, no se necesita el equivalente en radianes.

También se debe teclear la siguiente fórmula en la celda D2:

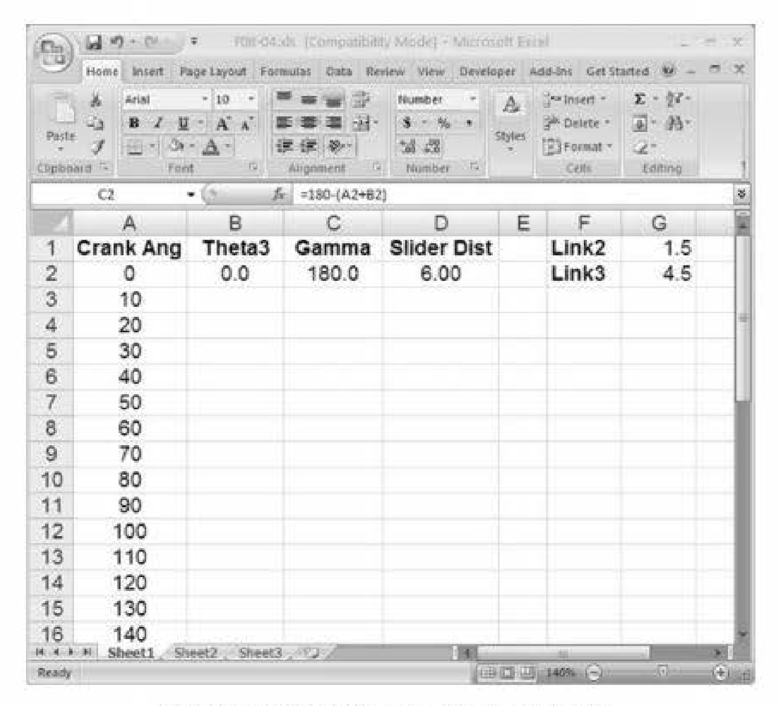
= RAIZ(($G$1)^2 + ($G$2)^2 −
(2 * $G$1 * $G$2 * COS(C2 * PI()/180)))

Esta fórmula calcula la distancia del pivote de la manivela a la unión de perno de la corredera (ecuación 4.5):

$$L_4 = \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - 2(L_2)(L_3)\cos\gamma} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Si las dos fórmulas se teclearan en C2 y D2, y se teclearan descripciones de texto en las celdas B1, C1 y D1, la hoja de cálculo resultante sería como la de la figura 8.4.

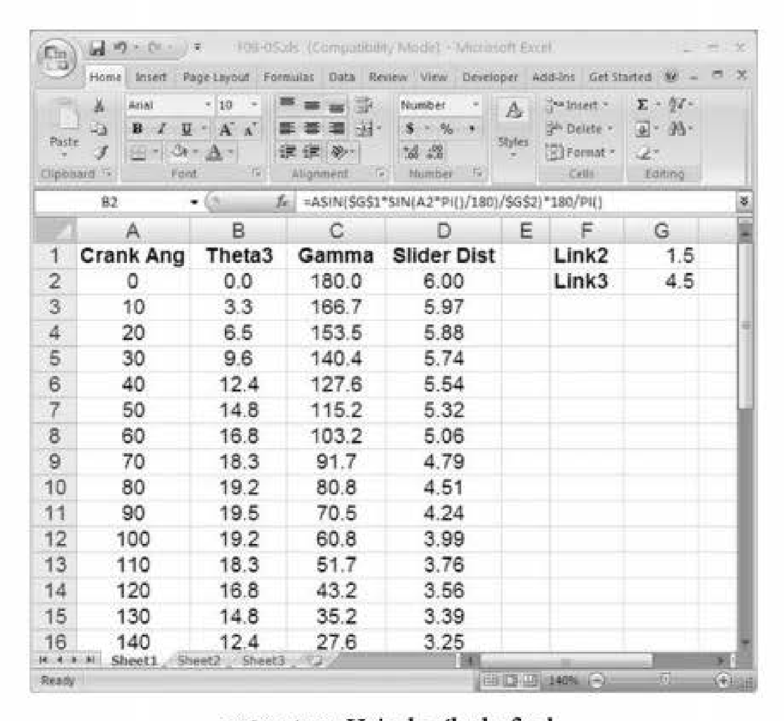
Por último, como se debe tener mucho cuidado al usar direcciones absolutas y relativas de celdas al crear las fórmulas en B2, C2 y D2, es posible copiar en las celdas de abajo en sus respectivas columnas. Se recomienda consultar el manual del usuario para los pasos reales necesarios para copiar los datos en las celdas restantes, los cuales normalmente son procedimientos sencillos de dos o tres pasos. La hoja de cálculo resultante se muestra en la figura 8.5.



C2 =180-(A2+B2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Crank Ang	Theta3	Gamma	Slider Dist		Link2	1.5
2	0	0.0	180.0	6.00		Link3	4.5
3	10						
4	20						
5	30						
6	40						
7	50						
8	60						
9	70						
10	80						
11	90						
12	100						
13	110						
14	120						
15	130						
16	140						

FIGURA 8.4 Fórmula agregada a la celda C2.



B2 =ASIN($G$1*SIN(A2*PI()/180)/$G$2)*180/PI()

	A	B	C	D	E	F	G
1	Crank Ang	Theta3	Gamma	Slider Dist		Link2	1.5
2	0	0.0	180.0	6.00		Link3	4.5
3	10	3.3	166.7	5.97			
4	20	6.5	153.5	5.88			
5	30	9.6	140.4	5.74			
6	40	12.4	127.6	5.54			
7	50	14.8	115.2	5.32			
8	60	16.8	103.2	5.06			
9	70	18.3	91.7	4.79			
10	80	19.2	80.8	4.51			
11	90	19.5	70.5	4.24			
12	100	19.2	60.8	3.99			
13	110	18.3	51.7	3.76			
14	120	16.8	43.2	3.56			
15	130	14.8	35.2	3.39			
16	140	12.4	27.6	3.25			

FIGURA 8.5 Hoja de cálculo final.

PROBLEMA DE EJEMPLO 8.1

La figura 8.6 ilustra un mecanismo que opera una boquilla de agua en un lavado automático de automóviles. Con el uso de una hoja de cálculo, determine analíticamente el movimiento angular de la boquilla a través del ciclo de rotación de la manivela.

SOLUCIÓN:

El mecanismo de la boquilla es el conocido mecanismo de cuatro barras. La figura 8.7 muestra la representación cinemática de este mecanismo. Se creó una hoja de cálculo para este análisis y se ilustra la porción superior en la figura 8.8.

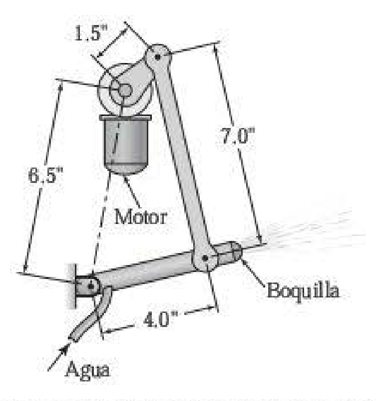


FIGURA 8.6 Mecanismo de la boquilla de agua del problema de ejemplo 8.1.

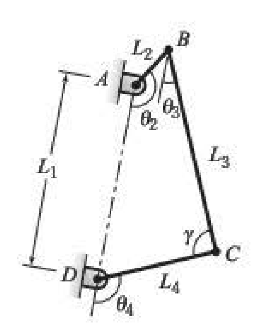
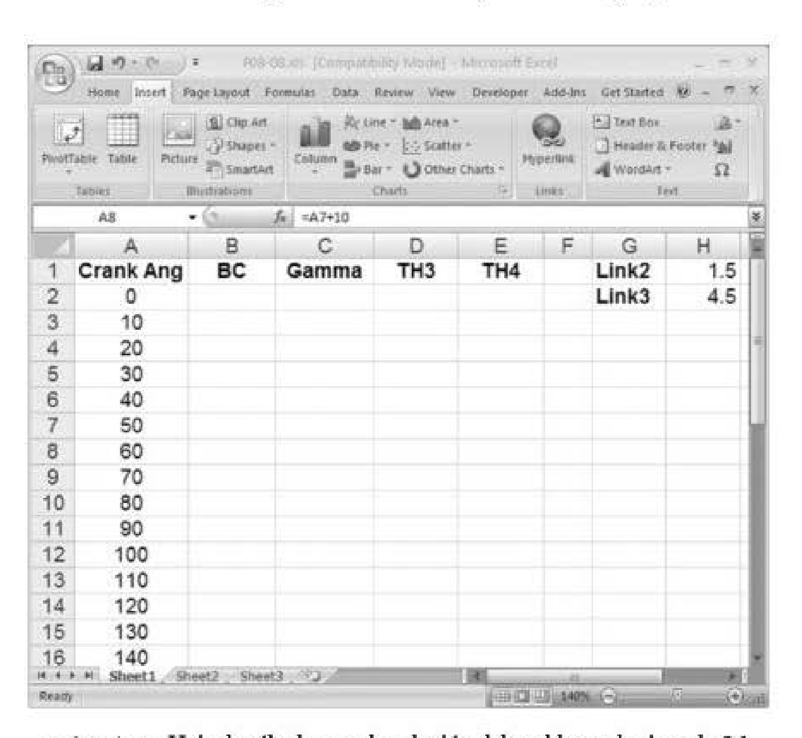


FIGURA 8.7 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 8.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Crank Ang	BC	Gamma	TH3	TH4		Link2	1.5
2	0						Link3	4.5
3	10							
4	20							
5	30							
6	40							
7	50							
8	60							
9	70							
10	80							
11	90							
12	100							
13	110							
14	120							
15	130							
16	140							

FIGURA 8.8 Hoja de cálculo para la solución del problema de ejemplo 8.1.

Las ecuaciones generales que rigen el movimiento de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras se presentaron en el capítulo 4. La ecuación 4.9 es la ecuación general de la diagonal del punto B al punto D, como se indica en la figura 8.7:

$$BD = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2(L_1)(L_2)\cos(\theta_2)}$$

La versión para hoja de cálculo de esta ecuación se coloca y se copia hacia abajo de la columna B. En la celda B2 se inserta la siguiente fórmula:

= RAIZ($H$1^2 + $H$2^2 − 2 * $H$1 * $H$2 * COS(RADIANES(A2)))

Observe que se utilizan direcciones absolutas y relativas para facilitar el copiado de la fórmula. La ecuación 4.10 es la ecuación general del ángulo de transmisión γ, como se indica en la figura 8.7:

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{L_3^2 + L_4^2 + BD^2}{2L_3L_4}$$

Esta ecuación se coloca y se copia abajo de la columna C en la forma adecuada para hoja de cálculo. En la celda C2 se inserta la siguiente fórmula:

```
= GRADOS(ACOS(($H$3^2 + $H$4^2 − B2^2)/(2 * $H$3 * $H$4)))
```

Replanteando la ecuación (4.11), se obtiene la ecuación general para el ángulo θ_4 del eslabón 4, como se muestra en la figura 8.7:

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{L_2 \operatorname{sen}\theta_2 - L_3 \operatorname{sen}\gamma}{L_2\cos\theta_2 + L_4 - L_1 - L_3\cos\gamma}\right]$$

Esta ecuación se coloca y se copia abajo de la columna E en la forma adecuada para hoja de cálculo. En la celda E2 se inserta la siguiente fórmula:

```
= GRADOS(2 * ATAN(($H$2 * SENO(RADIANES(A2)) − $H$3 * SENO(RADIANES(C2)))/
  ($H$2 * COS(RADIANES(A2)) + $H$4 − $H$1 − $H$3 * COS(RADIANES(C2)))))
```

Finalmente, la ecuación (4.12) nos da la ecuación general para el ángulo θ_3 del eslabón 3, como se muestra en la figura 8.7:

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-L_2 \operatorname{sen}\theta_2 + L_4 \operatorname{sen}\gamma}{L_1 + L_3 - L_2\cos\theta_2 - L_4\cos\gamma}\right]$$

Esta ecuación se coloca y se copia abajo de la columna D en la forma adecuada para hoja de cálculo. En la celda D2 se inserta la siguiente fórmula:

```
= GRADOS(2 * ATAN((−$H$2 * SENO(RADIANES(A2)) + $H$4 * SENO(RADIANES(C2)))/
  ($H$1 + $H$3 − $H$2 * COS(RADIANES(A2)) − $H$4 * COS(RADIANES(C2)))))
```

Las fórmulas de las celdas B2, C2, D2 y E2 se copian y pegan en sus columnas respectivas. En la figura 8.9 se ilustra la porción superior de la hoja de cálculo resultante.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Crank Ang	BC	Gamma	TH3	TH4		Link 1	6.5
2	0	5.0	44.4	34.0	78.5		Link 2	1.5
3	10	5.0	44.8	31.1	76.0		Link 3	7.0
4	20	5.1	46.1	28.5	74.6		Link 4	4.0
5	30	5.3	48.1	26.3	74.4			
6	40	5.4	50.7	24.5	75.3			
7	50	5.7	53.9	23.1	77.0			
8	60	5.9	57.3	22.1	79.4			
9	70	6.2	61.0	21.4	82.4			
10	80	6.4	64.8	21.0	85.8			
11	90	6.7	68.5	20.9	89.4			
12	100	6.9	72.2	21.1	93.3			
13	110	7.2	75.7	21.4	97.1			
14	120	7.4	78.9	22.0	101.0			
15	130	7.6	81.8	22.9	104.7			
16	140	7.7	84.3	23.9	108.2			

FIGURA 8.9 Hoja de cálculo terminada del problema de ejemplo 8.1.

8.3 PROGRAMAS DE CÓMPUTO DESARROLLADOS POR EL USUARIO

Para resolver problemas de mecanismos, el usuario puede desarrollar rutinas usando software como MATHCAD O MATLAB, o bien, un lenguaje de alto nivel como VisualBasic o VisualC++. El lenguaje de programación seleccionado debe tener acceso directo a las funciones trigonométricas normales e inversas. Por el tiempo y el esfuerzo requeridos para escribir un programa especial, únicamente se utilizan cuando es necesario resolver un problema complejo que se encuentra con frecuencia.

La lógica subyacente en los programas desarrollados en especial para realizar análisis cinemáticos es prácticamente idéntica a la de la hoja de cálculo. La estructura y la sintaxis de los diferentes lenguajes de programación de alto nivel varían en forma significativa. Las siguientes secciones ofrecen una estrategia para escribir programas de cómputo para obtener las propiedades cinemáticas de los dos mecanismos más comunes: el de manivela-corredera y el de cuatro barras.

8.3.1 Mecanismo de manivela-corredera descentrado

El siguiente algoritmo calcula posición, velocidad y aceleración de todos los eslabones de un mecanismo de manivela-corredera descentrado conforme la manivela gira a velocidad constante. En la figura 8.10 se ilustra el diagrama cinemático de un mecanismo general de manivela-corredera descentrado. Las relaciones cinemáticas en general, usadas en el algoritmo, se presentan en varias secciones de este libro [ref. 12].

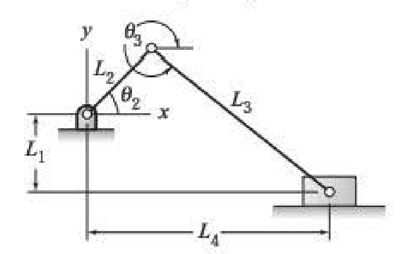


FIGURA 8.10 Mecanismo de manivela-corredera descentrado.

Las dimensiones del mecanismo se introducen como datos y el algoritmo efectúa los cálculos de un ciclo completo del giro de la manivela. La salida puede imprimirse o escribirse en un archivo. Luego, este archivo se convierte en hoja de cálculo, si así se desea.

Paso 1: Aceptar los datos numéricos de L_1, L_2, L_3 y ω_2, y almacenarlos
Paso 2: Calcular $\pi = 4 \tan^{-1}(1.0)$
Paso 3: Entrar a una iteración con el índice i desde 0 hasta 360
Paso 4: Calcular $a = i(\pi/180)$
Paso 5: Calcular $b = L_2$ sen a
Paso 6: Calcular $c = L_2 \cos a$
Paso 7: Calcular $d = \text{sen}^{-1}\{(L_1 + b)/L_3\}$
Paso 8: Calcular $\theta_3 = d(180/\pi)$
Paso 9: Calcular $e = L_2$ sen d
Paso 10: Calcular $f = L_2 \cos d$
Paso 11: Calcular $g = L_3$ sen d
Paso 12: Calcular $h = L_3 \cos d$
Paso 13: Calcular $L_4 = c + h$
Paso 14: Calcular $\omega_3 = -\omega_2(c/f)$
Paso 15: Calcular $v_4 = -\omega_2(b) - \omega_3(g)$
Paso 16: Calcular $\alpha_3 = \{b(\omega_2)^2 + g(\omega_3)^2\}/h$
Paso 17: Calcular $a_4 = -\{g(\alpha_3) + c(\omega_2)^2 + h(\omega_3)^2\}$
Paso 18: Imprimir (o escribir en un archivo) i, θ_3, ω_3, α_3, L_4, v_4, a_4
Paso 19: Incrementar i y regresar al paso 3

Recuerde que las funciones de una computadora suponen que los ángulos están dados en radianes. Por lo tanto, es necesario convertir la entrada y la salida angulares como se hizo en los pasos 4 y 8. Este algoritmo también funciona para un mecanismo de manivela-corredera en línea especificando $L_1 = 0$ como entrada.

8.3.2 Mecanismo de cuatro barras

El siguiente algoritmo calcula posición, velocidad y aceleración de todos los eslabones de un mecanismo de cuatro barras, en el cual la manivela gira a velocidad constante. En la figura 8.11 se muestra el diagrama cinemático de un mecanismo de cuatro barras en general. De nueva cuenta, las relaciones cinemáticas generales que se utilizan en este algoritmo se presentaron en varias secciones de este texto [ref. 12].

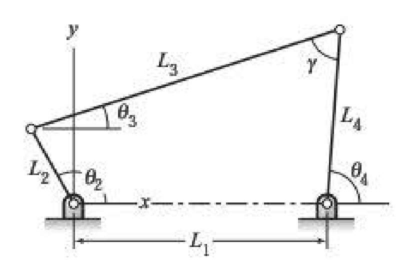


FIGURA 8.11 Mecanismo de cuatro barras.

Como en el algoritmo anterior, las dimensiones del mecanismo se introducen como datos, mientras el algoritmo realiza los cálculos del ciclo completo de un giro de la manivela. La salida puede imprimirse o escribirse en un archivo. Luego, este archivo se convierte en una hoja de cálculo, si así se desea.

Paso 1: Aceptar los datos numéricos de L_1, L_2, L_3, L_4 y ω_2, y almacenarlos
Paso 2: Calcular $\pi = 4 \tan^{-1}(1.0)$
Paso 3: Entrar a una iteración con el índice i desde 0 hasta 360
Paso 4: Calcular $a = i(\pi/180)$
Paso 5: Calcular $b = (L_3^2 + L_4^2 - L_1^2 - L_2^2)/(2L_3L_4)$
Paso 6: Calcular $c = L_1/L_3L_4$
Paso 7: Calcular $d = L_2$ sen a
Paso 8: Calcular $e = L_2 \cos a$
Paso 9: Calcular $f = \cos^{-1}(b + ce)$
Paso 10: Calcular $\gamma = f(180/\pi)$
Paso 11: Calcular $g =$ sen f
Paso 12: Calcular $h = \cos f$
Paso 13: Calcular $p = 2 \tan^{-1}\{(-d + L_4g)/(-e + L_3 + L_1 - L_4h)\}$
Paso 14: Calcular $\theta_3 = p(180/\pi)$
Paso 15: Calcular $q = 2 \tan^{-1}\{(d - L_3g)/(e + L_4 - L_1 - L_3h)\}$
Paso 16: Calcular $\theta_4 = q(180/\pi)$
Paso 17: Calcular $\omega_3 = \omega_2L_2 \,\text{sen}(q - a)/(L_3g)$
Paso 18: Calcular $\omega_4 = \omega_2L_2 \,\text{sen}(p - a)/(L_4g)$
Paso 19: Imprimir (o escribir en un archivo) i, γ, θ_3, ω_3, θ_4, ω_4
Paso 20: Incrementar i y regresar al paso 3

Recuerde que las computadoras asumen que los ángulos están dados en radianes. Por ello, es necesario convertir las entradas y salidas angulares, como se hizo en los pasos 4, 10, 14 y 16. Este algoritmo proporciona la solución para un mecanismo de cuatro barras en el primer circuito. Si el mecanismo estuviera ensamblado en el segundo circuito, tal rutina se modificaría rápidamente para representar esa configuración, lo cual se llevaría a cabo si se cambiaran los signos más y menos en los numeradores de los pasos 13 y 15.

PROBLEMAS

En los problemas 8-1 y 8-2 desarrolle una hoja de cálculo donde se analice la posición de todos los eslabones de un mecanismo de manivela-corredera descentrado en un rango de los ángulos de la manivela de 0 a 360°. Hágala flexible, de modo que sea posible modificar rápidamente la longitud de cualquier eslabón. Use los valores listados para elaborar una gráfica de la distancia de la corredera contra el ángulo de la manivela.

8–1 descentrado = 0.5 in; manivela = 1.25 in; acoplador = 7.0 in

8–2 descentrado = 10 mm; manivela = 25 mm; acoplador = 140 mm

En los problemas 8-3 y 8-4 desarrolle una hoja de cálculo que analice la posición de todos los eslabones de un mecanismo de cuatro barras en los ángulos de la manivela que van de 0 a 360°. Hágala flexible, de modo que se modifique rápidamente la longitud de cualquier eslabón. Use los valores listados para elaborar una gráfica del ángulo del seguidor contra el ángulo de la manivela.

8–3 bancada = 750 mm; manivela = 50 mm; acoplador = 750 mm; seguidor = 75 mm

8–4 bancada = 14 in; manivela = 1 in; acoplador = 16 in; seguidor = 4.0 in

En los problemas 8-5 y 8-6 desarrolle una hoja de cálculo que determine posición, velocidad y aceleración de la corredera en los ángulos de la manivela que se encuentran entre 0 y 360°. Hágala flexible, de modo que se modifiquen rápidamente la longitud de cualquier eslabón. Use los valores listados para elaborar una gráfica de la velocidad de la corredera contra el ángulo de la manivela.

8–5 descentrado 1.25 in; manivela = 3.25 in; acoplador = 17.5 in; velocidad de la manivela = 20 rad/s: aceleración de la manivela = 0 rad/s²

8–6 descentrado 30 mm; manivela = 75 mm; acoplador = 420 mm; velocidad de la manivela = 35 rad/s: aceleración de la manivela = 100 rad/s²

En los problemas 8-7 y 8-8 desarrolle una hoja de cálculo que determine la posición y velocidad del seguidor, en los ángulos de la manivela que se encuentran entre 0 y 360°. Hágala flexible, de modo que se modifique rápidamente la longitud de cualquier eslabón. Use los valores listados para elaborar una gráfica de la velocidad del seguidor contra el ángulo de la manivela.

8–7 bancada = 9 in; manivela = 1 in; acoplador = 10 in; seguidor = 3.5 in; velocidad de la manivela = 200 rad/s; aceleración de la manivela = 0 rad/s²

8–8 bancada = 360 mm; manivela = 40 mm; acoplador = 400 mm; seguidor = 140 mm; velocidad de la manivela = 6 rad/s; aceleración de la manivela = 20 rad/s²

Fn los problemas 8-9 y 8-10 elabore un programa de cómputo que determine posición, velocidad y aceleración de todos los eslabones de un mecanismo de manivela-corredera en los ángulos de la manivela que van de 0 a 360°. Hágala flexible, de modo que se modifique rápidamente la longitud de cualquier eslabón. Use los valores listados para determinar el ángulo de la manivela que produce la aceleración de deslizamiento máxima.

8–9 descentrado = 3 in; manivela = 7.5 in; acoplador = 52.5 in; velocidad de la manivela = 4 rad/s; aceleración de la manivela = 0 rad/s²

8–10 descentrado = 40 mm; manivela = 94 mm; acoplador = 525 mm; velocidad de la manivela = 10 rad/s; aceleración de la manivela = 10 rad/s²

En los problemas 8-11 y 8-12 elabore un programa de cómputo que determine la posición y velocidad de todos los eslabones de un mecanismo de cuatro barras para los ángulos de la manivela que van de 0 a 360°. Use los valores listados para determinar el ángulo de la manivela que produce la aceleración de deslizamiento máxima.

8–11 bancada = 18 in; manivela = 2 in; acoplador = 20 in; seguidor = 7 in; velocidad de la manivela = 150 rad/s; aceleración de la manivela = 0 rad/s²

8–12 bancada = 60 mm; manivela = 18 mm; acoplador = 70 mm; seguidor = 32 mm; velocidad de la manivela = 360 rad/s; aceleración de la manivela = 20 rad/s²

ESTUDIO DE CASO

8–1. El mecanismo mostrado en la figura E8.1 son el cigüeñal y la manivela de un mecanismo de manivela-corredera elaborado que no se muestra, donde *K* es la biela. Examine cuidadosamente los componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de la operación.

1. En la posición mostrada, conforme la corredera *E* jala hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del eslabón *D*?
2. En la posición mostrada, conforme la corredera *E* jala hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento de deslizamiento del bloque *I*?
3. La polea *J* está sujeta al eje *A*. Conforme la polea *J* gira, ¿cuál es el movimiento de la espiga de la manivela *C* del cigüeñal?
4. Conforme la polea *J* gira, ¿cuál es el movimiento de la barra *E* que se desliza?
5. ¿Qué efecto tiene el movimiento hacia la izquierda de la barra *E* que se desliza sobre la espiga de la manivela *C* y sobre el movimiento del mecanismo de manivela-corredera que impulsa?
6. El manguito *F* está sujeto a la carcasa *H*. Conforme la polea *J* impulsa la flecha *A*, ¿cuál es el movimiento del manguito *F*?
7. El manguito *J* está moldeado integralmente con la parte *G*. ¿Qué es la parte *G*?
8. El manguito *J* tiene una cuerda interna en su extremo derecho, en tanto que el manguito *F* tiene una cuerda externa en su extremo derecho. Conforme la parte *G* gira, ¿qué sucede con el manguito *F*?
9. Conforme la parte *G* gira, ¿qué sucede con la barra *E* que se desliza?
10. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo y cómo funciona?

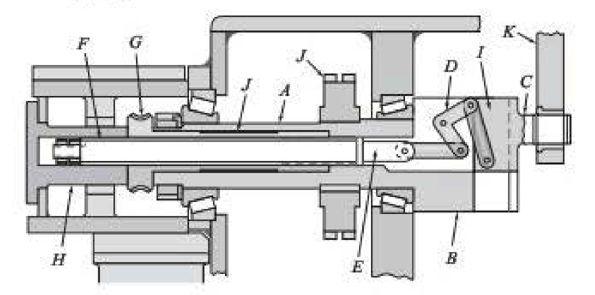


FIGURA E8.1 (Cortesía de Industrial Press).

LEVAS: DISEÑO Y ANÁLISIS CINEMÁTICO

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Identificar los diferentes tipos de levas y seguidores de levas.**
2. **Crear el diagrama de desplazamiento del seguidor, a partir de criterios prescritos de movimiento del seguidor.**
3. **Entender los beneficios de diferentes esquemas de movimiento del seguidor.**
4. **Utilizar ecuaciones para construir diagramas de desplazamiento del seguidor de la leva.**
5. **Construir geométricamente diagramas de desplazamiento del seguidor de la leva.**
6. **Construir gráfica y analíticamente perfiles de levas de disco con varios tipos de seguidores.**
7. **Construir gráfica y analíticamente perfiles de levas cilíndricas.**

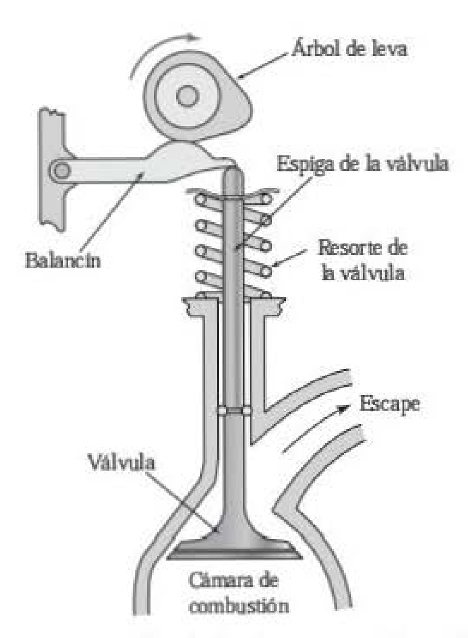


FIGURA 9.1 Tren de válvulas de un motor de gasolina.

9.1 INTRODUCCIÓN

Una leva es un elemento común de un mecanismo que impulsa una componente aparejada conocida como seguidor. Desde un punto de vista funcional, un arreglo de leva-seguidor es muy similar a los eslabonamientos estudiados a lo largo del libro. La leva acepta un movimiento de entrada parecido al de una manivela e imparte movimiento al seguidor.

La figura 9.1 muestra una de las aplicaciones más comunes —a saber, el tren de válvulas de un motor automotriz—. En esta aplicación, la leva de forma ovalada está maquinada sobre un eje. El árbol de leva es impulsado por el motor. Conforme la leva gira, un balancín se barre sobre la superficie ovalada. El balancín, a la vez, imparte movimiento lineal reciprocante a la espiga de la válvula. El movimiento de la válvula debe ser tal que la trayectoria de escape esté cerrada durante un momento del ciclo de combustión y abierta durante otro momento distinto. Entonces, la aplicación es perfecta para una leva porque el ritmo y el movimiento deben estar secuenciados con precisión.

Observe que se utiliza un resorte alrededor de la espiga de la válvula. El balancín seguidor necesita estar en contacto con la superficie de la leva para obtener el movimiento deseado. Así, en la mayoría de las aplicaciones de levas, el seguidor se fuerza contra la superficie de la leva a través de algunos medios mecánicos. Los resortes son muy comunes para dicho propósito. En los casos donde el seguidor se encuentra en el plano vertical, el peso del seguidor puede ser suficiente para mantener el contacto. En algunos diseños de levas, el seguidor está atrapado en una ranura para mantener el contacto. El punto importante es que el contacto entre la leva y el seguidor debe ser permanente.

La característica única de una leva es que puede impartir movimientos muy diferentes a su seguidor. De hecho, las levas sirven para obtener movimiento inusual o irregular que sería difícil o imposible de conseguir con el uso de otros eslabonamientos. Como el movimiento de las levas es programable, son muy adecuadas para aplicaciones donde desplazamientos diferentes y su sincronización son de importancia fundamental. Las levas se emplean con frecuencia en equipo industrial automático, porque programan los desplazamientos a un costo razonable. Las levas son componentes de máquinas de precisión que por lo general cuestan más que los eslabonamientos convencionales. La figura 9.2 presenta un grupo de levas diseñadas con requerimientos de movimiento especiales. Observe la precisión del maquinado del perfil exterior. Este capítulo es una introducción a los fundamentos del diseño de levas.

9.2 TIPOS DE LEVAS

Hay una gran variedad de levas de compañías especializadas en su diseño y manufactura. Los fabricantes clasifican las levas en subcategorías y las comercializan según las diferentes aplica-



FIGURA 9.2 Varias levas especiales. (Cortesía de DE-STA-Co CAMCO Products).

ciones o configuraciones. No obstante, la gran mayoría de las levas se agrupan en los tres tipos generales siguientes:

Las *levas de placa* o *de disco* son el tipo de levas más simples y comunes. En la figura 9.3a se ilustra una leva de placa. Este tipo de leva se moldea sobre un disco o una placa. La distancia radial a partir del centro del disco varía a lo largo de la circunferencia de la leva. Si se hace que un seguidor se mueva sobre el extremo exterior, se proporciona al seguidor un movimiento radial.

En la figura 9.3b se presenta una *leva cilíndrica* o *de tambor*. Esta clase de leva se moldea sobre un cilindro. Se corta una ranura en el cilindro con un emplazamiento variable a lo largo de su eje de giro. Enganchando un seguidor que se mueve en la ranura, se da al seguidor un movimiento a lo largo del eje rotación.

En la figura 9.3c se muestra una *leva lineal*. Este tipo de leva se moldea sobre un bloque de traslación. Se corta una ranura en el bloque con una distancia que varía desde el plano de traslación. Al sujetar un seguidor que se mueve en la ranura, se proporciona al seguidor un movimiento perpendicular al plano de traslación.

Como ya se señaló, las levas de placa son el tipo más común. Una vez que se entiende la teoría subyacente, también es posible aplicar a otros tipos de levas.

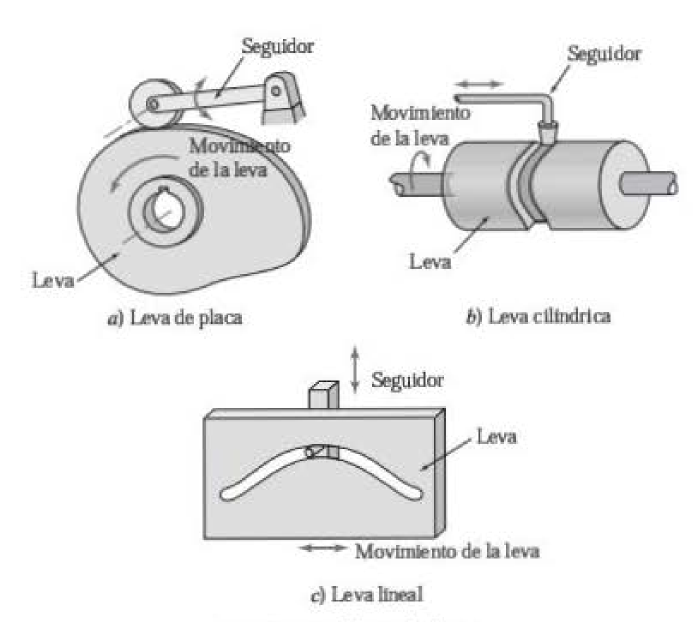


FIGURA 9.3 Tipos de levas.

9.3 TIPOS DE SEGUIDORES

Los seguidores se clasifican por su movimiento, su forma y su posición. En la figura 9.4 se presentan los detalles de las clasificaciones y se analizan a continuación.

9.3.1 Movimiento del seguidor

El movimiento del seguidor se clasifica en las dos categorías siguientes:

Los *seguidores de traslación* están restringidos a movimiento en línea recta, que se ilustran en las figuras 9.4a y c.

Los *seguidores con brazo oscilante* o *con pivote* están restringidos a movimiento giratorio y se muestran en las figuras 9.4b y d.

9.3.2 Posición del seguidor

La posición del seguidor, en relación con el centro de rotación de la leva, se ve afectada generalmente por los requerimientos

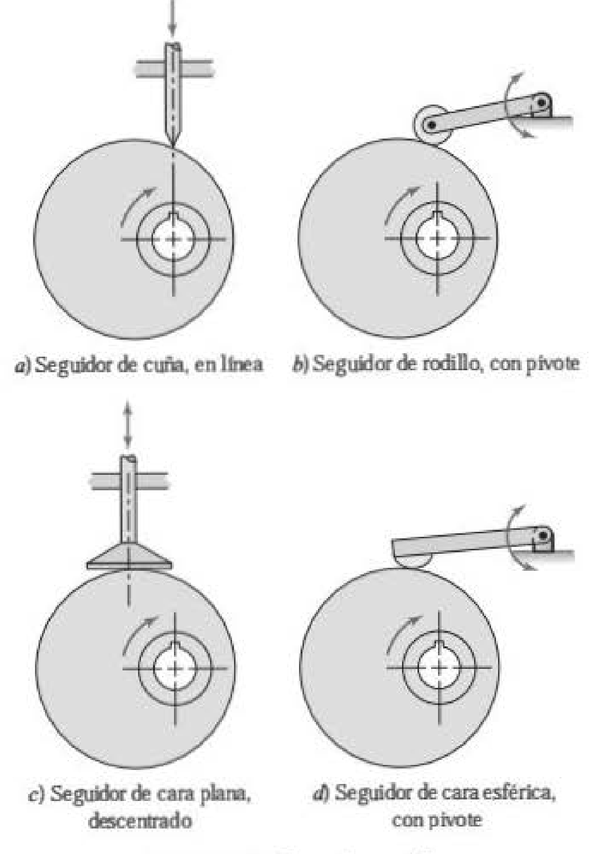


FIGURA 9.4 Tipos de seguidor.

de espacio de la máquina. La posición de los seguidores de traslación se divide en dos categorías:

Un *seguidor en línea* tiene movimiento en línea recta, de modo que la línea de traslación se extiende a través del centro de rotación de la leva y se ilustra en la figura 9.4a.

Un *seguidor descentrado* tiene movimiento en línea recta, de modo que la línea de movimiento no pasa por el centro de rotación de la leva (se presenta en la figura 9.4c).

En el caso de seguidores con pivote, no hay necesidad de distinguir entre seguidores en línea y descentrados, ya que tienen la misma cinemática.

9.3.3 Forma del seguidor

Finalmente, la forma del seguidor se agrupa en las cuatro categorías siguientes:

El *seguidor de cuña* consiste en un seguidor formado por un punto, que se arrastra sobre el borde de la leva. El seguidor de la figura 9.4a es un seguidor de cuña. Es la forma más simple, pero el extremo puntiagudo produce altos esfuerzos de contacto y se desgasta rápidamente. En consecuencia, este tipo de seguidor se utiliza raras veces.

El *seguidor de rodillo* consiste en un seguidor que tiene una parte separada: el rodillo que está sujeto a la espiga del seguidor. El seguidor mostrado en la figura 9.4b es un seguidor de rodillo. Conforme la leva gira, el rodillo se mantiene en contacto con la leva y rueda sobre la superficie de esta. Es el seguidor más comúnmente usado, ya que la fricción y los esfuerzos de contacto son menores que los del seguidor de cuña. Sin embargo, un seguidor de rodillo se podría atascar durante un desplazamiento abrupto de la leva. Un estudio más detallado de la tendencia de un seguidor a bloquearse se presenta más adelante.

Un *seguidor de cara plana* consiste en un seguidor formado por una superficie grande y plana de contacto con la leva. El seguidor de la figura 9.4c es un seguidor de cara plana. Este tipo de seguidor se utiliza con un movimiento abrupto de la leva sin que se atasque. Entonces, este tipo de seguidor es útil cuando se requieren movimientos rápidos. No obstante, cualquier deflexión o desalineación del seguidor causa grandes esfuerzos superficiales. Asimismo, las fuerzas de fricción son mayores que las del seguidor de rodillo debido al intenso contacto de deslizamiento entre la leva y el seguidor.

Un *seguidor de cara esférica* consiste en un seguidor formado con un radio de la cara que entra en contacto con la leva. El seguidor mostrado en la figura 9.4d es un seguidor con cara esférica. Como con el seguidor de cara plana, el de cara esférica se utiliza con movimiento abrupto de la leva sin que se atasque. El radio de la cara compensa la deflexión o la desalineación. Como en el seguidor de cara plana, las fuerzas de fricción todavía son mayores que las del seguidor de rodillo.

Observe que estas características del seguidor son intercambiables. Es decir, se puede combinar cualquier forma de seguidor con cualesquiera de sus movimientos o posición.

9.4 MOVIMIENTO PRESCRITO DEL SEGUIDOR

Como se ha indicado, la característica única de una leva es que imparte movimientos muy diferentes a su seguidor. Desde luego, el movimiento del seguidor depende de la tarea requerida y puede definirse con todo detalle.

Por ejemplo, suponga que se utiliza un seguidor para impulsar las manecillas recolectoras de una máquina que maneja papel. La prescripción deseada del seguidor implica la separación del movimiento en segmentos, así como la definición de la acción que debe ocurrir durante cada uno de los segmentos. Para describir este proceso suponga que las manecillas recolectoras deben:

1. Permanecer cerrados por 0.03 s.
2. Abrirse una distancia de 0.25 in, a partir de la posición cerrada, en 0.01 s.
3. Permanecer en posición abierta durante 0.02 s.
4. Moverse a la posición cerrada en 0.01 s.

De modo que, listando los requerimientos precisos de las manecillas recolectoras, se prescribe el movimiento del seguidor.

En la realidad, el movimiento del seguidor se expresa en términos del desplazamiento angular de la leva en vez de tiempo, lo cual es más conveniente en aplicaciones donde el movimiento debe estar sincronizado, tal como el tren de válvulas de la figura 9.1.

Para las manecillas recolectoras que se acaban de describir, el movimiento prescrito, establecido en términos de la rotación de la leva, se lista como sigue:

1. Permanecen cerrados en 154.3° de rotación de la leva.
2. Se abren una distancia de 0.25 in, a partir de la posición cerrada, en 51.4° de rotación de la leva.
3. Permanecen en esta posición abierta en 102.9° de rotación de la leva.
4. Se mueven a la posición cerrada en 51.4° de rotación de la leva.

Una vez que el movimiento del seguidor está prescrito, es conveniente registrarlo en forma gráfica.

La gráfica de desplazamiento del seguidor contra el tiempo, o el desplazamiento angular de la leva, se conoce como *diagrama de desplazamiento del seguidor*. Este diagrama es indispensable para explorar el movimiento y la cinemática del seguidor independientemente de la forma de la leva misma. El eje vertical de este diagrama representa el desplazamiento lineal del seguidor, expresado en pulgadas o milímetros. El eje horizontal representa el tiempo, medido en segundos o minutos, o bien, desplazamientos angulares de la leva, medidos en grados o en fracciones de una revolución. Este diagrama normalmente se construye a escala y, junto con el análisis cinemático del seguidor, es extremadamente útil al determinar la forma de la leva.

En el análisis cinemático, es mejor la curva de desplazamiento del seguidor contra el tiempo. Como ayuda en la tarea de diseño de la forma de la leva, se prefiere la curva del desplazamiento del seguidor contra el ángulo de la leva. La relación del giro de la leva con el tiempo es un proceso sencillo cuando se utiliza la teoría presentada en el capítulo 6. La ecuación (6.4) da lo siguiente:

$$\omega_{\text{leva}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Cuando la leva gira a velocidad constante, lo cual sucede en la inmensa mayoría de las aplicaciones, el tiempo se puede relacionar con el movimiento angular y viceversa. La rotación de la leva durante un intervalo del movimiento del seguidor se expresa usualmente por el símbolo β. Asimismo, el tiempo transcurrido durante un intervalo del movimiento del seguidor se designa como T. La elevación o caída del seguidor durante un intervalo se designa como H. Al replantear la ecuación (6.4), y usar la nomenclatura de levas, se obtiene la relación entre el giro de la leva y el tiempo en un intervalo arbitrario i:

$$\beta_i = (\omega_{leva})(T_i) \qquad \textbf{(9.1)}$$

La ecuación (9.1) sirve también para determinar la rapidez requerida de la leva, considerando el tiempo transcurrido durante un ciclo.

$$\omega_{leva} = \frac{1 \text{ rev}}{\Sigma T_i} \qquad \textbf{(9.2)}$$

donde

ΣT_i = tiempo total de todos los intervalos de movimiento que comprende un ciclo.

El periodo de rotación de la leva, cuando no hay movimiento del seguidor, se conoce como *detención*. Los detalles del movimiento durante los intervalos de elevación y descenso del seguidor se rigen principalmente por la tarea que necesita realizarse y por consideraciones dinámicas. Como las fuerzas grandes están asociadas con aceleraciones grandes, resulta benéfico disminuir la aceleración.

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.1

Se utiliza una leva en una plataforma que constantemente levanta cajas desde un transportador inferior hacia un transportador superior. Esta máquina se ilustra en la figura 9.5. Elabore un diagrama de desplazamiento y determine la rapidez requerida de la leva cuando la secuencia de movimiento del seguidor es como sigue:

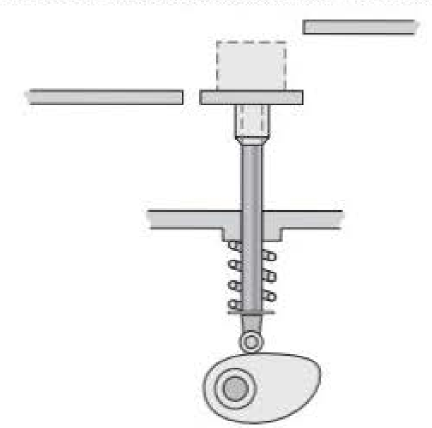


FIGURA 9.5 Sistema de leva del problema de ejemplo 9.1.

1. Elevar 2 in en 1.2 s.
2. Detención durante 0.3 s.
3. Descender 1 in en 0.9 s.
4. Detención durante 0.6 s.
5. Descender 1 in en 0.9 s.

SOLUCIÓN:

1. ***Calcule el tiempo de un ciclo completo***

Es necesario el tiempo total de un ciclo completo para determinar la rapidez requerida de la leva.

$$\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = (1.2 + 0.3 + 0.9 + 0.6 + 0.9)\text{s} = 3.9\text{ s}$$

2. ***Determine la velocidad angular requerida de la leva***

De la ecuación (9.2),

$$\omega_{leva} = \frac{1\text{ rev}}{\Sigma T_i} = \frac{1\text{ rev}}{3.9\text{ s}} = 0.256\text{ rev/s}\left(\frac{60\text{s}}{1\text{ min}}\right) = 15.38\text{ rpm}$$

3. ***Calcule el giro de la leva para cada intervalo de movimiento del seguidor***

El incremento angular consumido por la leva para cada secuencia de movimiento del seguidor se determina con la ecuación (9.1).

$$\beta_1 = (\omega_{leva})(T_i) = (0.256\text{ rev/s})(1.2\text{s}) = 0.307\text{ rev}$$
$$= (0.307\text{ rev})(360°/1\text{ rev}) = 110.5°$$

$$\beta_2 = (0.256\text{ rev/s})(0.3\text{ s}) = 0.077\text{ rev} = 27.6°$$
$$\beta_3 = (0.256\text{ rev/s})(0.9\text{ s}) = 0.230\text{ rev} = 82.9°$$
$$\beta_4 = (0.256\text{ rev/s})(0.6\text{ s}) = 0.154\text{ rev} = 55.3°$$
$$\beta_5 = (0.256\text{ rev/s})(0.9\text{ s}) = 0.230\text{ rev} = 82.9°$$

4. ***Grafique el diagrama de desplazamiento***

En la figura 9.6 se muestra el diagrama de desplazamiento resultante, tanto con el ángulo de la leva como con el tiempo desplegado en el eje horizontal. Observe que se construyó el perfil de la curva de desplazamiento durante las secuencias de elevación y descenso. Consideraciones dinámicas determinan la forma real de las secciones de elevación y descenso.

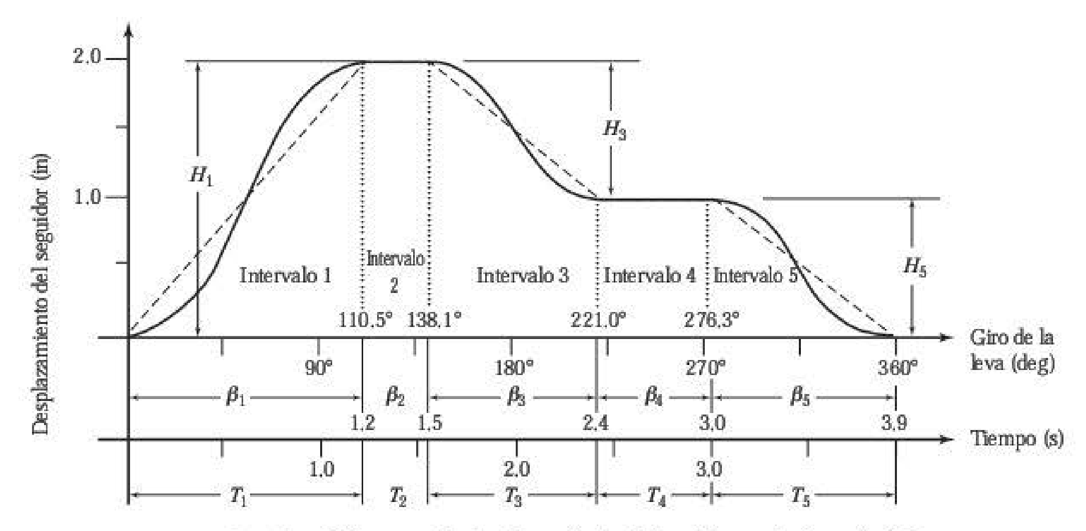


FIGURA 9.6 Diagrama de desplazamiento del problema de ejemplo 9.1.

9.5 ESQUEMAS DE MOVIMIENTO DEL SEGUIDOR

El objetivo en el diseño de una leva es identificar su forma adecuada. El interés principal consiste en garantizar que el seguidor logre los desplazamientos deseados. Desde luego, tales desplazamientos se describen en el diagrama de desplazamiento. La forma de la leva es simplemente el medio para obtener este movimiento.

En la sección anterior, el movimiento del seguidor durante las secuencias de elevación y descenso no se identificó totalmente. Se mencionó que las características dinámicas del seguidor son importantes. Aceleraciones grandes causan fuerzas grandes y, por consiguiente, altos esfuerzos. El cambio rápido de las aceleraciones provoca vibración y, por lo tanto, ruido. Debido a los principios dinámicos fundamentales, los periodos de elevación y descenso del diagrama de desplazamiento de una leva son de vital importancia.

Para levas con movimiento lento, las grandes aceleraciones no son un problema. Por ello, la leva se diseña con la finalidad de generar simplemente los desplazamientos dados en el instante especificado. La manera en la cual el seguidor llega al punto deseado no es relevante. En estos casos, la leva se fabrica del modo más conveniente, siempre y cuando se obtenga el desplazamiento requerido. Una leva de placa puede ser tan solo una combinación de arcos circulares y líneas rectas, las cuales se fabrican con facilidad.

En aplicaciones de alta velocidad, no es suficiente proporcionar únicamente el desplazamiento requerido. Las características dinámicas del seguidor durante las secuencias de elevación y descenso se deben especificar con mucho detalle para minimizar las fuerzas y vibraciones.

Hay una gran variedad de esquemas de movimiento para el movimiento del seguidor. El objetivo de estos esquemas es producir el movimiento con aceleraciones suaves. En el estudio de las características dinámicas del seguidor para diferentes esquemas de movimiento, se utiliza la siguiente notación:

H = Desplazamiento total del seguidor durante el intervalo de elevación o descenso en consideración. En el caso de un seguidor con pivote, este es el desplazamiento angular total $\Delta\theta_L$ del eslabón seguidor, durante el intervalo particular.

T = Periodo total de tiempo para el intervalo de elevación o descenso en consideración.

t = Intervalo de tiempo de elevación o descenso que define las propiedades instantáneas del seguidor.

β = Ángulo de rotación de la leva durante el intervalo de elevación o descenso en consideración (grados).

ϕ = Ángulo durante el intervalo de elevación o descenso que define las propiedades instantáneas del seguidor (grados).

ω_{leva} = Velocidad de la leva (grados por unidad de tiempo).

ΔR = Magnitud del desplazamiento instantáneo del seguidor en el tiempo t o ángulo β de la leva. En el caso de un seguidor con pivote, esto es similar al desplazamiento angular instantáneo $\Delta\theta_L$ del eslabón seguidor.

v = magnitud de la velocidad instantánea del seguidor $= dR/dt$. En el caso de un seguidor con pivote esto es similar a la rotación θ_L del eslabón seguidor.

a = Magnitud de la aceleración instantánea del seguidor $= dv/dt$.

9.5.1 Velocidad constante

El esquema más sencillo de movimiento del seguidor durante una elevación o un descenso es el de velocidad constante. El movimiento con velocidad constante se caracteriza por un diagrama de desplazamiento en línea recta, porque la velocidad es uniforme. Las características dinámicas de una elevación a velocidad constante se listan en la tabla 9.1.

Aun cuando la idea de una aceleración igual a cero es atractiva, los extremos de este esquema de movimiento causan problemas. Teóricamente, el salto instantáneo de cualquier valor constante de velocidad a otro valor constante de velocidad genera una aceleración infinita. Como las máquinas impulsadas por el seguidor siempre tendrán masa, esto resulta teóricamente en una fuerza infinita. En la práctica, es imposible un cambio instantáneo en la velocidad debido a la flexibilidad de los elementos de una máquina. No obstante, cualquier sacudida es importante y se debe mantener en el mínimo. Por lo tanto, este movimiento en su forma pura no se presenta, excepto en aplicaciones de baja velocidad.

En la figura 9.7 se muestra un diagrama de desplazamiento con velocidad constante, junto con las curvas de velocidad y aceleración.

9.5.2 Aceleración constante

El movimiento con aceleración constante durante una secuencia de elevación o descenso genera los menores valores posibles de aceleración en un intervalo de tiempo y elevación determinados. El diagrama de desplazamiento de un intervalo de elevación o descenso se divide en dos mitades iguales, una de aceleración constante y la otra de desaceleración constante. Las formas de cada mitad del diagrama de desplazamiento son parábolas de imágenes especulares. Las características dinámicas de una elevación con aceleración constante se listan en la tabla 9.2.

Este esquema de movimiento, conocido también como movimiento parabólico o de gravedad, tiene aceleraciones constantes positivas y negativas. No obstante, presenta un cambio brusco de aceleración al final del movimiento y en el punto de transición entre las mitades de aceleración y desaceleración. Los cambios bruscos provocan un cambio brusco en las fuerzas inerciales, los cuales por lo general causan vibraciones indeseables, de modo que este movimiento en forma pura no es común, salvo en aplicaciones de baja velocidad. En la figura 9.8 se muestra un diagrama de desplazamiento con aceleración constante, junto con las curvas de velocidad y aceleración.

Se requiere un diagrama de desplazamiento a escala para construir el perfil real de la leva. Se pueden utilizar las ecuaciones presentadas en la tabla 9.2 con una hoja de cálculo, o cualquier otro software que grafique ecuaciones, para elaborar este diagrama. Aunque este método analítico es preciso, se debe tener cuidado para graficar el diagrama a escala.

La construcción gráfica de un diagrama de desplazamiento es un método alternativo para elaborar un diagrama de desplazamiento a escala. Su construcción se realiza usando un esquema de movimiento con aceleración constante, remitiéndose a la figura 9.9 y aplicando el siguiente procedimiento:

1. Dividir la secuencia de elevación (o descenso) del seguidor en dos mitades iguales. En la figura 9.9, *AE* representa el periodo de tiempo y *EF* la magnitud de la elevación de la primera mitad de este esquema de movimiento.
2. Dividir en partes iguales tanto el eje horizontal como el vertical del cuadrante *AEFH*.
3. Trazar líneas verticales a partir de las divisiones horizontales.
4. Trazar líneas rectas a partir de la esquina *A* hacia las divisiones verticales.
5. Dibujar una curva suave a través de los puntos de intersección de las líneas verticales y de las líneas dibujadas a partir de la esquina *A*.
6. Repetir los pasos 2 a 5 para la otra mitad de la curva que se muestra en el cuadrante *FICG* en la figura 9.9.

El descenso con aceleración constante se construye como una imagen especular de la figura 9.9.

9.5.3 Movimiento armónico

Como se vio en los esquemas polinomiales del seguidor que se acaban de describir, se presentan problemas inerciales en las discontinuidades de las curvas de movimiento. Para abordar esa desventaja, se debe estudiar el movimiento armónico, el cual tiene su origen en las funciones trigonométricas y, por ende, presenta curvas muy suaves de movimiento. Desde el punto de vista físico, es la proyección del movimiento de un punto sobre un disco que gira proyectado en una línea recta. Las características dinámicas de una elevación armónica se listan en la tabla 9.3.

Este esquema de movimiento mejora indudablemente las curvas anteriores porque tiene una aceleración continua suave.

TABLA 9.1 Cinemática del seguidor de la leva para movimiento con velocidad constante

	Elevación	Descenso
Desplazamiento:	$\Delta R_i = H_0 + \frac{H_i t_i}{T_i} = H_0 + \frac{H_i \phi_i}{\beta_i}$	$\Delta R_j = H_F + H_j\left(1 - \frac{t_j}{T_j}\right) = H_F + H_j\left(1 - \frac{\phi_j}{\beta_j}\right)$
Velocidad:	$v_i = \frac{H_i}{T_i} = \frac{H_i \omega}{\beta_i}$	$v_j = \frac{-H_j}{T_j} = \frac{-H_j \omega}{\beta_j}$
Aceleración:	$a = 0$ (∞ en las transiciones)	$a = 0$ (∞ en las transiciones)

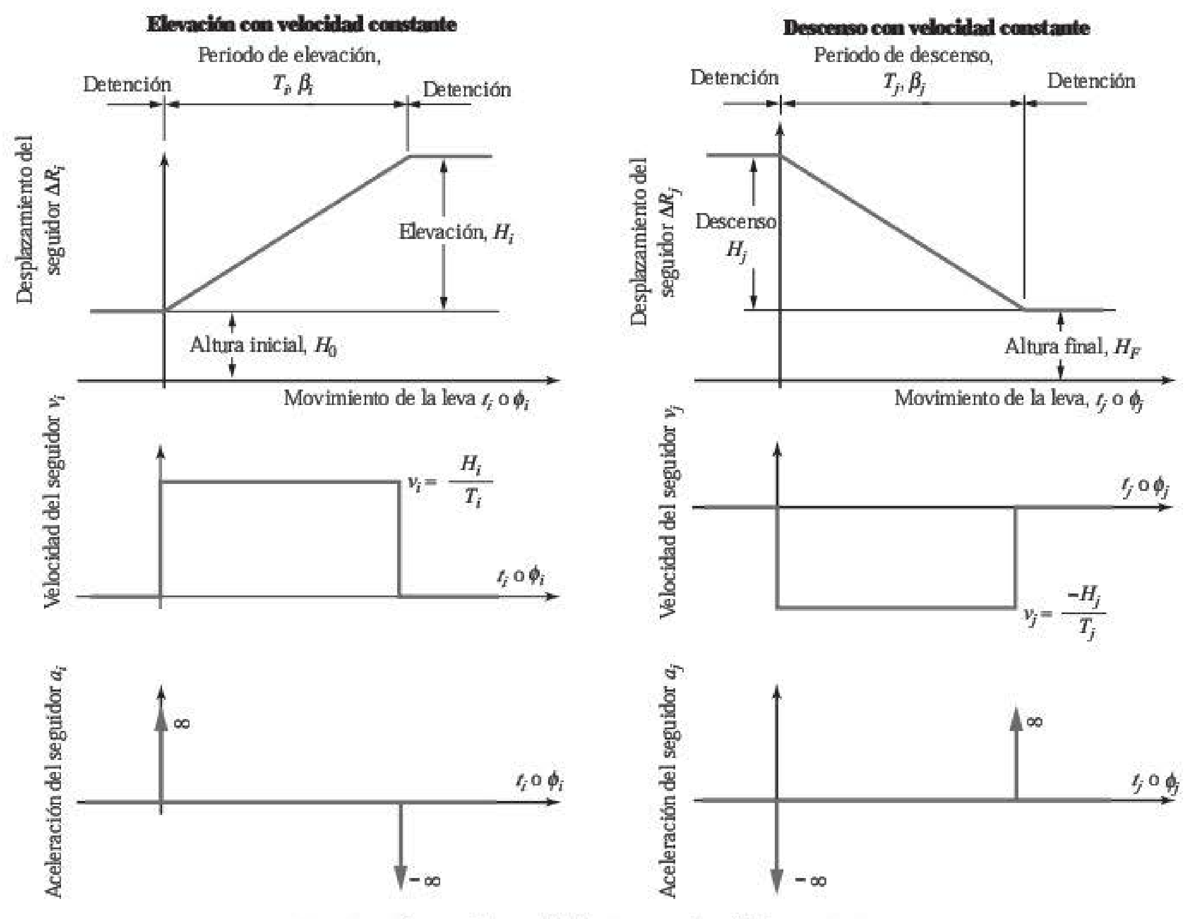


FIGURA 9.7 Curvas de movimiento con velocidad constante.

TABLA 9.2 Cinemática del seguidor de la leva para movimiento con aceleración constante

	Elevación	**Descenso**
Para $0 < t < 0.5\ T\ (0 < \phi < 0.5\ \beta)$:		
Desplazamiento:	$\Delta R_i = H_0 + 2H_i\left(\frac{t_i}{T_i}\right)^2 = H_0 + 2H_i\left(\frac{\phi_i}{\beta_i}\right)^2$	$\Delta R_i = H_F + H_j - 2H_j\left(\frac{t_j}{T_j}\right)^2 = H_F + H_j - 2H_j\left(\frac{\phi_j}{\beta_j}\right)^2$
Velocidad:	$v_i = \frac{4H_i t_i}{T_i^2} = \frac{4H_i\omega\phi_i}{\beta_i^2}$	$v_j = \frac{-4H_j t_j}{T_j^2} = \frac{-4H_j\omega\phi_j}{\beta_j^2}$
Aceleración:	$a_i = \frac{4H_i}{T_i^2} = \frac{4H_i\omega^2}{\beta_i^2}$	$a_j = \frac{-4H_j}{T_j^2} = \frac{-4H_j\omega^2}{\beta_j^2}$
Para $0.5\ T < t < T\ (0.5\ \beta < \phi < \beta)$:		
Desplazamiento:	$\Delta R_i = H_0 + H_i - 2H_i\left(1 - \frac{t_i}{T_i}\right)^2 = H_0 + H_i + 2H_i\left(1 - \frac{\phi_i}{\beta_i}\right)^2$	$\Delta R_j = H_F + 2H_j\left(1 - \frac{t_j}{T_j}\right)^2 = H_F + 2H_j\left(1 - \frac{\phi_j}{\beta_j}\right)^2$
Velocidad:	$v_i = \frac{4H_i}{T_i}\left(1 - \frac{t_i}{T_i}\right) = \frac{4H_i\omega}{\beta_i}\left(1 - \frac{\phi_i}{\beta_i}\right)$	$v_i = \frac{-4H_j}{T_j}\left(1 - \frac{t_j}{T_j}\right) = \frac{-4H_j\omega}{\beta_j}\left(1 - \frac{\phi_j}{\beta_j}\right)$
Aceleración:	$a_i = \frac{-4H_i}{T_i^2} = \frac{-4H_i\omega^2}{\beta_i^2}$	$a_j = \frac{4H_j}{T_j^2} = \frac{4H_j\omega^2}{\beta_j^2}$

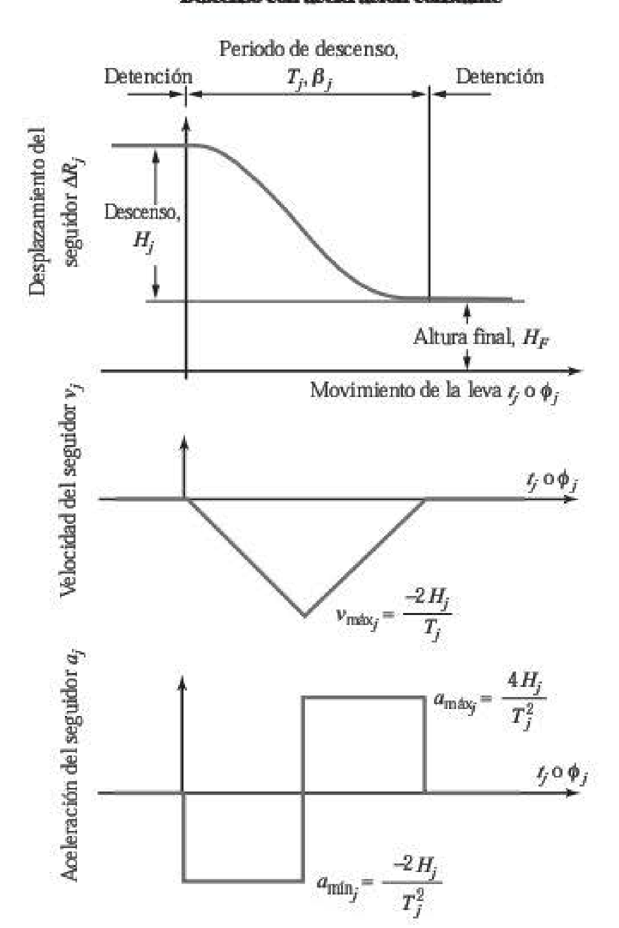


FIGURA 9.8 Curvas de movimiento con aceleración constante.

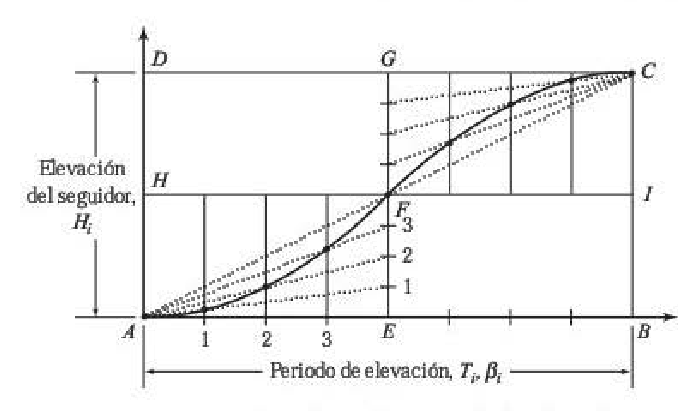


FIGURA 9.9 Construcción de un diagrama de desplazamiento con aceleración constante.

Sin embargo, tiene un cambio repentino de aceleración en los extremos del movimiento. Nuevamente, este cambio repentino podría ser inaceptable a grandes velocidades.

En la figura 9.10 se muestra un diagrama de desplazamiento armónico, junto con las curvas de velocidad y aceleración.

Como en otros esquemas, se requiere un diagrama de desplazamiento a escala para construir el perfil real de la leva. Se pueden usar las ecuaciones de la tabla 9.3, junto con una hoja de cálculo u otro paquete que grafique ecuaciones, para elaborar este diagrama. Aun cuando este método analítico es preciso, se debe tener cuidado en elaborar el diagrama con exactitud.

La construcción gráfica de un diagrama de desplazamiento es un método alternativo para generar el diagrama de desplazamiento a escala. Esta construcción usando el esquema de movimiento armónico se realiza observando la figura 9.11 y aplicando el siguiente procedimiento:

1. Construir un semicírculo con diámetro igual a la elevación (o descenso) deseada.
2. Dividir el tiempo de elevación en incrementos iguales y sucesivos.
3. Dividir el semicírculo en el mismo número de divisiones iguales del periodo de elevación del seguidor.
4. Trazar líneas verticales a partir de las divisiones sobre el eje de tiempo.
5. Trazar líneas horizontales desde los puntos de las divisiones sobre el semicírculo hasta las líneas de división correspondientes sobre el eje de tiempo.
6. Trazar una curva suave a través de los puntos de intersección obtenidos en el paso anterior.

El descenso armónico se construye como una imagen especular de la figura 9.11.

9.5.4 Movimiento cicloidal

El movimiento cicloidal es otro esquema de movimiento derivado de funciones trigonométricas. Este esquema también

TABLA 9.3 Cinemática del seguidor de una leva con movimiento armónico

	Elevación	Descenso
Desplazamiento:	$\Delta R_i = H_0 + \frac{H_i}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= H_0 + \frac{H_i}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$\Delta R_j = H_F + \frac{H_j}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t_j}{T_j}\right)\right]$ $= H_F + \frac{H_j}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$
Velocidad:	$v_i = \frac{\pi H_i}{2T_i}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= \frac{\pi H_i \omega}{2\beta_i}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$v_j = \frac{-\pi H_j}{2T_j}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_j}{T_j}\right)\right]$ $= \frac{-\pi H_j \omega}{2\beta_j}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$
Aceleración:	$a_i = \frac{\pi^2 H_i}{2T_i^2}\left[\cos\left(\frac{\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= \frac{\pi^2 H_i \omega^2}{2\beta_i^2}\left[\cos\left(\frac{\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$a_j = \frac{-\pi^2 H_i}{2T_i^2}\left[\cos\left(\frac{\pi t_j}{T_j}\right)\right]$ $= \frac{-\pi^2 H_j \omega^2}{2\beta_j^2}\left[\cos\left(\frac{\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$

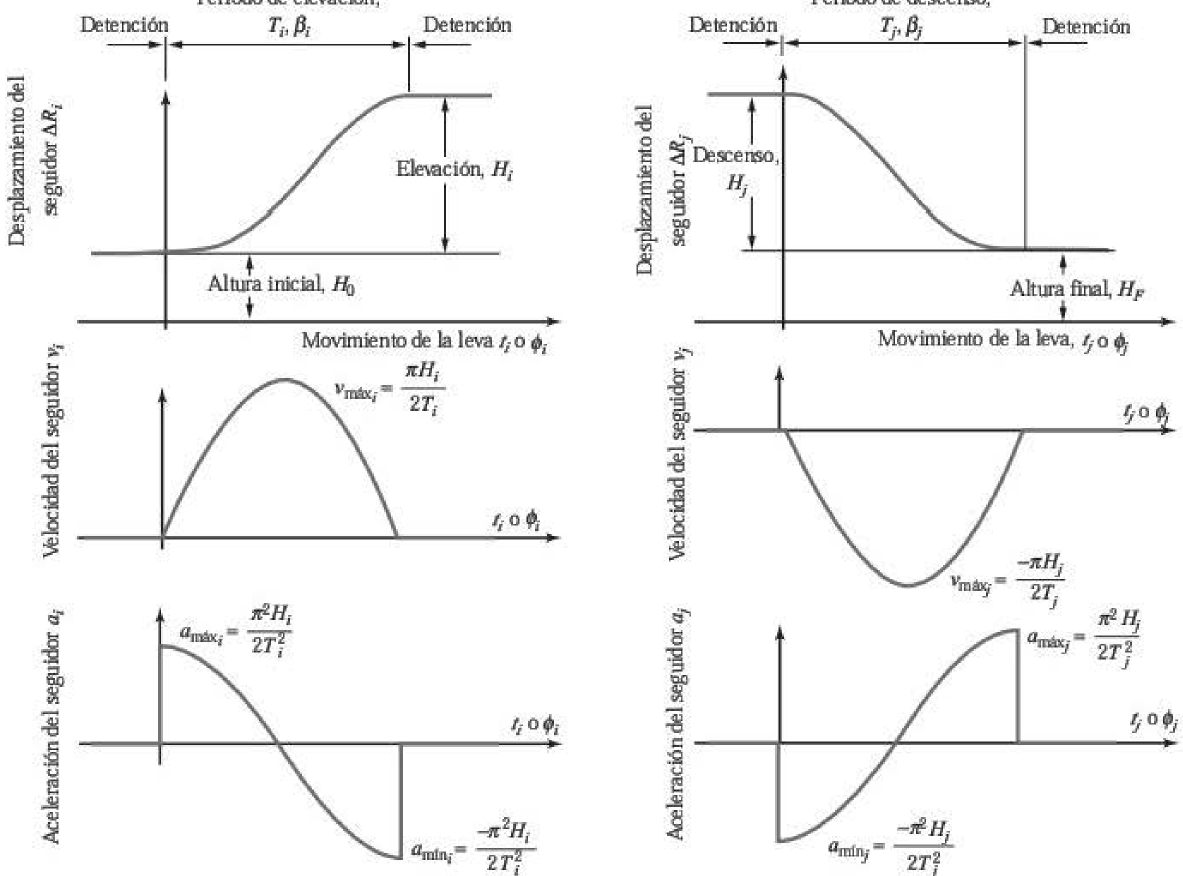


FIGURA 9.10 Curvas de movimiento armónico.

presenta curvas de movimiento muy suaves y no tiene cambios repentinos de aceleración en los extremos del movimiento, lo cual lo vuelve popular en aplicaciones de alta velocidad. Tiene escaso desgaste por vibración y características de esfuerzo de todas las curvas básicas descritas. Desde un punto de vista físico, es el movimiento de un punto sobre un disco que rueda sobre una línea recta. Las características dinámicas de la elevación cicloidal se listan en la tabla 9.4. En la figura 9.12 se presenta un diagrama de desplazamiento cicloidal, junto con las curvas de velocidad y aceleración.

Como antes, se requiere un diagrama de desplazamiento a escala para construir el perfil real de la leva. Se utilizan las

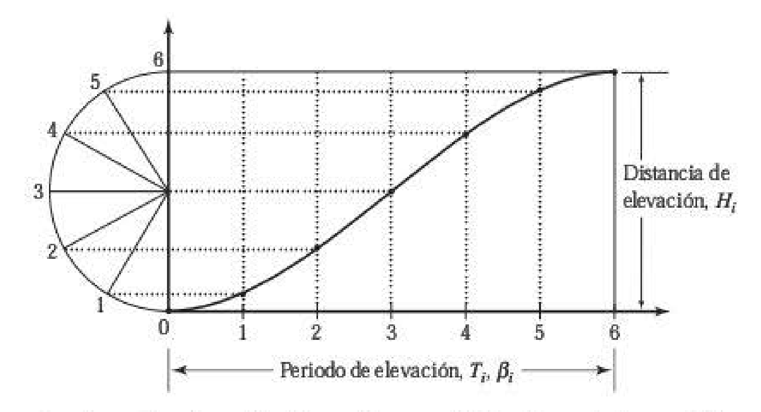


FIGURA 9.11 Construcción de un diagrama de desplazamiento armónico.

ecuaciones presentadas en la tabla 9.4, junto con una hoja de cálculo o un paquete que grafique ecuaciones para completar este diagrama. Aunque este método analítico es preciso, se debe tener cuidado de graficar el diagrama totalmente a escala, si se emplean técnicas de construcción gráfica para diseñar la leva.

La construcción gráfica de un diagrama de desplazamiento es un método alternativo para generar el diagrama de desplazamiento a escala. Esta construcción, usando el esquema de movimiento cicloidal, se realiza remitiéndose a la figura 9.13 y aplicando el siguiente procedimiento:

1. Sobre una cuadrícula de un diagrama de desplazamiento, trazar una línea del punto inicial de la elevación (o descenso) al punto final. La línea se dibuja de *A* a *C* en la figura 9.13.
2. Extender la línea dibujada en el paso anterior y trazar un círculo de radio $r = H/2\pi$, con centro en cualquier lugar sobre la línea.
3. Construir una línea vertical a través del centro del círculo.
4. Dividir el círculo en un número par de partes.
5. Unir las líneas que dividen al círculo como se indica en la figura 9.13 (1 a 4, 2 a 5, etcétera).
6. Marcar los puntos de intersección de las líneas dibujadas en el paso 5 con la línea vertical trazada en el paso 3.
7. Dividir el tiempo en el mismo número de partes iguales como el círculo. Trazar líneas verticales a partir de estos puntos de división.
8. Proyectar los puntos identificados en el paso 6 a lo largo de una línea paralela a la línea construida en el paso 1.
9. Marcar los puntos de intersección de las líneas construidas en el paso 8 con las líneas verticales dibujadas en el paso 7, como se indica en la figura 9.13.
10. Construir una curva suave a través de los puntos identificados en el paso 9.

El descenso cicloidal se construye como una imagen especular de la figura 9.13.

TABLA 9.4 Cinemática del seguidor de una leva con movimiento cicloidal

	Elevación	Descenso
Desplazamiento:	$\Delta R_i = H_0 + H_i\left[\frac{t_i}{T_i} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= H_0 + H_i\left[\frac{\phi_i}{\beta_i} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$\Delta R_j = H_F + H_j\left[1 - \frac{t_j}{T_j} + \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t_j}{T_j}\right)\right]$ $= H_F + H_j\left[\frac{\phi_j}{\beta_j} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$
Velocidad:	$v_i = \frac{H_i}{T_i}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= \frac{H_i\omega}{\beta_i}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$v_j = \frac{-H_j}{T_i}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= \frac{-H_j\omega}{\beta_j}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$
Aceleración:	$a_i = \frac{2\pi H_i}{T_i^2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{T_i}\right)\right]$ $= \frac{2\pi H_i\omega^2}{\beta_i^2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi \phi_i}{\beta_i}\right)\right]$	$a_j = \frac{-2\pi H_j}{T_j^2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi t_j}{T_j}\right)\right]$ $= \frac{-2\pi H_j\omega^2}{\beta_j^2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi \phi_j}{\beta_j}\right)\right]$

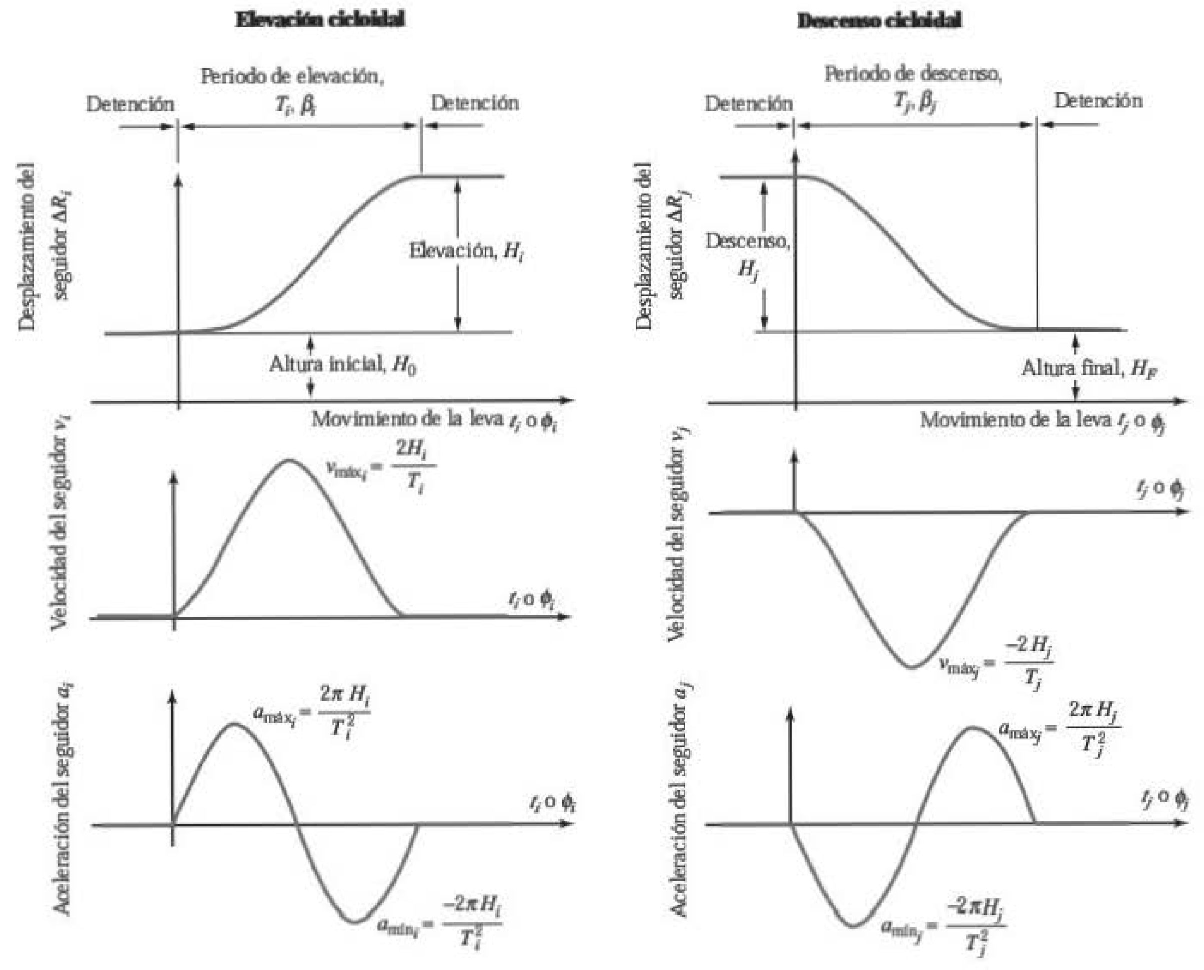


FIGURA 9.12 Curvas de movimiento cicloidal.

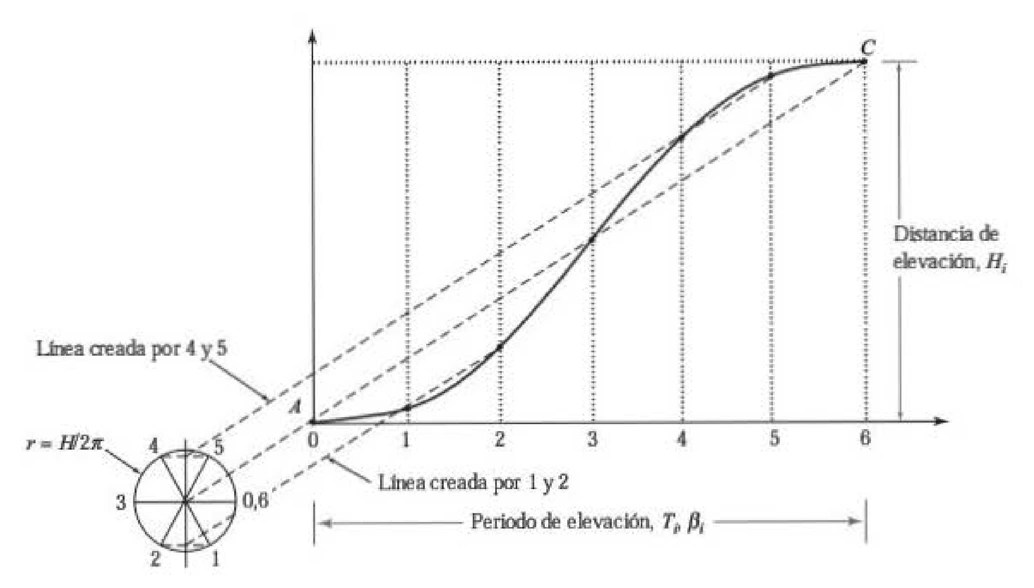


FIGURA 9.13 Construcción de un diagrama de desplazamiento cicloidal.

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.2

Se va a diseñar una leva para una parte de un cargador automático, como se muestra en la figura 9.14. Empleando las ecuaciones de movimiento, construya una tabla que ilustre los desplazamientos del seguidor contra el tiempo y contra la rotación de la leva. También grafique estos datos cuando el movimiento prescrito de esta aplicación sea como sigue:

1. Elevación de 50 mm en 1.5 s con el esquema de movimiento de velocidad constante.
2. Retorno en 2.0 s con el uso del esquema de movimiento cicloidal.
3. Detención de 0.75 s.
4. Se repite la secuencia.

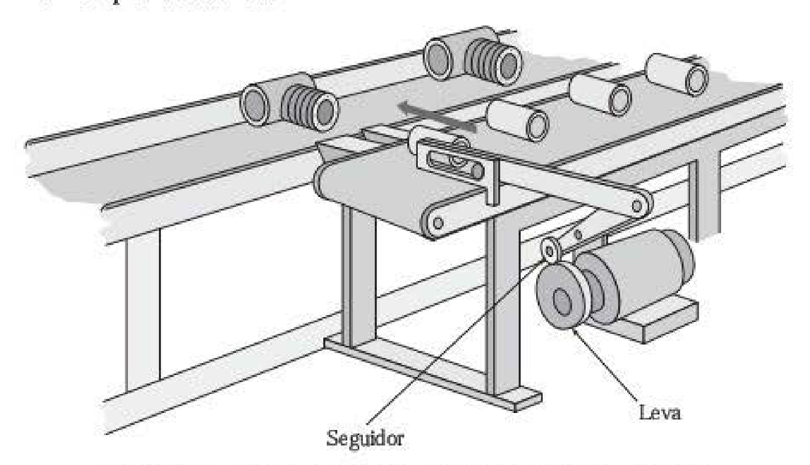


FIGURA 9.14 Parte del cargador del problema de ejemplo 9.2.

SOLUCIÓN:

1. ***Calcule el tiempo para completar un ciclo completo***

El tiempo transcurrido para completar un ciclo es necesario para determinar la velocidad requerida de la leva.

$$\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3$$
$$= 1.5 + 2.0 + 0.75 = 4.25 \text{s}$$

2. ***Calcule la velocidad angular requerida de la leva***

Si se parte de la ecuación (9.2),

$$\omega_{\text{leva}} = \frac{1 \text{ rev}}{\Sigma T_i} = \frac{1 \text{ rev}}{4.25 \text{s}} = 0.235 \text{ rev/s}\left(\frac{60 \text{s}}{1 \text{ min}}\right) = 14.12 \text{ rpm}$$

3. ***Determine la rotación de la leva para cada intervalo de movimiento del seguidor***

El incremento angular de la leva consumido por cada secuencia de movimiento del seguidor se calcula con la ecuación (9.1).

$$\beta_1 = (\omega_{\text{leva}})(T_1) = (0.235 \text{ rev/s})(1.5\text{s}) = 0.353 \text{ rev} = 127.0°$$
$$\beta_2 = (0.235 \text{rev/s})(2.0\text{s}) = 0.470 \text{rev} = 169.3°$$
$$\beta_3 = (0.235 \text{rev/s})(0.75\text{s}) = 0.177 \text{rev} = 63.7°$$

4. ***Calcule el desplazamiento durante cada intervalo de movimiento del seguidor***

El primer intervalo del movimiento tiene $H_1 = 50$ mm y $T_1 = 1.5$ s. Para una elevación con velocidad constante, la ecuación del desplazamiento está dada por

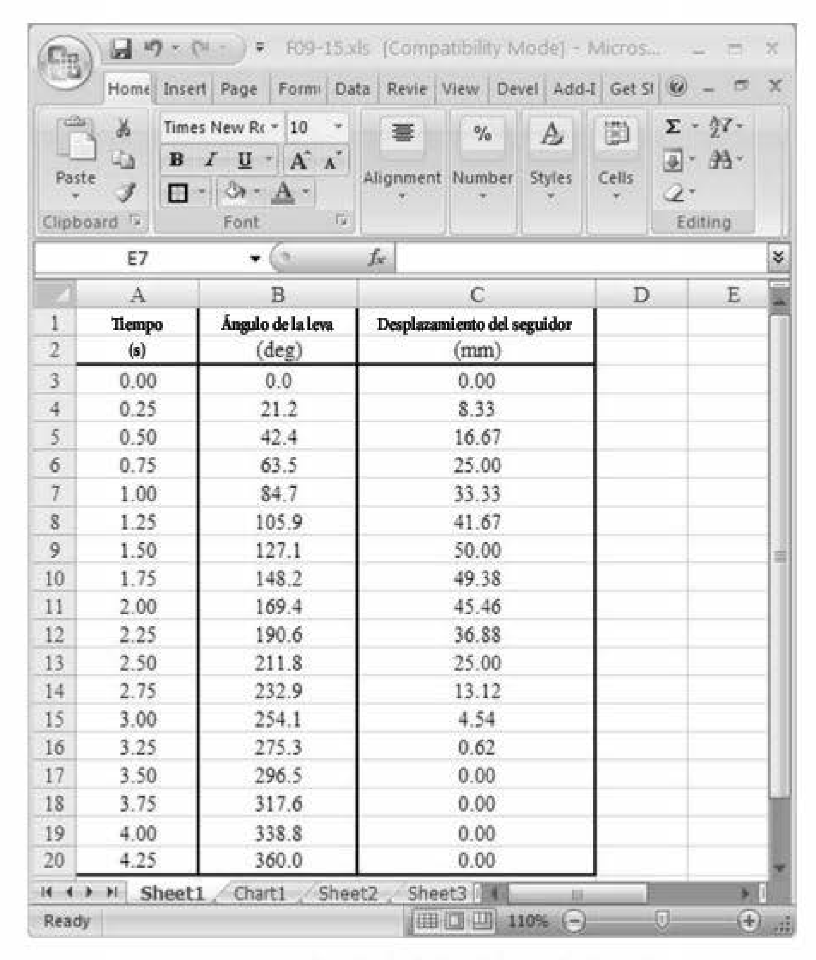
$$\Delta R_1 = \frac{H_1 t_1}{T_1}$$

El segundo intervalo del movimiento tiene $H_2 = 50$ mm y $T_2 = 2.0$ s. Para el descenso cicloidal, la ecuación de desplazamiento está dada por

$$\Delta R_2 = H_2\left[1 - \left(\frac{t_2}{T_2}\right) + \frac{1}{2\pi} \text{ sen}\left(\frac{2\pi t_2}{T_2}\right)\right]$$

El último intervalo de movimiento es una detención, donde ΔR es constante. Esta detención ocurre en la posición retraída del seguidor; por lo tanto, $\Delta R_3 = 0$.

Estas ecuaciones se introdujeron en la hoja de cálculo (figura 9.15). Los datos se usaron para generar la gráfica de la figura 9.16.



	A	B	C
1	Tiempo	Ángulo de la leva	Desplazamiento del seguidor
2	(s)	(deg)	(mm)
3	0.00	0.0	0.00
4	0.25	21.2	8.33
5	0.50	42.4	16.67
6	0.75	63.5	25.00
7	1.00	84.7	33.33
8	1.25	105.9	41.67
9	1.50	127.1	50.00
10	1.75	148.2	49.38
11	2.00	169.4	45.46
12	2.25	190.6	36.88
13	2.50	211.8	25.00
14	2.75	232.9	13.12
15	3.00	254.1	4.54
16	3.25	275.3	0.62
17	3.50	296.5	0.00
18	3.75	317.6	0.00
19	4.00	338.8	0.00
20	4.25	360.0	0.00

FIGURA 9.15 Hoja de cálculo del problema de ejemplo 9.2.

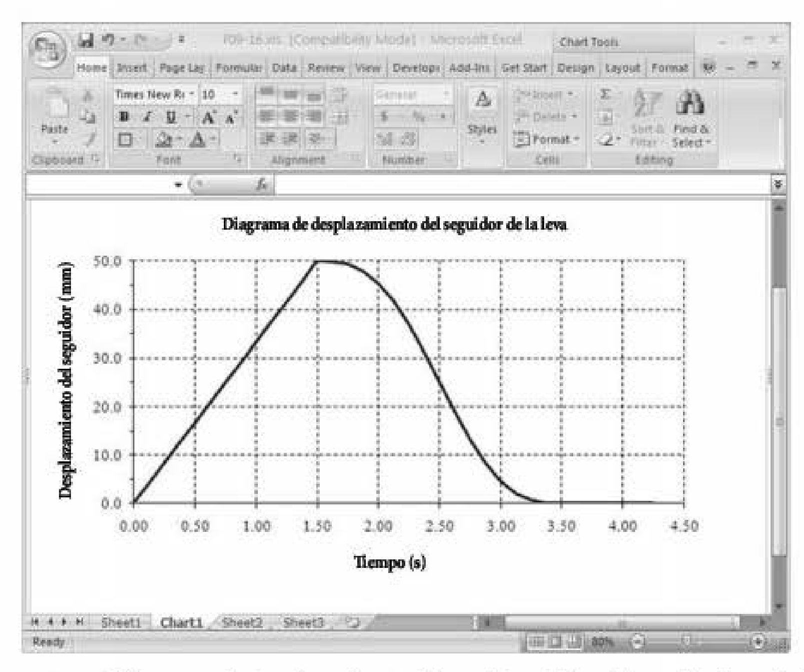


FIGURA 9.16 Diagrama de desplazamiento del seguidor del problema de ejemplo 9.2.

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.3

Construya gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor para la aplicación del problema de ejemplo 9.2.

SOLUCIÓN: Con los datos del problema de ejemplo 9.2, se construye el diagrama de desplazamiento mostrado en la figura 9.17. Observe que el círculo usado para construir el descenso cicloidal tiene un radio de:

$$r = \frac{H_1}{2\pi} = \frac{(50\,\text{mm})}{2\pi} = 7.96\,\text{mm}$$

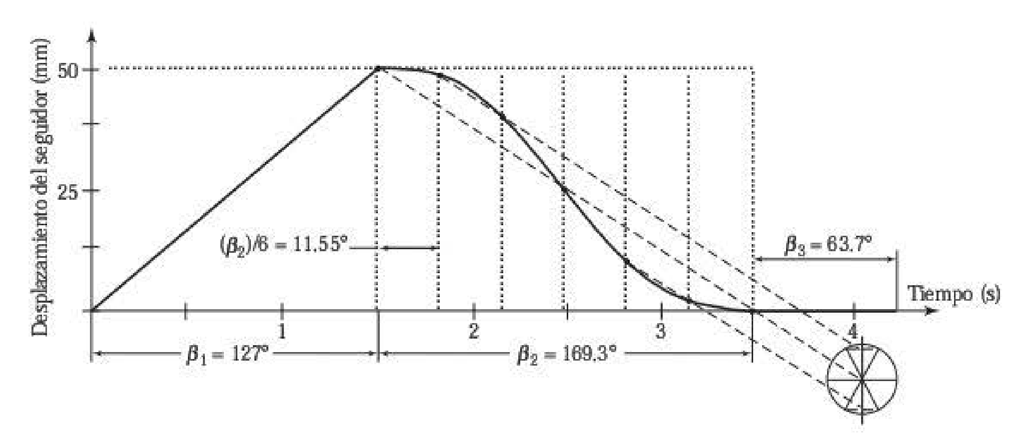


FIGURA 9.17 Diagrama del desplazamiento del seguidor del problema de ejemplo 9.3.

9.5.5 Esquemas de movimiento combinado

En la selección de un esquema de movimiento particular, un objetivo es minimizar las fuerzas dinámicas inducidas durante el intervalo de elevación o descenso. Lo anterior se logra al minimizar la magnitud de la aceleración del seguidor y mantenerla continua. Asimismo, la energía cinética almacenada en el seguidor es proporcional al cuadrado de la velocidad. Por lo tanto, minimizar la velocidad máxima es otro objetivo que debería considerarse cuando se especifica un esquema de movimiento.

Además de estos objetivos, en aplicaciones de alta velocidad, es aconsejable mantener una aceleración suave para eliminar los cambios bruscos en las cargas dinámicas. La derivada de la aceleración con respecto al tiempo se conoce como *tirón*. Los cambios repentinos en la aceleración se cuantifican como magnitudes altas de un tirón. Así, reducir la magnitud y mantener continua la curva del tirón contra el tiempo da ventajas sobre la carga de la máquina.

Con frecuencia se ajustan los aspectos negativos de la velocidad constante y la aceleración constante, así como los esquemas armónico y cicloidal, para mejorar las características del movimiento. El movimiento resultante se conoce como esquema combinado. Más adelante se presentan descripciones de algunos de los esquemas combinados más comunes. Se recomienda consultar fuentes más completas de diseño de levas para obtener los detalles de las ecuaciones de movimiento [refs. 5, 11, 14]. Existe software como Dynacam, Analytix/Cams y CamTrax para construir diagramas de movimiento del desplazamiento del seguidor de estos y otros esquemas.

La **aceleración trapezoidal** es un esquema que mejora el esquema de aceleración constante que se presenta en la figura 9.10, donde la curva de aceleración contra el tiempo aparece como una onda cuadrada. La dificultad con la onda cuadrada es que la aceleración y, por ende, la fuerza inercial cambian bruscamente, de modo que se induce un tirón en la máquina. El esquema de aceleración trapezoidal suaviza las transiciones donde la curva de aceleración contra el tiempo aparece como un trapecio. Sin embargo, el área perdida al eliminar las esquinas se debe sustituir incrementando la aceleración máxima.

La **aceleración trapezoidal modificada** mejora el esquema trapezoidal sustituyendo los lados inclinados de la curva de aceleración contra el tiempo con partes de una onda senoidal. Eliminando las esquinas, se crea una curva de aceleración suave. La pendiente continua (tirón) garantiza que el cambio en las fuerzas dinámicas sea suave.

El **desplazamiento polinomial 3-4-5** es otro esquema que mejora el esquema de aceleración constante. Como es un polinomio de segundo orden, el esquema de aceleración constante se ve obstaculizado con una curva discontinua de aceleración. Como en el esquema trapezoidal, un método para eliminar la discontinuidad es utilizar un polinomio de orden superior, de modo que se formula un esquema que incorpora términos de tercer, cuarto y quinto órdenes. Con un término de quinto orden, este esquema da una pendiente continua de la curva de aceleración contra el tiempo. Sin embargo, la curva del tirón contra el tiempo tendrá discontinuidades.

El **desplazamiento polinomial 4-5-6-7** amplía el esquema polinomial 3-4-5, el cual incluye un término de séptimo orden para suministrar un tirón continuo y suave.

La **aceleración senoidal modificada** mejora el esquema cicloidal incorporando un segundo término senoidal con una frecuencia diferente; de este modo, la suavidad del movimiento cicloidal se retiene y el máximo se reduce.

En la tabla 9.5 se muestra un resumen de la velocidad pico, la aceleración pico y el tirón pico de los diferentes esquemas de movimiento, en función de la elevación H y del periodo del intervalo T.

TABLA 9.5 Comparaciones de los esquemas de movimiento

Esquema de movimiento	Velocidad pico	Aceleración pico	Tirón pico
Velocidad constante	1.000 H/T	∞	∞
Aceleración constante	2.000 H/T	4.000 H/T^2	∞
Armónico	1.571 H/T	4.945 H/T^2	∞
Cicloidal	2.000 H/T	6.283 H/T^2	40 H/T^3
Trapezoidal	2.000 H/T	5.300 H/T^2	44 H/T^3
Trapezoidal modificado	2.000 H/T	4.888 H/T^2	61 H/T^3
Polinomial 3-4-5	1.875 H/T	5.777 H/T^2	60 H/T^3
Polinomial 4-5-6-7	2.188 H/T	7.526 H/T^2	52 H/T^3
Senoidal modificado	1.760 H/T	5.528 H/T^2	69 H/T^3

9.6 DISEÑO GRÁFICO DEL PERFIL DE UNA LEVA DE DISCO

Una vez que en un diagrama de desplazamiento se define el movimiento deseado de una leva y su seguidor, es posible diseñar la forma real de la leva. La forma de la leva depende de su tamaño y de la configuración del seguidor. Antes de diseñar el perfil de una leva de disco, se deben definir algunas características geométricas. En la figura 9.18 se ilustran las siguientes características.

El *círculo base* es el círculo más pequeño con centro en el eje de rotación de la leva y es tangente a la superficie de la leva.

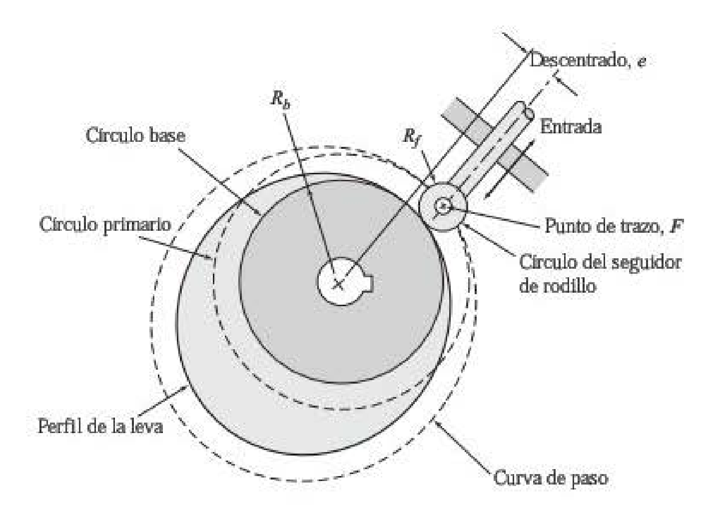


FIGURA 9.18 Nomenclatura de la leva.

El tamaño del círculo base está supeditado normalmente a las restricciones espaciales de la aplicación. En general, un círculo base grande origina menos problemas con la transmisión de la fuerza. Sin embargo, un círculo base grande y, por consiguiente, una leva grande se contraponen con el objetivo usual de diseñar productos pequeños.

El *punto de trazo* sirve como referencia para determinar la ubicación efectiva del seguidor. En un seguidor de cuña es el punto donde entran en contacto el seguidor y la leva. En un seguidor de rodillo, el punto de trazo se ubica en el centro del rodillo. En un seguidor de cara plana o esférica, el punto de trazo se ubica sobre la superficie de contacto del seguidor.

La *posición de entrada* de la leva es la orientación que corresponde a una posición de referencia de 0° en un diagrama de desplazamiento.

El *círculo primario* es un círculo que se dibuja a través del punto de trazo del seguidor, mientras la leva está en su posición de entrada.

La *curva de paso* es la trayectoria del centro del seguidor.

Para facilitar la construcción del perfil de la leva, se utiliza la inversión cinemática. Se supone que la leva está inmóvil. Luego se gira el seguidor en dirección opuesta al giro de la leva. La posición deseada del seguidor, en varias ubicaciones, se construye a partir del círculo base. Conceptualmente, esto es comparable a enrollar el diagrama de desplazamiento alrededor del círculo base, creando así la forma de la leva.

En las secciones siguientes se ilustran los procedimientos específicos para diversas configuraciones del seguidor. En todas las construcciones se emplea el diagrama general de desplazamiento de la figura 9.19. Observe que se han identificado diferentes desplazamientos del seguidor en ángulos específicos de la leva, en las secuencias de elevación y descenso del diagrama. Estos desplazamientos prescritos se convierten en el perfil de la leva.

9.6.1 Seguidor de cuña en línea

La forma más eficiente de describir la construcción de una leva con un seguidor de cuña es a través de la construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se ha construido el perfil de una leva que se utiliza con un seguidor de cuña, que se muestra en la figura 9.20.

Para construir gráficamente un perfil de este tipo se dispone del siguiente procedimiento general:

1. Trazar el círculo base de radio R_b. El tamaño normalmente está en función de las restricciones espaciales de la aplicación.
2. Dibujar el seguidor en la posición de entrada.
3. Trazar líneas radiales del centro de la leva, en correspondencia con los ángulos de la leva identificados sobre el diagrama de desplazamiento. Para efectos de construcción, la leva permanecerá inmóvil y el seguidor girará en dirección opuesta al giro real de la leva.
4. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a las líneas radiales. Estos desplazamientos se miden desde el círculo base.
5. Dibujar una curva suave a través de los desplazamientos prescritos.

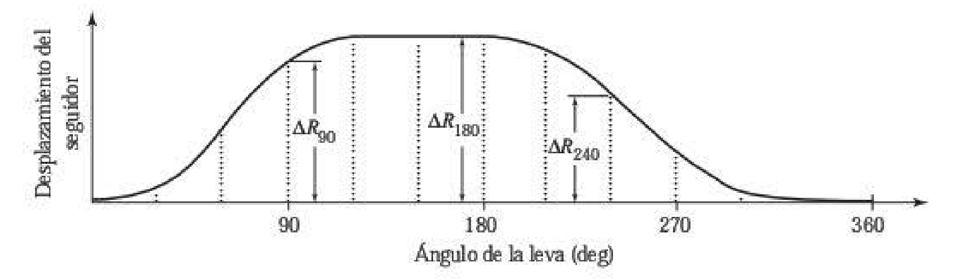


FIGURA 9.19 Diagrama general de desplazamiento del seguidor.

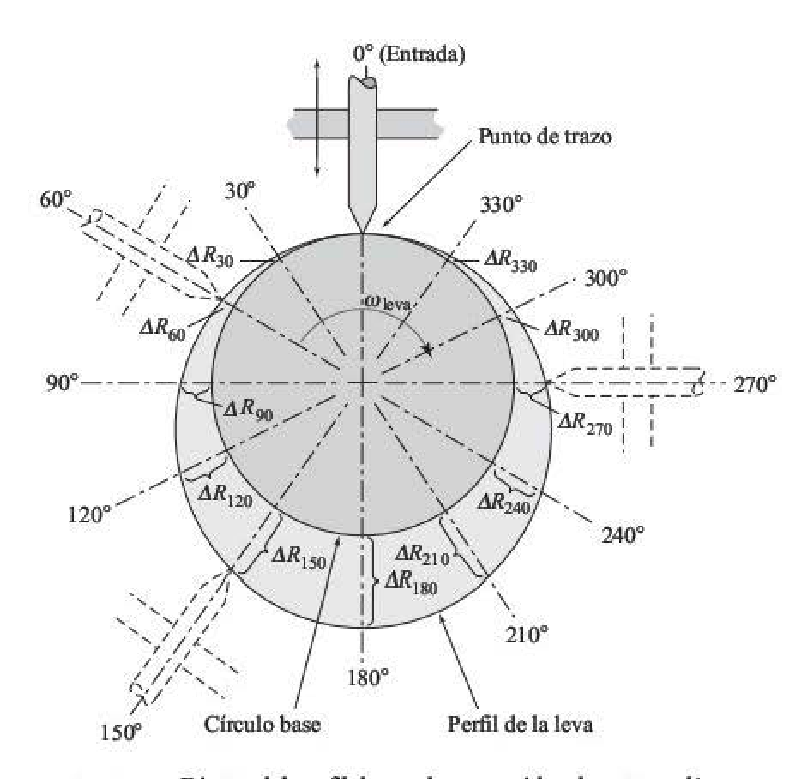


FIGURA 9.20 Diseño del perfil de una leva: seguidor de cuña en línea.

6. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, es necesario transferir puntos intermedios adicionales de los intervalos de elevación y descenso.

9.6.2 Seguidor de rodillo en línea

De nuevo, la forma más eficiente de describir la construcción de una leva con un seguidor de rodillo en línea es con su construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se construyó el perfil de una leva que se utilizará con un seguidor de rodillo en línea, el cual se ilustra en la figura 9.21. Para construir un perfil así, se usa el siguiente procedimiento general:

1. Trazar el círculo base de radio R_b. El tamaño normalmente está en función de las restricciones espaciales de la aplicación.
2. Dibujar el radio del seguidor R_f en la posición de entrada, tangente al círculo base.
3. Trazar líneas radiales a partir del centro de la leva, en correspondencia con los ángulos de esta, identificados en el diagrama de desplazamiento. Para fines de construcción, la leva permanece inmóvil y el seguidor gira en dirección opuesta al giro real de la leva.
4. Identificar el punto de trazo en su posición de entrada. En un seguidor de rodillo, este es el punto en el centro del rodillo.
5. Trazar el círculo primario a través del punto de trazo en su posición de entrada.
6. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a las líneas radiales. Estos desplazamientos se miden a partir del círculo primario.
7. Dibujar el contorno del rodillo de radio R_f, con centro en los desplazamientos prescritos identificados en el paso anterior.
8. Trazar una curva suave tangente a los contornos del rodillo en los desplazamientos prescritos.
9. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, es necesario transferir puntos intermedios adicionales de los intervalos de elevación y descenso.

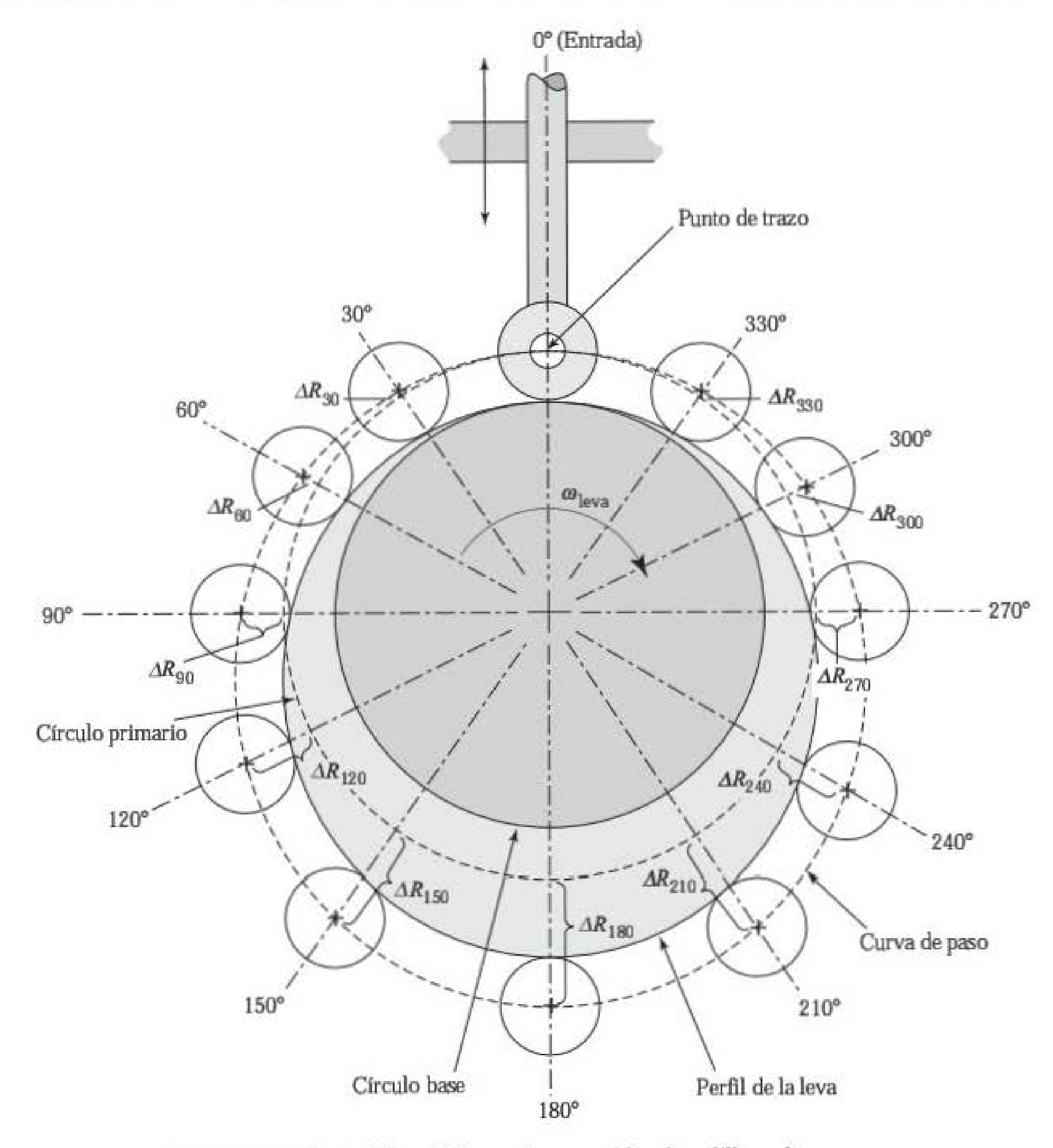


FIGURA 9.21 Diseño del perfil de una leva: seguidor de rodillo en línea.

9.6.3 Seguidor de rodillo descentrado

La forma más eficiente de describir la construcción de una leva con un seguidor de rodillo con descentrado es mediante una construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se construyó el perfil de una leva que se utilizará con un seguidor de rodillo con descentrado, el cual se muestra en la figura 9.22. Se tiene el siguiente procedimiento general para construir dicho perfil:

1. Dibujar el círculo base de radio R_b. El tamaño normalmente está en función de las restricciones espaciales de la aplicación.
2. Trazar la línea central del seguidor en la posición de entrada.
3. Dibujar el círculo primario cuyo radio es igual a la suma de los radios del círculo base y del rodillo del seguidor ($R_b < R_f$).
4. Trazar el seguidor de radio R_f en posición de entrada, con centro en donde la línea central del seguidor interseca el círculo primario.
5. Identificar el punto de trazo en posición de entrada. En un seguidor de rodillo, este es el punto que se encuentra en el centro del rodillo.
6. Dibujar el círculo con descentrado de radio e, con centro en el eje de rotación de la leva. Es tangente a la línea central del seguidor.
7. Trazar líneas tangentes al círculo de descentrado, en correspondencia con los ángulos de referencia de la leva del diagrama de desplazamiento. Para fines de construcción, la leva permanece inmóvil y el seguidor gira en dirección opuesta al giro real de la leva.
8. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a las líneas de descentrado. Tales desplazamientos se miden a partir del círculo primario.

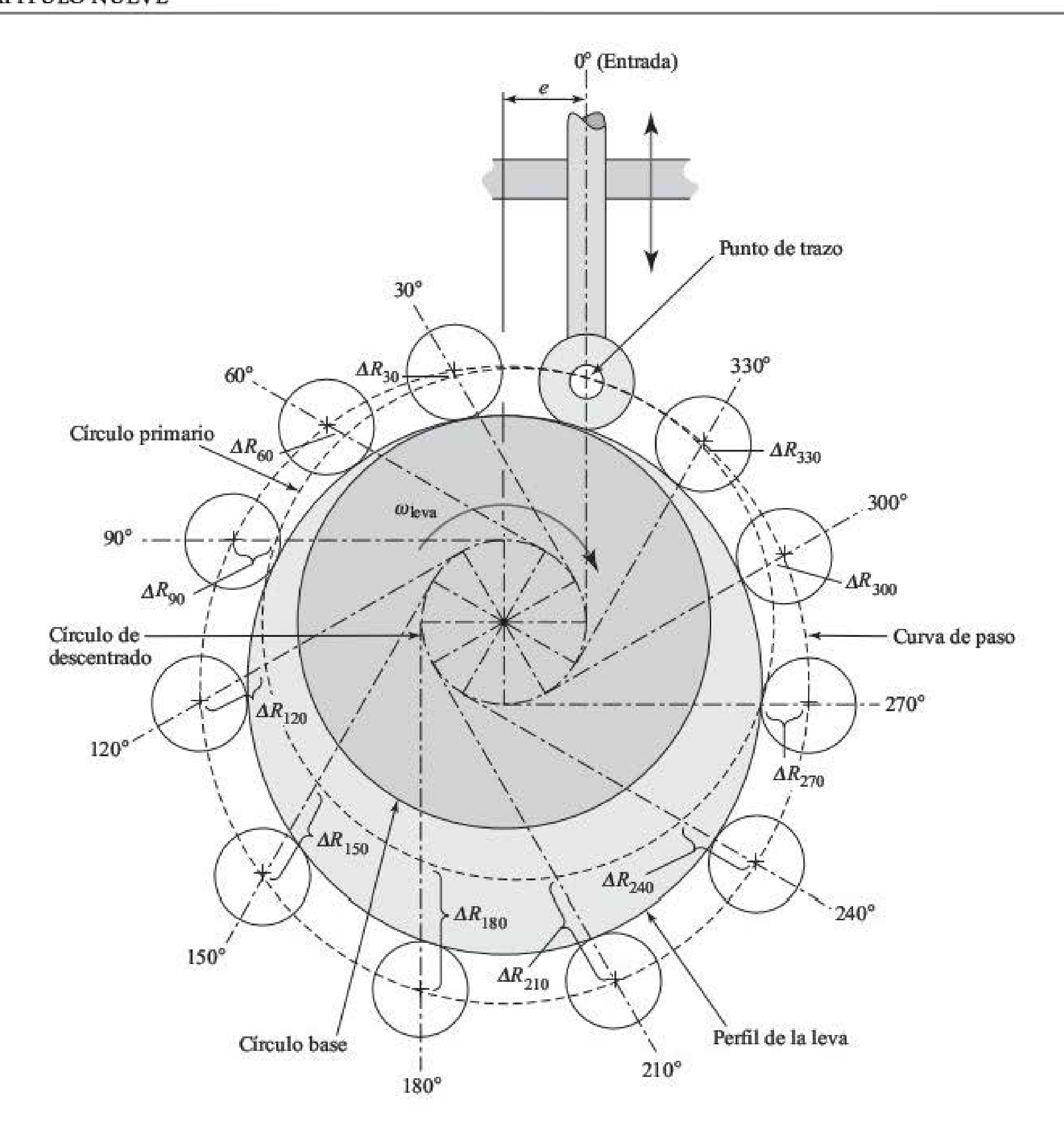


FIGURA 9.22 Diseño del perfil de una leva: seguidor de rodillo con descentrado.

9. Dibujar el contorno del rodillo de radio R_f, con centro en los desplazamientos prescritos identificados en el paso anterior.
10. Trazar una curva suave tangente al rodillo en los desplazamientos prescritos.
11. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, es necesario transferir puntos intermedios adicionales de los intervalos de elevación y descenso.

9.6.4 Seguidor de traslación con cara plana

La forma más eficiente de describir la construcción de una leva con un seguidor de cara plana es mediante una construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se ha construido el perfil de una leva que se utilizará con un seguidor de traslación de cara plana y se ilustra en la figura 9.23.

Para construir gráficamente un perfil como este se tiene el siguiente procedimiento general:

1. Trazar el círculo base de radio R_b. El tamaño normalmente está en función de las restricciones espaciales de la aplicación. Recuerde que para este tipo de seguidor, el círculo base también sirve como círculo primario.
2. Dibujar el seguidor en posición de entrada, tangente al círculo base.
3. Trazar líneas radiales del centro de la leva, en correspondencia con los ángulos de la leva del diagrama de desplazamiento. Para efectos de construcción, la leva permanece inmóvil y el seguidor gira en dirección opuesta al giro real de la leva.
4. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a las líneas radiales medidas a partir del círculo base.
5. Dibujar el contorno de cara plana construyendo una línea perpendicular a las líneas radiales en los desplazamientos prescritos.
6. Trazar una curva suave tangente a los contornos de cara plana.
7. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, es necesario transferir puntos intermedios adicionales de los movimientos de elevación y descenso.

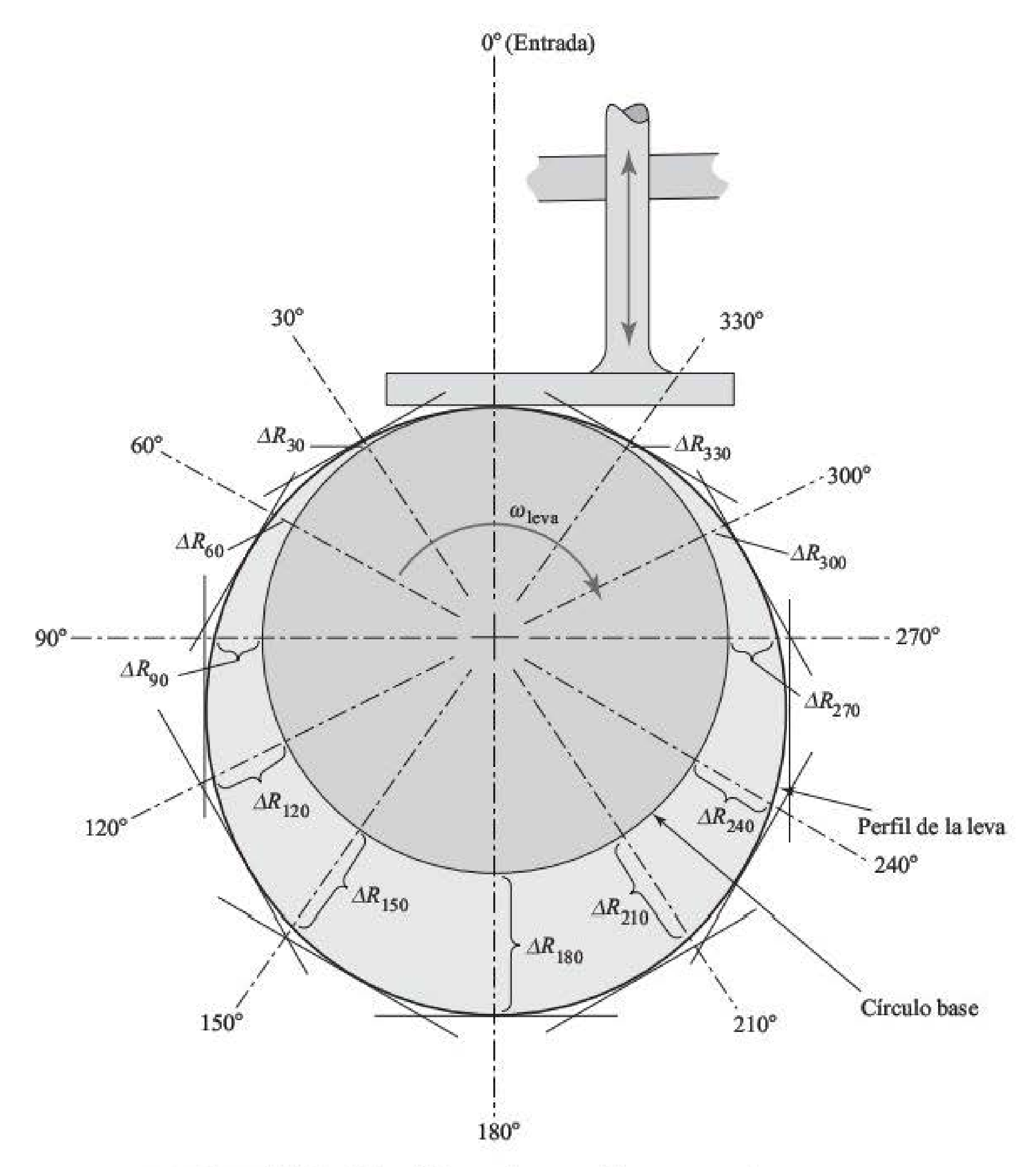


FIGURA 9.23 Diseño del perfil de una leva: seguidor con cara plana.

9.6.5 Seguidor de rodillo con pivote

El seguidor con pivote proporciona movimiento rotacional en la salida del sistema leva-seguidor. En los seguidores con traslación, se utilizan las ecuaciones presentadas en la sección 9.5 para calcular la magnitud del desplazamiento lineal instantáneo ΔR_F, la velocidad v_F y la aceleración a_F del centro del seguidor, el punto F. Para seguidores con pivote se usan las ecuaciones presentadas en la sección 9.5 para calcular la magnitud instantánea del desplazamiento rotacional $\Delta\theta_L$, la velocidad ω_L y la aceleración α_L, del eslabón seguidor. Al emplear las ecuaciones de la sección 9.5 en el análisis de movimiento giratorio, el desplazamiento prescrito del seguidor debe ser el angular $\Delta\theta_L$, en vez del lineal H.

Otra vez, la forma más eficiente de describir la construcción de una leva con un seguidor de rodillo con pivote es mediante una construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se ha construido el perfil de una leva que se utilizará con un seguidor de rodillo con pivote, que se muestra en la figura 9.24.

Para construir un perfil así, se utiliza el siguiente procedimiento general:

1. Dibujar el círculo base de radio R_b, donde el tamaño está en función de las restricciones espaciales de la aplicación.
2. Dibujar el círculo primario, cuyo radio es igual a la suma de los radios del círculo base y del rodillo del seguidor.
3. Dibujar el círculo del pivote de radio R_p. La distancia entre el pivote y el eje de la leva también es una función de las restricciones espaciales de la aplicación.
4. Ubicar la posición de entrada del pivote.
5. Trazar un arco centrado en el pivote de entrada, con un radio igual a la longitud R_L del eslabón seguidor que pivota.
6. Dibujar el seguidor de radio R_f, en posición de entrada, con centro donde el arco dibujado en el paso 5 interseca el círculo primario.
7. Trazar líneas radiales del centro de la leva al círculo del pivote, en correspondencia con los ángulos de la leva del diagrama de desplazamiento. Recuerde que el seguidor gira en dirección opuesta al giro de la leva.

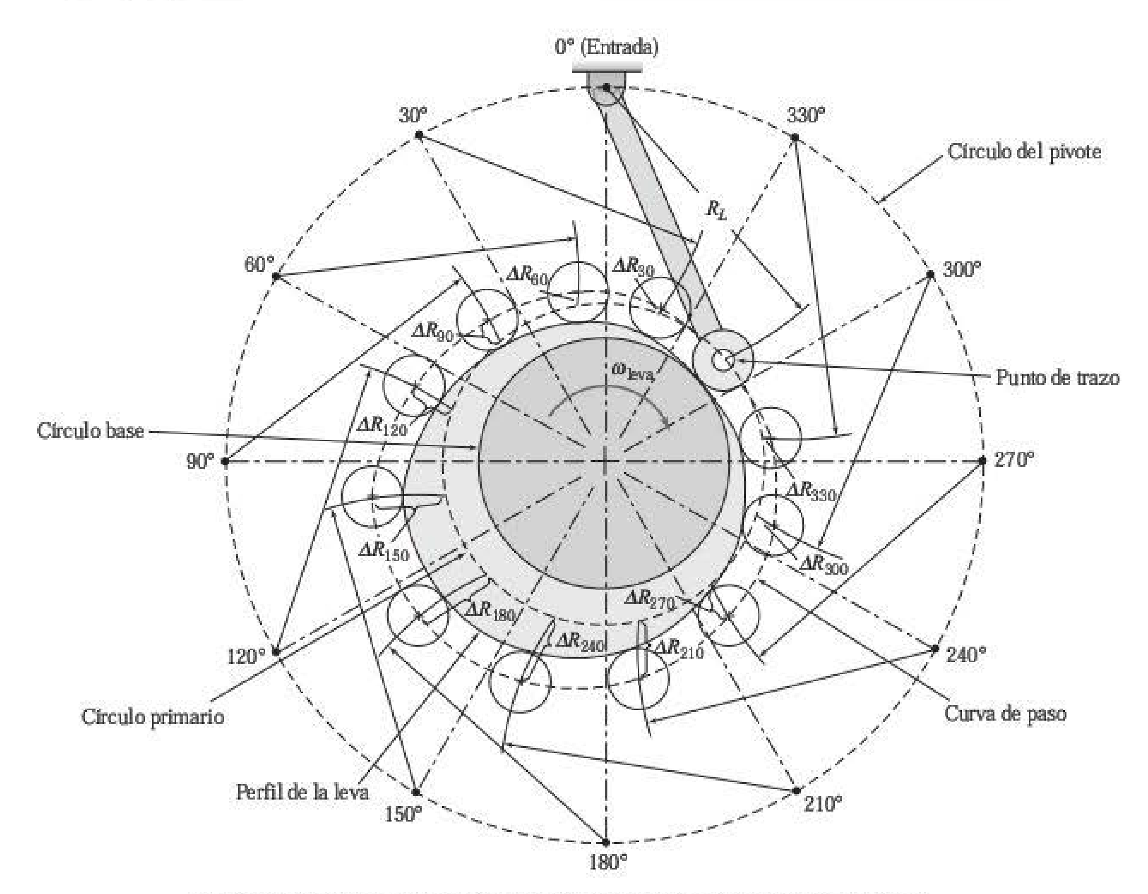


FIGURA 9.24 Diseño del perfil de una leva: seguidor de rodillo con pivote.

8. Desde cada punto pivote, dibujar un arco de radio igual a la longitud del brazo del seguidor R_L hacia afuera del círculo primario.
9. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a los arcos del pivote dibujados en el paso 8. Como se mencionó, los desplazamientos prescritos para un seguidor que pivota son angulares. Se utiliza la ecuación (9.3) para convertir el desplazamiento angular $\Delta\theta_L$ del eslabón seguidor, a desplazamiento lineal ΔR_F del centro del rodillo.

$$\Delta R_F = R_L\sqrt{2(1 - \cos\Delta\theta_L)}. \qquad \textbf{(9.3)}$$

10. Dibujar el contorno del rodillo con centro en los desplazamientos prescritos identificados en el paso anterior.
11. Trazar una curva suave tangente al rodillo en estos desplazamientos prescritos.
12. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, quizá sea necesario transferir puntos intermedios adicionales de los movimientos de elevación y descenso.

9.7 ÁNGULO DE PRESIÓN

Como la fuerza siempre se transmite de modo perpendicular a las superficies en contacto, la leva no siempre empuja al seguidor en la dirección de su movimiento. Como se vio en la sección anterior, la curvatura de la leva afecta la posición de la línea central del seguidor y el punto real de contacto.

La fuerza requerida para empujar el seguidor depende de la aplicación donde se usa el sistema de leva. No obstante, la fuerza de contacto entre la leva y el seguidor puede ser muy grande, lo cual depende de la ubicación del punto de contacto. En realidad, tan solo una componente de la fuerza de contacto produce el movimiento del seguidor. La otra componente de fuerza es indeseable, pues causa una carga lateral, la cual es absorbida por los cojinetes que guían al seguidor.

El *ángulo de presión* δ correlaciona las dos componentes de la fuerza de contacto. El ángulo de presión en cualquier punto sobre el perfil de la leva es el ángulo entre el movimiento del seguidor y la dirección en que la leva lo empuja. Más precisamente, es el ángulo entre la trayectoria del movimiento del seguidor y la línea perpendicular al perfil de la leva en el punto de contacto del seguidor. Cada punto sobre la superficie de la leva tiene un ángulo de presión. En la figura 9.25 se indica el ángulo de presión.

Después de construir gráficamente el perfil de una leva, la magnitud del ángulo de presión se visualiza observando la ubicación del punto de contacto en relación con la línea central del seguidor. Se deben identificar las regiones donde el perfil de la leva presenta la curvatura más grande. Se tienen que obtener mediciones de los ángulos de presión en esta región. En general, el ángulo de presión se debería mantener tan pequeño como sea posible sin exceder los 30°. La magnitud del ángulo de presión se reduce de la siguiente manera:

1. Incrementando el tamaño del círculo base,
2. Disminuyendo la magnitud del desplazamiento del seguidor,
3. Incrementando el ángulo de rotación de la leva prescrito para la elevación o descenso del seguidor,

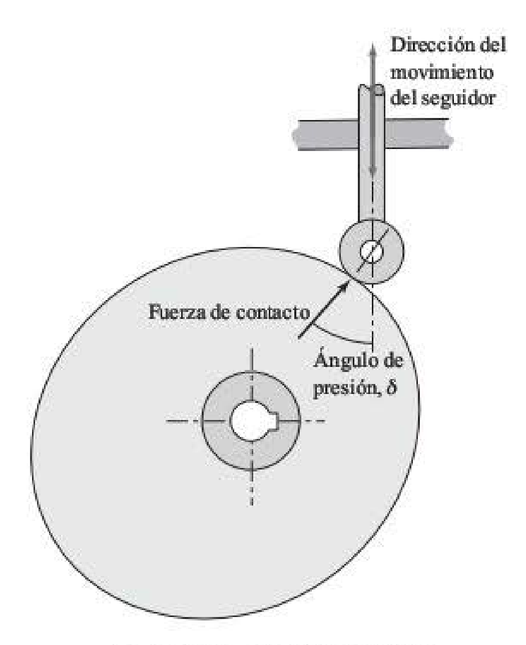


FIGURA 9.25 Ángulo de presión.

4. Disminuyendo el tamaño del descentrado del seguidor, o bien,
5. Modificando el esquema de movimiento del seguidor.

9.8 LIMITACIONES DE DISEÑO

Como se vio en la sección 9.6, no es posible iniciar el diseño del perfil de una leva, sino hasta determinar primero el tipo de seguidor, así como la ubicación y el tamaño del círculo base. Tales decisiones dependen normalmente de la magnitud de las fuerzas transmitidas y de los requerimientos de tamaño de la maquinaria impulsada por la leva. Debe quedar claro que estas decisiones quizá no siempre sean prácticas.

La figura 9.26 ilustra una leva en línea con un seguidor de rodillo. Observe que tiene una elevación rápida y el descenso en un ángulo de la leva igual a 135°. Advierta asimismo que, en esta parte de la leva, los incrementos del ángulo de construcción se hicieron más pequeños para aumentar la precisión. El perfil de la leva se construyó al ubicar los círculos del seguidor y dibujar el perfil de la leva tangente a dichos círculos. Observe que la leva no hace contacto con el seguidor en todas las posiciones. En un ángulo de 135° de la leva, esta no empuja al rodillo a la posición deseada.

Tal situación se corrige con el uso de un círculo base más grande o si se reduce el diámetro del seguidor de rodillo. Sin embargo, los esfuerzos de contacto entre la leva y el seguidor aumentan si el diámetro del rodillo se reduce. Por lo tanto, se debería evitar un rodillo con diámetro excesivamente pequeño.

Ocurre una situación parecida con un seguidor de cara plana. La figura 9.27a presenta el segmento de una leva cuyo seguidor también requiere una elevación rápida. Observe que una vez que se ubican las posiciones del seguidor de cara plana, no se puede construir una curva suave para representar el perfil de la leva. Una línea de construcción del seguidor (90°) queda fuera de la intersección de las líneas adyacentes de construcción del seguidor, de modo que, en un ángulo de la leva de 90°, esta no empujará al seguidor de cara plana a su posición deseada.

La figura 9.27b muestra otro segmento de la leva con un círculo base más grande. Esta leva tiene exactamente los mismos requerimientos de desplazamiento que la de la figura 9.27a. En este caso, es posible construir un perfil suave de la leva tangente a todas las líneas de construcción del seguidor. De nueva cuenta, se obtuvo un diseño funcional incrementando el diámetro del círculo base.

9.9 DISEÑO ANALÍTICO DEL PERFIL DE UNA LEVA DE DISCO

Las secciones anteriores ilustran métodos gráficos para diseñar el perfil de una leva. Según la precisión requerida en la aplicación, tales métodos suelen dar como resultado perfiles lo suficientemente precisos. Desde luego, la exactitud se incrementa cuando la construcción se realiza con un sistema de CAD. Con el CAD, por lo

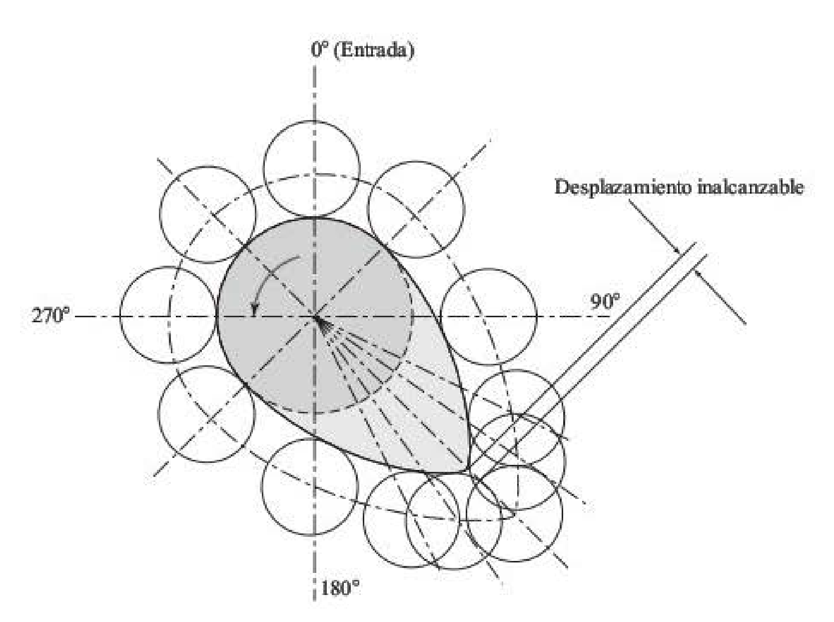


FIGURA 9.26 Leva disfuncional con un seguidor de rodillo.

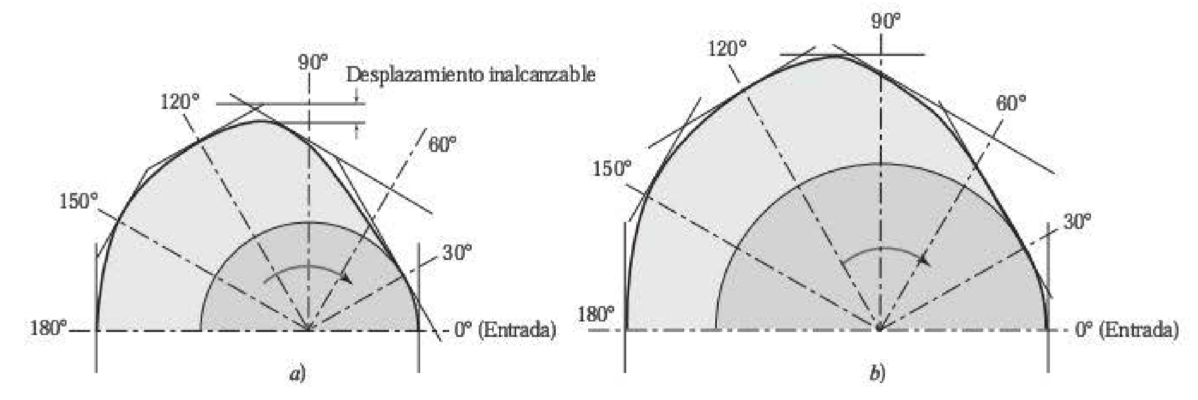


FIGURA 9.27 Leva disfuncional con un seguidor de cara plana.

general se utilizan líneas radiales para construir la curva suave del perfil de la leva. Con frecuencia, las líneas radiales tienen errores de precisión que podrían transgredir las restricciones de tangencia. Para aumentar la exactitud, se emplean menores incrementos del ángulo de la leva.

En algunas situaciones se requieren levas de alta precisión, donde es deseable determinar analíticamente las coordenadas de los puntos sobre la superficie de la leva, así como las coordenadas del cortador que se usará para fabricar la leva. Se han desarrollado ecuaciones para las coordenadas de diferentes tipos de seguidores. Esta sección solamente muestra estas ecuaciones, y el lector debe consultar fuentes más detalladas para las deducciones [ref. 4]. La incorporación de las ecuaciones a una hoja de cálculo o a algún otro dispositivo programable genera rápidamente las coordenadas del perfil.

En general, se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas, de modo que el origen sea el centro de la leva. El eje y positivo se encuentra a lo largo de la dirección del movimiento del seguidor en la posición de entrada. El eje x positivo se encuentra a 90° en sentido horario a partir del eje y, en congruencia con un sistema de coordenadas de mano derecha. La figura 9.28 presenta este sistema de coordenadas.

9.9.1 Seguidor de cuña

Las coordenadas x y y del perfil de una leva están dadas por:

$$R_x = (R_b + \Delta R)\operatorname{sen}\phi \qquad (9.4)$$

$$R_y = (R_b + \Delta R)\cos\phi \qquad (9.5)$$

donde se usa la siguiente notación:

R_x = Coordenada x del perfil de la superficie de la leva
R_y = Coordenada y del perfil de la superficie de la leva
R_b = Radio del círculo base
ϕ = Ángulo de rotación de la leva, medido contra la dirección de giro de la leva a partir de la posición de entrada
ΔR = Desplazamiento del seguidor en el ángulo de la leva ϕ

La mayoría de las levas se obtienen a través de una operación de corte usando máquinas cortadoras de control numérico por computadora. Estas máquinas son capaces de girar la leva una fracción de grado, mientras que el cortador avanza milésimas de milímetro. Con un método así, el perfil de la leva se fabrica con gran precisión.

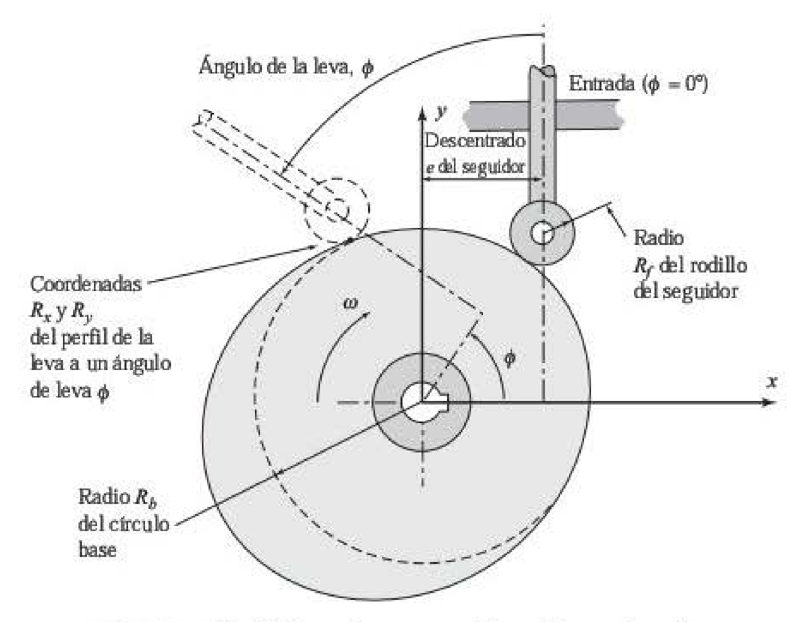


FIGURA 9.28 Perfil de una leva en un sistema de coordenadas.

Las coordenadas x y y del centro de la máquina cortadora, o rueda de corte, están dadas por:

$$C_x = (R_c + R_b + \Delta R)\,\text{sen}\,\phi \qquad \textbf{(9.6)}$$

$$C_y = (R_c + R_b + \Delta R)\cos\phi \qquad \textbf{(9.7)}$$

donde se agrega la siguiente notación:

C_x = Coordenada x del centro del cortador
C_y = Coordenada y del centro del cortador
R_c = Radio del cortador

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.4

Para la aplicación del problema de ejemplo 9.2, determine analíticamente las coordenadas del perfil de la leva cuando se incorpora un seguidor de cuña. Debido a las restricciones de tamaño de la máquina, se debe emplear una leva con un círculo base de diámetro igual a 200 mm. La leva gira en sentido antihorario.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule las coordenadas del perfil de la leva***

El radio del círculo base es la mitad de su diámetro; por lo tanto:

$$R_b = 100\,\text{mm}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (9.4) y (9.5),

$$R_x = (R_b + \Delta R)\,\text{sen}\,\phi = [(100\,\text{mm}) + \Delta R]\,\text{sen}\,\phi$$
$$R_y = (R_b + \Delta R)\cos\phi = [(100\,\text{mm}) + \Delta R]\cos\phi$$

2. ***Obtenga las coordenadas del perfil para varios ángulos de la leva***

Usando estas ecuaciones en una hoja de cálculo, se obtienen los resultados listados en la figura 9.29.

3. ***Grafique las coordenadas del perfil***

Se debe usar una hoja de cálculo para obtener fácilmente una gráfica con las coordenadas del perfil. Esta gráfica se muestra en la figura 9.30 y presenta el perfil de la leva.

t (s)	ϕ (deg)	ΔR (mm)	Rx (mm)	Ry (mm)
0.00	0.0	0.00	0.0	100.0
0.25	21.2	8.33	39.1	101.0
0.50	42.4	16.67	78.6	86.2
0.75	63.5	25.00	111.9	55.7
1.00	84.7	33.33	132.8	12.3
1.25	105.9	41.67	136.3	-38.8
1.50	127.1	50.00	119.7	-90.4
1.75	148.2	49.38	78.6	-127.0
2.00	169.4	45.46	26.7	-143.0
2.25	190.6	36.88	-25.2	-134.5
2.50	211.8	25.00	-65.8	-106.3
2.75	232.9	13.12	-90.3	-68.2
3.00	254.1	4.54	-100.6	-28.6
3.25	275.3	0.62	-100.2	9.3
3.50	296.5	0.00	-89.5	44.6
3.75	317.6	0.00	-67.4	73.9
4.00	338.8	0.00	-36.1	93.2
4.25	360.0	0.00	0.0	100.0

FIGURA 9.29 Coordenadas del problema de ejemplo 9.4.

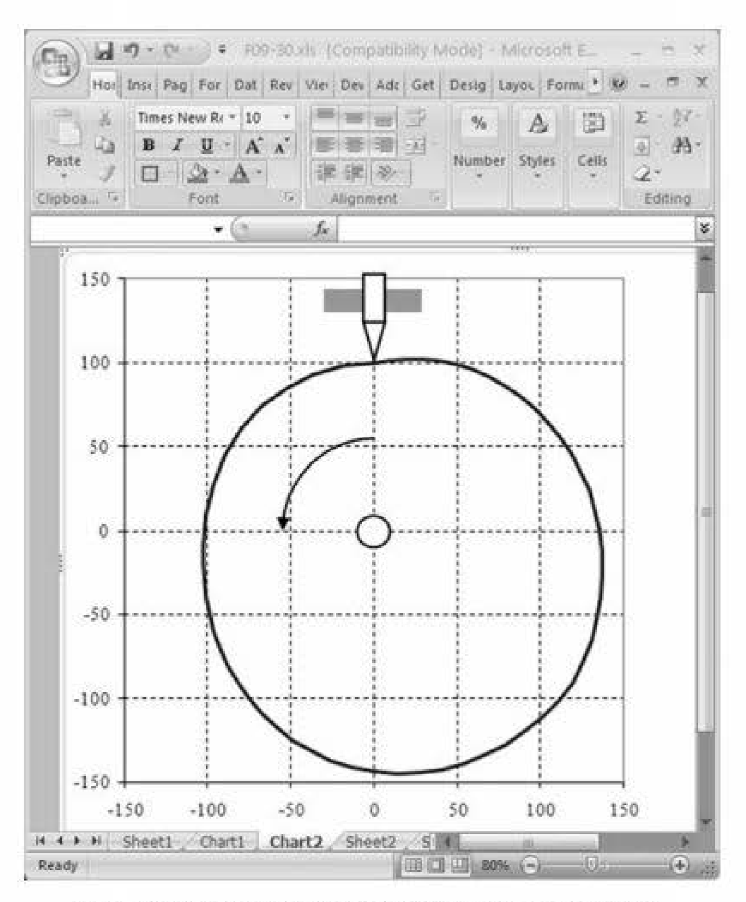


FIGURA 9.30 Perfil de la leva del problema de ejemplo 9.4.

9.9.2 Seguidor de rodillo en línea

En general, un seguidor de rodillo es complicado cuando el punto de contacto con la leva no está en línea con el centro del rodillo. El ángulo entre la línea central del seguidor y el punto de contacto con la leva varía según la curvatura del perfil de la leva. En un seguidor de rodillo en línea, este ángulo es el ángulo de presión. El ángulo instantáneo se calcula como:

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{v}{\omega_{\text{leva}}}\,\frac{(R_f + R_b + \Delta R)}{(R_f + R_b + \Delta R)^2}\right] = \delta \qquad (9.8)$$

En un seguidor de rodillo en línea, este ángulo es el ángulo de presión. Además de la notación usada en la sección 9.9.1, los siguientes términos se definen como:

R_f = Radio del seguidor de rodillo

v = Magnitud de la velocidad instantánea del seguidor de la leva en el ángulo ϕ de la leva

ω_{leva} = Velocidad angular de la leva en radianes por unidad de tiempo

El término (v/ω_{leva}) es una medida de la razón de cambio del desplazamiento del seguidor con respecto al ángulo de la leva. En situaciones donde la velocidad instantánea del seguidor no se obtiene con facilidad, la pendiente del diagrama de desplazamiento se estima con la ecuación (9.7).

$$\frac{v}{\omega_{\text{leva}}} = \frac{dR}{d\phi} \cong \frac{\Delta R}{\Delta \phi} \qquad (9.9)$$

Entonces, las coordenadas x y y del perfil de la leva están dadas por:

$$R_x = -[R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\phi + R_f\,\text{sen}(\phi - \alpha) \qquad (9.10)$$

$$R_y = [R_f + R_b + \Delta R]\cos\phi + R_f\cos(\phi - \alpha) \qquad (9.11)$$

Las coordenadas x y y del cortador están dadas por:

$$C_x = -[R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\phi + [R_c - R_f]\,\text{sen}(\phi - \alpha) \qquad (9.12)$$

$$C_y = [R_f + R_b + \Delta R]\cos\phi - [R_c - R_f]\cos(\phi - \alpha) \qquad (9.13)$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.5

Se utilizan dos levas para impulsar la pinza de un manipulador mecánico de partes. Las dos levas generan movimientos horizontales y verticales independientes en la pinza. Estas máquinas pueden reubicar partes de manera similar a un robot en una fracción del costo. En la figura 9.31 se muestra el manipulador de partes.

El movimiento prescrito de uno de los seguidores de una leva es el siguiente:

1. Elevación de 1.5 in en 1.5 s usando un esquema de movimiento armónico.
2. Detención de 2 s.
3. Regreso en 1.5 s usando un esquema de movimiento armónico.
4. Detención de 2 s.
5. Se repite la secuencia.

Un seguidor de rodillo en línea con un radio de 0.5 in se emplea sobre una leva con un círculo base de radio igual a 3.5 in. Tabule el movimiento del seguidor y especifique las coordenadas del perfil de la leva.

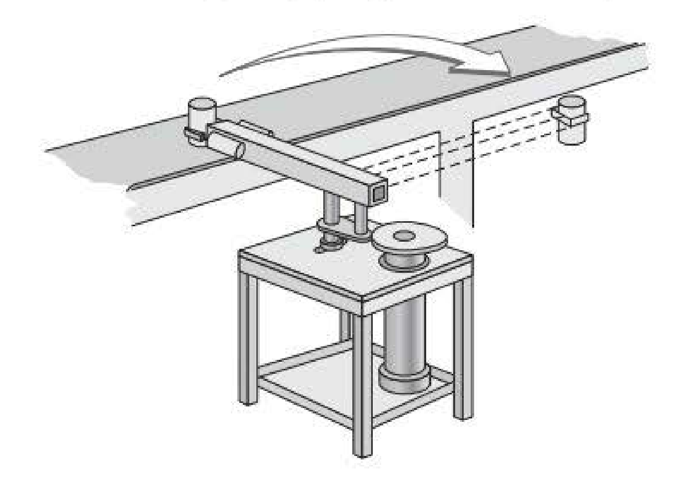


FIGURA 9.31 Máquina manipuladora de partes del problema de ejemplo 9.5.

SOLUCIÓN:

1. ***Calcule el tiempo de un ciclo completo***

Es necesario determinar el tiempo total de un ciclo completo para calcular la velocidad requerida de la leva.

$$\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$
$$= 1.5 + 2.0 + 1.5 + 2.0 = 7.0\text{s}$$

2. ***Calcule la velocidad angular requerida de la leva***

De la ecuación (9.2),

$$\omega_{\text{leva}} = \frac{1\,\text{rev}}{\Sigma T_i} = \frac{1\,\text{rev}}{7\,\text{s}} = 0.143\,\text{rev/s} = 0.899\,\text{rad/s} = 8.57\,\text{rpm}$$

3. ***Determine el giro de la leva para cada intervalo de movimiento del seguidor***

El incremento angular de la leva recorrido por cada secuencia de movimiento del seguidor se calcula con la ecuación (9.1).

$$\beta_1 = (\omega_{\text{leva}})(T_1) = (0.143\,\text{rev/s})(1.5\text{s}) = 0.214\,\text{rev} = 77.2°$$

$$\beta_2 = (0.143\,\text{rev/s})(2.0\text{s}) = 0.286\,\text{rev} = 102.8°$$

$$\beta_3 = (0.143\,\text{rev/s})(1.5\text{s}) = 0.214\,\text{rev} = 77.2°$$

$$\beta_4 = (0.143\,\text{rev/s})(2.0\text{s}) = 0.286\,\text{rev} = 102.8°$$

4. ***Calcule el desplazamiento durante cada intervalo de movimiento del seguidor***

La ecuación de la elevación y el descenso armónicos se proporcionaron en la tabla 9.3. Si se sustituyen en las ecuaciones de elevación armónica,

$$\Delta R_1 = \frac{H_1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t_1}{T_1}\right)\right] = \frac{(1.5\,\text{in})}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t_1}{1.5\,\text{s}}\right)\right]$$

$$v_1 = \frac{\pi H_1}{2T_1}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_1}{T_1}\right)\right] = \frac{\pi(1.5\,\text{in})}{2(1.5\,\text{s})}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_1}{1.5\,\text{s}}\right)\right]$$

Al sustituir en las ecuaciones de descenso armónico:

$$\Delta R_2 = \frac{H_2}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t_2}{T_2}\right)\right] = \frac{(1.5\,\text{in})}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t_2}{1.5\,\text{s}}\right)\right]$$

$$v_2 = \frac{-\pi H_2}{2T_2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_2}{T_2}\right)\right] = \frac{-\pi(1.5\,\text{in})}{2(1.5\,\text{s})}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t_2}{1.5\,\text{s}}\right)\right]$$

5. ***Calcule las coordenadas del perfil de la leva***

Sustituyendo en las ecuaciones (9.8), (9.10) y (9.11),

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{v}{\omega_{\text{leva}}}\frac{[R_f + R_b + s]}{[R_f + R_b + s]^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{v}{(0.899\,\text{rad/s})}\frac{[(0.5\,\text{in}) + (3.5\,\text{in}) + s]}{[(0.5\,\text{in}) + (3.5\,\text{in}) + s]^2}\right]$$

$$R_x = -[R_f + R_b + \Delta R]\operatorname{sen}\phi + R_f\operatorname{sen}(\phi - \alpha) = -[0.5 + 3.5 + \Delta R]\operatorname{sen}\phi + 0.5\operatorname{sen}(\phi - \alpha)$$

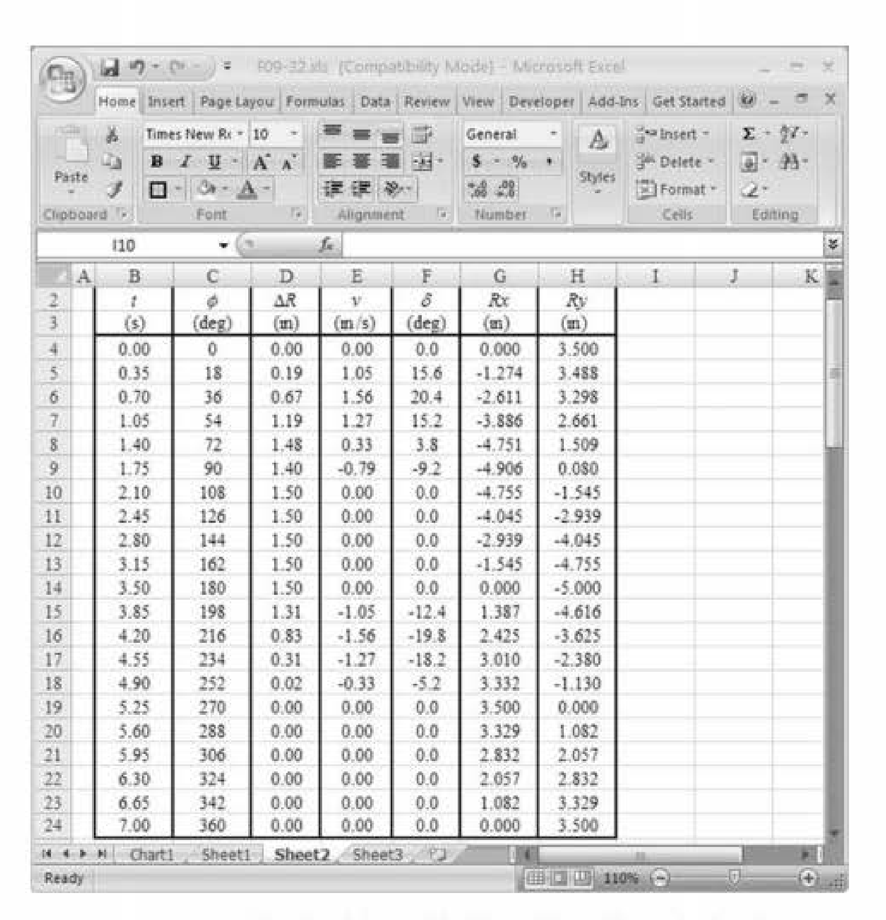
$$R_y = -[R_f + R_b + \Delta R]\cos\phi + R_f\cos(\phi - \alpha) = -[0.5 + 3.5 + \Delta R]\cos\phi - 0.5\cos(\phi - \alpha)$$

6. ***Obtenga las coordenadas del perfil para varios ángulos de la leva***

Si se introducen estas ecuaciones en una hoja de cálculo, se obtienen los resultados listados en la figura 9.32.

7. ***Grafique las coordenadas del perfil***

Se utiliza una hoja de cálculo para obtener fácilmente la gráfica de las coordenadas del perfil. Esta gráfica se muestra en la figura 9.33 e ilustra el perfil de la leva.



t (s)	φ (deg)	ΔR (in)	v (in/s)	δ (deg)	Rx (in)	Ry (in)
0.00	0	0.00	0.00	0.0	0.000	3.500
0.35	18	0.19	1.05	15.6	-1.274	3.488
0.70	36	0.67	1.56	20.4	-2.611	3.298
1.05	54	1.19	1.27	15.2	-3.886	2.661
1.40	72	1.48	0.33	3.8	-4.751	1.509
1.75	90	1.40	-0.79	-9.2	-4.906	0.080
2.10	108	1.50	0.00	0.0	-4.755	-1.545
2.45	126	1.50	0.00	0.0	-4.045	-2.939
2.80	144	1.50	0.00	0.0	-2.939	-4.045
3.15	162	1.50	0.00	0.0	-1.545	-4.755
3.50	180	1.50	0.00	0.0	0.000	-5.000
3.85	198	1.31	-1.05	-12.4	1.387	-4.616
4.20	216	0.83	-1.56	-19.8	2.425	-3.625
4.55	234	0.31	-1.27	-18.2	3.010	-2.380
4.90	252	0.02	-0.33	-5.2	3.332	-1.130
5.25	270	0.00	0.00	0.0	3.500	0.000
5.60	288	0.00	0.00	0.0	3.329	1.082
5.95	306	0.00	0.00	0.0	2.832	2.057
6.30	324	0.00	0.00	0.0	2.057	2.832
6.65	342	0.00	0.00	0.0	1.082	3.329
7.00	360	0.00	0.00	0.0	0.000	3.500

FIGURA 9.32 Coordenadas del perfil de la leva del problema de ejemplo 9.5.

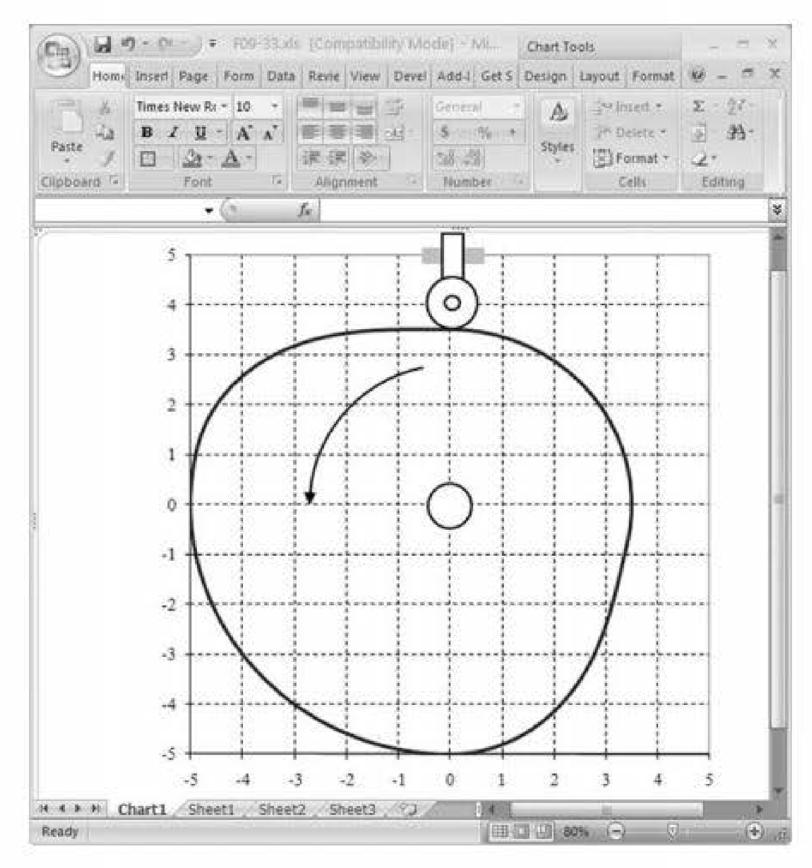


FIGURA 9.33 Perfil de la leva del problema de ejemplo 9.5.

9.9.3 Seguidor de rodillo descentrado

Un seguidor de rodillo descentrado es más complicado porque el movimiento del seguidor no está en línea con el punto de contacto de la leva la cual, a su vez, no está en línea con el centro del rodillo. Entonces, las ecuaciones del perfil se vuelven un poco más complejas. El ángulo entre las líneas que unen el centro del seguidor con el punto de contacto de la leva y el centro del seguidor con el centro de la leva, se obtiene como:

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\left(\frac{v}{\omega_{\text{leva}}}\right)\left(\frac{R_f + R_b + \Delta R}{e^2 + (R_f + R_b + \Delta R)^2 - e\,(v/\omega_{\text{leva}})}\right)\right] \quad (9.14)$$

Como en la ecuación (9.8), el término (v/ω_{leva}) es la medida de la razón de cambio del desplazamiento del seguidor con respecto al ángulo de la leva. En situaciones donde la velocidad instantánea del seguidor no se obtiene fácilmente, la pendiente del diagrama de desplazamiento se estima con la ecuación (9.9). El ángulo de presión d se calcula de la siguiente manera:

$$\delta = \alpha - \tan^{-1}\left(\frac{e}{R_f + R_b + \Delta R}\right) \quad (9.15)$$

Como antes, la distancia e del descentrado, se define como la distancia entre la línea central del seguidor y el centro de la leva. Un descentrado positivo se define en la dirección positiva de x. Por el contrario, un descentrado negativo se define en la dirección negativa de x. El descentrado mostrado en la figura 9.28 tiene un valor positivo, de modo que las coordenadas x y y del perfil de la leva están dadas por:

$$R_x = (e)\cos\phi - [R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\phi + R_f\,\text{sen}(\phi - \alpha) \quad (9.16)$$

$$R_y = (e)\text{sen}\,\phi - [R_f + R_b + \Delta R]\cos\phi + R_f\cos(\phi - \alpha) \quad (9.17)$$

Las coordenadas x y y del cortador están dadas por:

$$C_x = (e)\cos\phi - [R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\phi + [R_c - R_f]\,\text{sen}(\phi - \alpha) \quad (9.18)$$

$$C_y = (e)\text{sen}\,\phi - [R_f + R_b + \Delta R]\cos\phi - [R_c - R_f]\cos(\phi - \alpha) \quad (9.19)$$

9.9.4 Seguidor de cara plana con traslación

La construcción analítica de un seguidor de cara plana con traslación también presenta un punto de contacto que no está en línea con la línea central de la leva. El ángulo entre la línea central del seguidor y la línea que une el punto de contacto de la leva con el centro de la leva varía con la curvatura del perfil de la leva y se calcula como:

$$\alpha = \tan^{-1}\left\{\left(\frac{v}{\omega_{\text{leva}}}\right)\frac{1}{(R_b + \Delta R)}\right\} \quad (9.20)$$

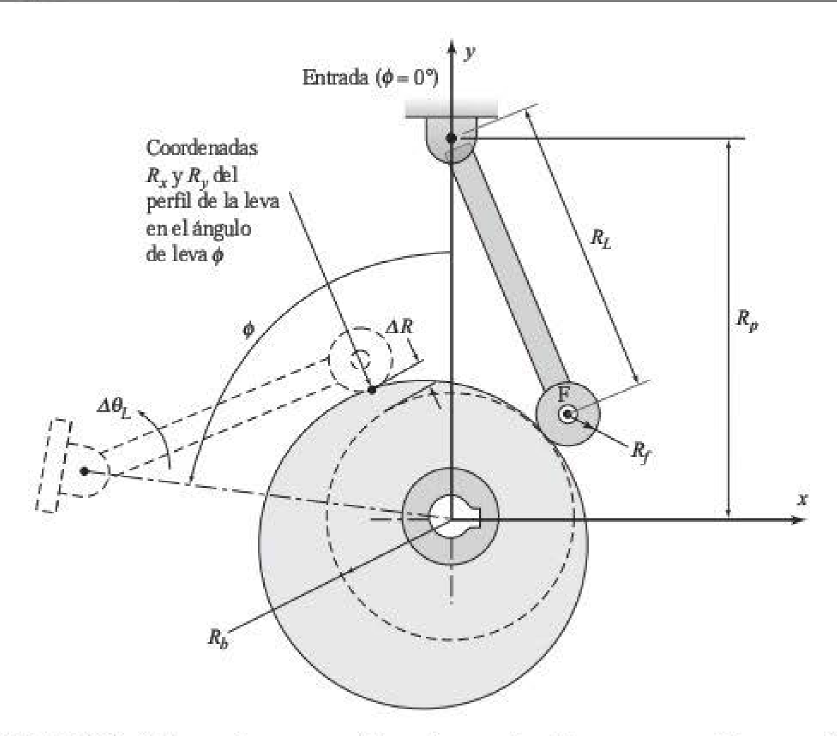


FIGURA 9.34 Perfil de una leva en un sistema de coordenadas, con un seguidor que pivota.

Como en las ecuaciones (9.8) y (9.14), el término (v/ω_{leva}) es la medida de la razón de cambio del desplazamiento del seguidor con respecto al ángulo de la leva. En situaciones donde la velocidad instantánea del seguidor no se obtiene fácilmente, la pendiente del diagrama de desplazamiento se estima con la ecuación (9.9).

Entonces, las coordenadas x y y del perfil de la leva están dadas por:

$$R_x = \left(\frac{R_b + \Delta R}{\cos\alpha}\right)\cos(\phi + \alpha) \qquad (9.21)$$

$$R_y = \left(\frac{R_b + \Delta R}{\cos\alpha}\right)\text{sen}(\phi + \alpha) \qquad (9.22)$$

Las coordenadas x y y del cortador están dadas por:

$$C_x = \left[\frac{R_b + \Delta R + R_c}{\cos\gamma}\right]\cos(\phi + \gamma) \qquad (9.23)$$

$$C_y = \left[\frac{R_b + \Delta R + R_c}{\cos\gamma}\right]\text{sen}(\phi + \gamma) \qquad (9.24)$$

donde

$$\gamma = \tan^{-1}\left[\frac{(R_b + \Delta R)\tan(\alpha)}{R_c + R_b + \Delta R}\right] \qquad (9.25)$$

9.9.5 Seguidor de rodillo con pivote

La construcción analítica de un seguidor de rodillo con pivote es similar a la del seguidor de traslación descentrado. Sin embargo, la geometría y las definiciones son algo diferentes. La figura 9.34 presenta la nomenclatura utilizada en una leva con seguidor de rodillo con pivote.

Se usa la siguiente notación:

R_L = Longitud del eslabón seguidor con pivote

R_P = Distancia entre el centro de la leva y la ubicación del pivote

$\Delta\theta_L$ = Posición angular instantánea del eslabón seguidor con pivote

ω_L = Velocidad angular instantánea del eslabón seguidor con pivote

α_L = Aceleración angular instantánea del eslabón seguidor con pivote

La diferencia principal en un seguidor que pivota es que su movimiento es giratorio y el movimiento prescrito generalmente es la posición angular del seguidor contra el tiempo, o el ángulo de la leva. La ecuación (9.3) da la relación entre el desplazamiento angular del eslabón seguidor y el desplazamiento lineal del centro del rodillo, el punto F.

$$\Delta R_F = R_L\sqrt{2(1 - \cos\Delta\theta_L)} \qquad (9.3)$$

La velocidad del centro del seguidor está relacionada con la velocidad angular del eslabón seguidor.

$$v_F = R_L\omega_L \qquad (9.26)$$

Nuevamente, el ángulo entre las líneas que unen el centro del seguidor con el punto de contacto de la leva y el centro del seguidor con el centro de la leva varía con la curvatura del perfil de la leva y se calcula como:

$$\alpha_L = \tan^{-1}\left[\left(\frac{v}{\omega_{leva}}\right)\left(\frac{1}{(R_f + \Delta R + R_b) - (v/\omega_{leva})\cos\gamma}\right)\right] \qquad (9.27)$$

Como antes, el término (v_F/ω_{leva}) es la medida de la razón de cambio del desplazamiento del seguidor con respecto al ángulo de la leva. En situaciones donde la velocidad instantánea del seguidor no se obtiene fácilmente, la pendiente del diagrama de desplazamiento se estima con la ecuación (9.9).

Los ángulos internos están dados por:

$$\gamma = \cos^{-1}\left[\left(\frac{R_L^2 + (R_b + R_f + \Delta R)^2 - R_p^2}{2(R_L)(R_b + R_b + s)}\right)\right] \quad (9.28)$$

$$\phi = \cos^{-1}\left[\left(\frac{R_p^2 + (R_b + R_f + \Delta R)^2 - R_L^2}{2(R_p)(R_b + R_b + s)}\right)\right] \quad (9.29)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \phi + \alpha \quad (9.30)$$

Por último, las coordenadas x y y del perfil de la leva están dadas por:

$$R_x = -[R_f + R_b + \Delta R]\cos\beta - R_f\,\text{sen}(\beta - \alpha) \quad (9.31)$$

$$R_y = -[R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\beta - R_f\cos(\beta - \alpha) \quad (9.32)$$

y el ángulo de presión está dado por:

$$\delta = \gamma + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (9.33)$$

Las coordenadas x y y del cortador están dadas por:

$$C_x = [R_f + R_b + \Delta R]\cos\beta - [R_c - R_f]\,\text{sen}(\beta - \alpha) \quad (9.34)$$

$$C_y = [R_f + R_b + \Delta R]\,\text{sen}\,\beta - [R_c - R_f]\cos(\beta - \alpha) \quad (9.35)$$

9.10 LEVAS CILÍNDRICAS

Aun cuando el tipo más común de levas es la leva de disco, las levas cilíndricas también se usan ampliamente. Como se indicó en la sección 9.2 y se ilustró en la figura 9.3b, una leva cilíndrica consiste en una ranura alrededor de un cilindro. Una leva cilíndrica es una leva de movimiento positivo en la cual el seguidor está cautivo en una ranura, por lo que no se necesita un elemento externo para mantener el contacto entre el seguidor y la leva. Hay muchas aplicaciones donde es necesario que la leva ejerza un control positivo del seguidor durante las secuencias de elevación o descenso.

Con frecuencia se emplea un seguidor de rodillo en forma de cuña como el que se muestra en la figura 9.3b, porque el borde superior de la ranura viaja a una velocidad mayor que la parte inferior, de modo que la cuña compensa la velocidad diferencial, lo cual impide cualquier deslizamiento y arrastre del rodillo. Cuando se usa un rodillo cilíndrico, es aconsejable usar una anchura angosta para minimizar la diferencia de velocidad a través de la cara del rodillo.

En general, los procedimientos de cálculo y trazado son similares a los de la leva de disco. En las siguientes secciones se analizan las técnicas de generación de perfiles de una leva cilíndrica con un seguidor de traslación. La generación del perfil para otros tipos de seguidores es parecida.

9.10.1 Diseño gráfico del perfil de una leva cilíndrica

La forma más eficiente para describir la construcción de una leva cilíndrica es a través de una construcción real. Con el diagrama de desplazamiento de la figura 9.19, se construyó el perfil de una leva cilíndrica y se muestra en la figura 9.35. Para construir este perfil se tiene el siguiente procedimiento general:

1. Trazar una línea recta igual a la circunferencia de la leva cilíndrica.
2. Dividir esta línea en secciones que correspondan con los ángulos de referencia de la leva del diagrama de desplazamiento.
3. Transferir los desplazamientos del diagrama de desplazamiento a las líneas que corresponden con los ángulos de referencia de la leva.
4. Dibujar el seguidor de rodillo en los desplazamientos prescritos.
5. Trazar una curva suave tangente a los contornos del rodillo.
6. Para construir un perfil con una precisión consistente con el diagrama de desplazamiento, es necesario transferir puntos intermedios adicionales de los movimientos de elevación y descenso.

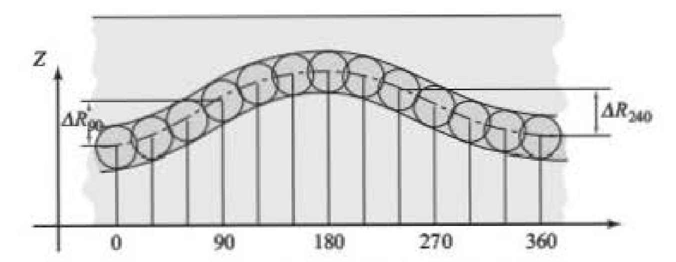


FIGURA 9.35 Diseño del perfil de una leva cilíndrica.

9.10.2 Diseño analítico del perfil de una leva cilíndrica

Como una leva cilíndrica está enrollada alrededor de un cilindro, se utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas para definir el perfil de la ranura. La coordenada angular θ es el ángulo alrededor de la leva, mientras el eje z es la posición axial de la leva. El ángulo entre la línea central del seguidor y el punto de contacto de la leva varía con la curvatura del perfil de la ranura, que se calcula como:

$$\alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{v_F}{\omega_{\text{leva}}}\right) \quad (9.36)$$

La notación que se usa es la misma de las secciones anteriores. En un seguidor con traslación, este ángulo también es el ángulo de presión. Como en las levas de disco, el ángulo de presión debería ser mínimo sin exceder los 30°.

La coordenada z del perfil superior de la ranura, cuando el centro del seguidor está en ϕ, está dada por:

$$R_z = \Delta R + R_f\cos\alpha \quad (9.37)$$

$$\theta = \phi - \tan^{-1}\left(\frac{R_f\cos\alpha}{R_b}\right) \quad (9.38)$$

Aquí, R_b es el radio la leva cilíndrica.

La coordenada z del perfil más bajo de la ranura, cuando el centro del seguidor está en ϕ, está dada por:

$$R_z = \Delta R - R_f \cos\alpha \tag{9.39}$$

$$\theta = \phi + \tan^{-1}\left(\frac{R_f \cos\alpha}{R_b}\right) \tag{9.40}$$

Las coordenadas del cortador están dadas por:

$$C_z = \Delta R \tag{9.41}$$

$$\theta = \phi \tag{9.42}$$

9.11 EL MECANISMO DE GINEBRA

El mecanismo de Ginebra es un diseño único que produce un movimiento intermitente a partir de movimiento giratorio constante. Debido a este movimiento, el mecanismo de Ginebra se clasifica comúnmente como leva. En la figura 9.36 se presenta un mecanismo de Ginebra con cuatro estaciones.

El mecanismo de Ginebra consiste en un rodillo impulsor y una rueda de Ginebra. Esta última es un disco con varias ranuras radiales, que está sujeta a un eje de salida. El rodillo impulsor está sujeto a un brazo que, a la vez, se sujeta a un eje de entrada. El brazo por lo general está sujeto a un disco de bloqueo, que impide que la rueda gire cuando el rodillo impulsor no recorre la ranura. El disco de bloqueo se ajusta a un recorte sobre la rueda.

El movimiento del mecanismo de Ginebra se caracteriza por el rodillo que entra a la ranura de la rueda y la impulsa. Cuando el rodillo se sale de la ranura, la rueda se bloquea en esa posición hasta que el rodillo entra en la siguiente ranura. En la figura 9.36a el rodillo gira en sentido horario y está a punto de entrar a la rueda de Ginebra. En la figura 9.36b, el rodillo ya entró a la ranura y gira la rueda en sentido antihorario. Observe que el disco de bloqueo se va alejando de la rueda y le permite girar.

Cuando se diseña una rueda, es importante que el rodillo entre a la ranura tangencialmente. De otra manera, se crean cargas de impacto y el mecanismo funcionará de manera deficiente a altas velocidades o a cargas grandes. Debido a esta restricción, se deducen las siguientes relaciones geométricas [ref. 7]. Remítase a la figura 9.36 para las definiciones de las propiedades geométricas.

$$\beta_o = \frac{360°}{n} \tag{9.43}$$

donde:

n = Número de estaciones en la rueda de Ginebra

$$\gamma_o = 90° - \frac{\beta_o}{2} \tag{9.44}$$

$$a = d\,\text{sen}\left(\frac{\beta_o}{2}\right) \tag{9.45}$$

$$R = d\cos\left(\frac{\beta_o}{2}\right) \tag{9.46}$$

$$S < d - a \tag{9.47}$$

La cinemática de la rueda de Ginebra también se determina analíticamente. El ángulo del rodillo $\Delta\gamma$ se define a partir del inicio de su recorrido en la ranura. El ángulo de la rueda, medido a partir del inicio del recorrido, está definido por β y se calcula como:

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left[\left(\frac{a}{r}\right)\text{sen}(180° - \psi)\right] \tag{9.48}$$

donde

$$r = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos(180 - \psi)} \tag{9.49}$$

$$\psi = 180° - \gamma_o + \Delta\gamma \tag{9.50}$$

donde

$\Delta\gamma$ = Cantidad de rotación del impulso a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

La velocidad y aceleración instantáneas de la rueda de Ginebra se calculan [ref. 7] con:

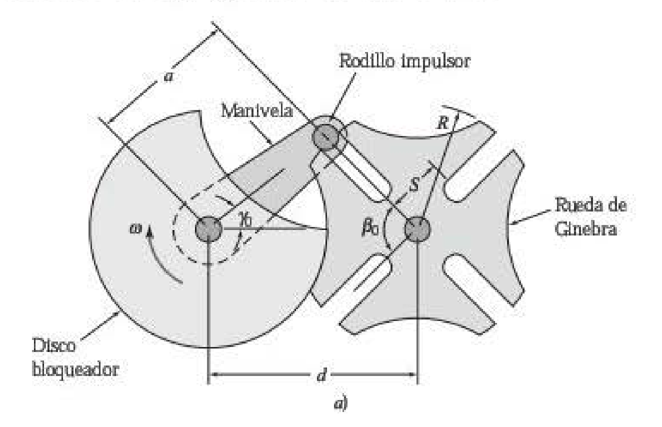
$$\omega_{\text{rueda}} = \left(\frac{a}{r}\right)(\omega_{\text{eje de entrada}})\cos(\beta - \psi) \tag{9.51}$$

$$\alpha_{\text{rueda}} = -\left(\frac{a}{r}\right)(\omega_{\text{eje de entrada}})^2\,\text{sen}(\beta - \psi) \tag{9.52}$$

$$-\left(\frac{a}{r}\right)(\alpha_{\text{eje de entrada}})\cos(\beta - \psi)$$

$$+\left(\frac{a}{r}\right)(\omega_{\text{eje de entrada}})^2\,\text{sen}(2\beta - 2\psi)$$

Estas ecuaciones se dedujeron con el uso de la convención típica de signos angulares, es decir, ω y α son positivas en sentido antihorario y negativas en sentido horario.



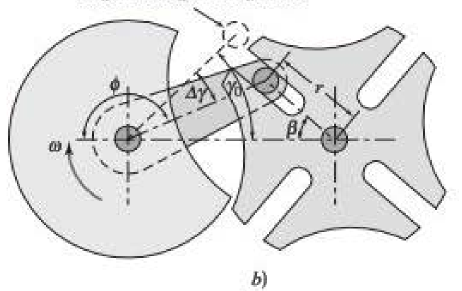


FIGURA 9.36 Mecanismo de Ginebra con cuatro estaciones.

PROBLEMA DE EJEMPLO 9.6

En la figura 9.37 se muestra el diseño de un mecanismo de Ginebra con seis estaciones. La distancia entre los ejes impulsor e impulsado es de 80 mm. El brazo impulsor gira a una velocidad constante de 80 rpm en sentido horario. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda cuando el brazo impulsor gira 15° a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la geometría del mecanismo***

Se usan las ecuaciones (9.43) a (9.47) para calcular las propiedades geométricas de este mecanismo de Ginebra.

$$\beta_o = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$$

$$\gamma_o = 90° - \frac{\beta_o}{2} = 90° - \frac{60}{2} = 60°$$

$$a = d\,\text{sen}\left(\frac{\beta_o}{2}\right) = (80\,\text{mm})\,\text{sen}\left(\frac{60°}{2}\right) = 40\,\text{mm}$$

$$R = d\cos\left(\frac{\beta_o}{2}\right) = (80\,\text{mm})\cos\left(\frac{60°}{2}\right) = 69.3\,\text{mm}$$

$$S < d - a = 80 - 40 = 40\,\text{mm}$$

2. ***Calcule las propiedades cinemáticas del mecanismo***

Se usan las ecuaciones (9.48) a (9.52) para determinar las relaciones cinemáticas cuando el brazo impulsor gira 15° a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

$$\Delta\gamma = 15°$$

$$\psi = 180° - \gamma_o + \Delta\gamma = 180° - 60° + 15° = 135°$$

$$r = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos(180 - \psi)}$$

$$= \sqrt{(40\,\text{mm})^2 + (80\,\text{mm})^2 - 2(40\,\text{mm})(80\,\text{mm})\cos(45°)} = 58.94\,\text{mm}$$

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left[\frac{a}{r}\,\text{sen}\psi\right] = \text{sen}^{-1}\left[\frac{40\,\text{mm}}{58.94\,\text{mm}}\,\text{sen}\,45°\right] = 28.7°$$

$$\omega_{\text{eje de entrada}} = 80\,\text{rpm} = -8.4\,\text{rad/s, en sentido horario}$$

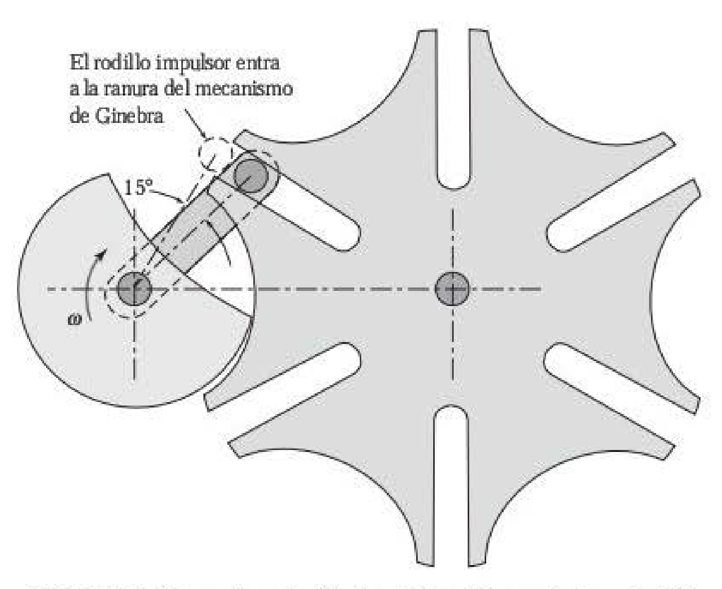


FIGURA 9.37 Mecanismo de Ginebra del problema de ejemplo 9.6.

$$\omega_{rueda} = \left(\frac{a}{r}\right)(\omega_{eje\ de\ entrada})\cos(\beta - \psi) = \left(\frac{40\,\text{mm}}{58.94\,\text{mm}}\right)(-8.4\,\text{rad/s})\cos(28.7^\circ - 135^\circ) = +1.6\text{rad/s} = 15.3\text{rpm, en sentido antihorario}$$

$$\alpha_{eje\ de\ entrada} = 0\ \text{(velocidad angular constante del eje de entrada)}$$

$$a_{rueda} = -\left(\frac{a}{r}\right)(\omega_{eje\ de\ entrada})^2 \text{sen}(\beta - \alpha) - \left(\frac{a}{r}\right)(\alpha_{eje\ de\ entrada})\cos(\beta - \alpha)$$

$$+\left(\frac{a}{r}\right)^2(\omega_{eje\ de\ entrada})^2 \text{sen}(2\beta - 2\alpha)$$

$$= \left(\frac{40\text{mm}}{58.94\text{ mm}}\right)^2(-8.4\,\text{rad/s})^2 \text{sen}\,(28.7^\circ - 135^\circ) - 0$$

$$+\left(\frac{40\text{mm}}{58.94\text{mm}}\right)^2(-8.4\,\text{rad/s})^2 \text{sen}[2(28.7^\circ) - 2(135^\circ)]$$

$$= +67.1\,\text{rad/s}^2 = +67.1\,\text{rad/s}^2\text{, en sentido antihorario}$$

PROBLEMAS

En las soluciones gráficas, las técnicas manuales suelen ser muy didácticas, pero se recomienda ampliamente el uso de un sistema de CAD.

Diagramas gráficos de desplazamiento

9–1. Se requiere una leva para un mecanismo de transferencia automático. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 1.0 in a velocidad constante en 3.0 s, hacer una detención de 5 s, descender a velocidad constante en 2.0 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–2. Se requiere una leva para el seguidor reciprocante del mecanismo manipulador de un brazo robótico. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 0.75 in a velocidad constante en 1.4 s, hacer una detención de 2.3 s, descender a velocidad constante en 0.8 s, hacer una detención de 1.9 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–3. Se requiere una leva para impulsar una plataforma de embarque que se utiliza para evaluar la eficiencia de embarque de los paquetes. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 1.0 in con aceleración constante en 0.7 s, hacer una detención de 0.2 s, descender con aceleración constante en 0.5 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–4. Se requiere una leva para impulsar un mecanismo que alimenta papel en una imprenta. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 1.0 in con aceleración constante en 1.7 s, hacer una detención de 0.8 s, descender 0.5 in con aceleración constante en 0.8 s, hacer una detención de 0.3 s, descender 0.5 in con aceleración constante en 0.8 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–5. Se requiere una leva para impulsar un deslizador automático sobre una máquina de tornillo que gira partes intrincadas. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 1.5 in con aceleración constante en 1.2 s, hacer una detención de 0.7 s, descender 0.5 in con aceleración constante en 0.9 s, hacer una detención de 0.5 s, descender 1 in con aceleración constante en 1.2 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–6. Se usa una leva para impulsar un mecanismo que impulsa a su vez una máquina ensambladora automática. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 13 mm con velocidad constante en 3 s, hacer una detención de 3 s, descender 5 mm con aceleración constante en 2 s, hacer una detención de 3 s, descender 8 mm con aceleración constante en 2 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–7. Se usa una leva para impulsar un mecanismo que prueba la durabilidad de las puertas de ciertos hornos. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 2 in con movimiento armónico en 1 s, hacer una detención de 0.5 s, descender 2 in con movimiento armónico en 1 s, hacer una detención de 1 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–8. Se usa una leva para impulsar un mecanismo que mueve una herramienta en un proceso automático de maquinado de tornillos. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 24 mm con movimiento armónico en 0.2 s, hacer una detención de 0.3 s, descender 10 mm con movimiento armónico en 0.3 s, hacer una detención de 0.2 s, descender 14 mm con movimiento armónico en 0.2 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–9. Se usa una leva para impulsar un mecanismo que coloca relleno en cajas para embarque. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 1 in con movimiento cicloidal en 1.5 s, descender 1 in con movimiento cicloidal en 1 s, hacer una detención de 0.5 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–10. Se usa una leva para impulsar un mecanismo incorporado a una máquina que cose zapatos. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 0.5 in con movimiento cicloidal en 0.7 s, hacer una detención de 0.2 s, descender 0.25 in con movimiento cicloidal en 0.5 s, hacer una detención de 0.2 s, descender 0.25 in con movimiento cicloidal en 0.5 s y, luego, repetir la secuencia. Determine la velocidad requerida de la leva y elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–11. Se requiere una leva impulsora para sincronizar los movimientos de un dispositivo de transferencia automático. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 10 mm con aceleración constante en 90° de rotación de la leva, hacer una detención a los 30°, descender 10 mm con aceleración constante en 180° de rotación de la leva y, luego, hacer una detención de 60°. Elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del segui-dor.

9–12. Se usa una leva para una válvula de escape en un motor de gasolina. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 0.5 in con movimiento armónico en 150° de rotación de la leva, hacer una detención de 30° y, luego, descender 0.5 in con movimiento armónico en 180° de rotación de la leva. Elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–13. Se usa una leva para un dispositivo recolector de periódico. El seguidor de la leva se debe elevar hacia afuera 0.5 in con movimiento cicloidal en 120° de rotación de la leva, hacer una detención de 30°, descender 0.5 in con movimiento cicloidal en 120° de rotación de la leva, hacer una detención de 30° y, luego, descender 0.5 in con movimiento cicloidal en 60° de rotación de la leva. Elabore gráficamente el diagrama de desplazamiento del seguidor.

Diagrama de desplazamiento analítico

En los problemas 9-14 a 9-23, determine la velocidad de la leva; además, use las ecuaciones de movimiento y una hoja de cálculo para elaborar el diagrama de desplazamiento del seguidor. Calcule asimismo la velocidad y la aceleración máximas del seguidor.

9–14. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9-1.

9–15. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–2.

9–16. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–3.

9–17. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–4.

9–18. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–5.

9–19. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–6.

9–20. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–7.

9–21. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–8.

9–22. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–9.

9–23. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–10.

En los problemas 9-24 a 9-26, use las ecuaciones de movimiento y una hoja de cálculo para elaborar el diagrama de desplazamiento del seguidor.

9–24. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–11.

9–25. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–12.

9–26. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–13.

Curvas de movimiento analíticas

En los problemas 9-27 a 9-36, use las ecuaciones de movimiento y una hoja de cálculo para generar gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración del seguidor contra el tiempo.

9–27. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–1.

9–28. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–2.

9–29. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–3.

9–30. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–4.

9–31. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–5.

9–32. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–6.

9–33. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–7.

9–34. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–8.

9–35. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–9.

9–36. Use el movimiento requerido del seguidor de la leva especificada en el problema 9–10.

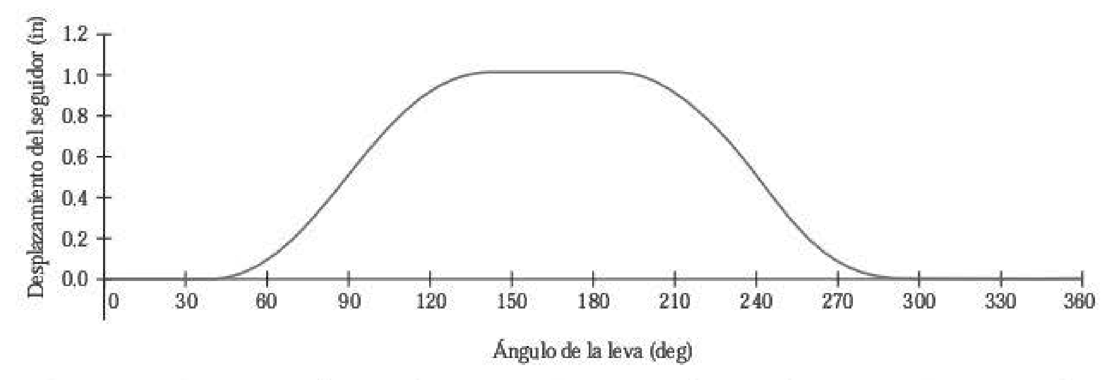
Diseño gráfico del perfil de una leva de placa

9–37. Una leva de placa tiene que proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 para un seguidor de cuña reciprocante en línea. La leva debe tener un círculo base de 3.0 in y girar en sentido horario. Construya el perfil gráficamente.

9–38. Una leva de placa tiene que proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 para un seguidor de cuña reciprocante en línea. La leva debe tener un círculo base de 2.0 in y girar en sentido antihorario. Construya el perfil gráficamente.

9–39. Una leva de placa tiene que proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 para un seguidor de rodillo reciprocante en línea. El diámetro del rodillo es de 1 in. La leva debe tener un círculo base de 3.0 in y girar en sentido horario. Construya gráficamente el perfil y calcule el mayor ángulo de presión.

9–40. Una leva de placa tiene que proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 para un seguidor de rodillo reciprocante en línea. El diámetro del rodillo es de 0.75 in. La leva debe tener un círculo base de 2.0 in y girar en sentido antihorario. Construya gráficamente el perfil y calcule mayor el ángulo de presión.



Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (in)	Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (in)	Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (in)
0	0.000	130	0.971	250	0.337
10	0.000	140	0.996	260	0.196
20	0.000	150	1.000	270	0.091
30	0.000	160	1.000	280	0.029
40	0.004	170	1.000	290	0.004
50	0.029	180	1.000	300	0.000
60	0.091	190	0.996	310	0.000
70	0.196	200	0.971	320	0.000
80	0.337	210	0.909	330	0.000
90	0.500	220	0.804	340	0.000
100	0.663	230	0.663	350	0.000
110	0.804	240	0.500	360	0.000
120	0.909				

FIGURA P9.37 Problemas 37 a 44 y 47 a 54.

9–41. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de rodillo descentrado. El seguidor se encuentra en el plano vertical contactando la parte superior de la leva. La distancia del descentrado es de 0.75 in a la izquierda del centro de la leva. El diámetro del rodillo es de 1 in. La leva debe tener un círculo base de 3.0 in y girar en sentido horario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión más grande.

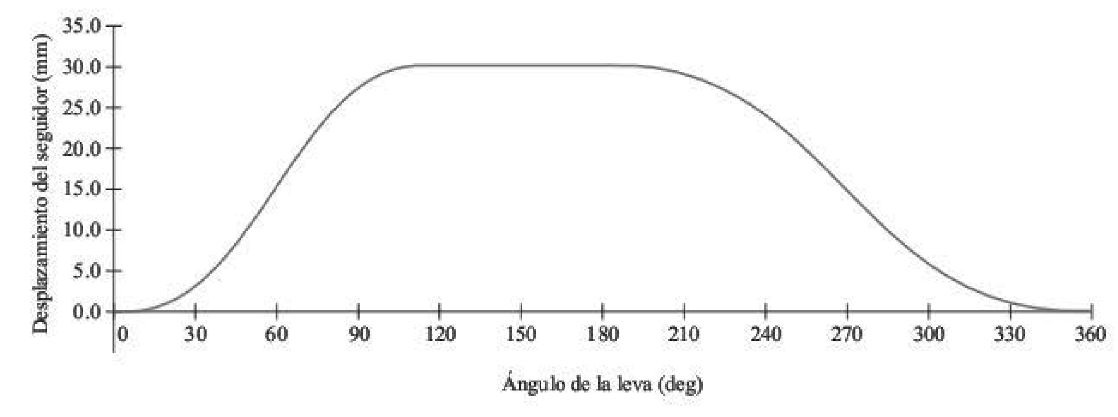
9–42. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de rodillo con descentrado. El seguidor se encuentra en el plano vertical contactando la parte superior de la leva. La distancia del descentrado es de 0.5 in a la derecha del centro de la leva. El diámetro del rodillo es de 0.75 in. La leva debe tener un círculo base de 2.0 in y girar en sentido antihorario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

9–43. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de cara plana. La leva debe tener un círculo base de 5.0 in y girar en sentido horario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

9–44. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de cara plana. La leva debe tener un círculo base de 6.0 in y girar en sentido antihorario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

9–45. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.45 a un seguidor de rodillo con pivote. La longitud del eslabón seguidor es de 4 in y pivota a 5 in del eje de rotación de la leva. El diámetro del rodillo es de 1 in. La leva debe tener un círculo base de 3.0 in y girar en sentido horario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

9–46. Una leva de placa debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.45 a un seguidor de rodillo con pivote. La longitud del eslabón seguidor es de 3 in y pivota a 3.5 in del eje de rotación de la leva. El diámetro del rodillo es de 0.75 in. La leva debe tener un



Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (mm)
0	0.000
10	0.113
20	0.865
30	2.725
40	5.865
50	10.113
60	15.000
70	19.887
80	24.135
90	27.275
100	29.135
110	29.887
120	30.000

Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (mm)
130	30.000
140	30.000
150	30.000
160	30.000
170	30.000
180	30.000
190	29.966
200	29.736
210	29.135
220	28.035
230	26.369
240	24.135

Ángulo de la leva (deg)	Desplazam. del seguidor (mm)
250	21.402
260	18.300
270	15.000
280	11.700
290	8.598
300	5.865
310	3.631
320	1.965
330	0.865
340	0.264
350	0.034
360	0.000

FIGURA P9.45 Problemas 45, 46, 55 y 56.

círculo base de 2.0 in y girar en sentido antihorario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

Diseño analítico del perfil de una leva de placa

En los problemas 9-47 a 9-56 use las ecuaciones específicas del perfil de la leva y una hoja de cálculo para generar una tabla con las coordenadas del perfil para cada 10° del ángulo de la leva.

9–47. Use la leva descrita en el problema 9–37.

9–48. Use la leva descrita en el problema 9–38.

9–49. Use la leva descrita en el problema 9–39.

9–50. Use la leva descrita en el problema 9–40.

9–51. Use la leva descrita en el problema 9–41.

9–52. Use la leva descrita en el problema 9–42.

9–53. Use la leva descrita en el problema 9–43.

9–54. Use la leva descrita en el problema 9–44.

9–55. Use la leva descrita en el problema 9–45.

9–56. Use la leva descrita en el problema 9–46.

Diseño gráfico de una leva cilíndrica

9–57. Una leva cilíndrica debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de rodillo. El diámetro del rodillo es de 1.0 in. El diámetro del cilindro es de 5 in y gira en sentido horario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

9–58. Una leva cilíndrica debe proporcionar el desplazamiento que se muestra en la figura P9.37 a un seguidor reciprocante de rodillo. El diámetro del rodillo es de 30 mm. El diámetro del cilindro es de 150 mm y gira en sentido horario. Construya el perfil gráficamente y calcule el mayor ángulo de presión.

Diseño analítico de una leva cilíndrica

En los problemas 9-59 y 9-60 use las ecuaciones del perfil de levas cilíndricas y una hoja de cálculo para generar una tabla con las coordenadas del perfil para cada ángulo de 10° de la leva.

9–59. Use la leva descrita en el problema 9.57.

9–60. Use la leva descrita en el problema 9.58.

Problemas de mecanismo de Ginebra

9–61. Se diseñó un mecanismo de Ginebra con cuatro estaciones. La distancia entre los ejes impulsor e impulsado es de 3 in. El brazo impulsor gira a una velocidad constante de 60 rpm en sentido antihorario. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda, cuando el brazo impulsor gira 25° a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

9–62. Se diseñó un mecanismo de Ginebra con cinco estaciones. La distancia entre los ejes impulsor e impulsado es de 60 mm. El brazo impulsor gira a una velocidad constante de 70 rpm en sentido horario. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda, cuando el brazo impulsor gira 20° a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

9–63. Se diseñó un mecanismo de Ginebra con seis estaciones. La distancia entre los ejes impulsor e impulsado es de 4 in. El brazo impulsor gira a una velocidad constante de 90 rpm en sentido antihorario. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda, cuando el brazo impulsor gira 25° a partir de la posición donde el rodillo acaba de entrar a la ranura.

ESTUDIOS DE CASO

9–1. La leva mostrada en la figura E9.1 sirve para alimentar papel a una imprenta. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo; luego, conteste las preguntas siguientes para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.

1. Conforme el eje *G* se fuerza a girar en sentido horario, determine el movimiento de la parte *E*.
2. ¿Cuál es el nombre de la unión entre las partes *E* y *F*?
3. ¿Qué hace que la pila de papel, ubicada en *J*, permanezca al nivel donde un mecanismo en *B* pueda engancharlo?
4. ¿Por qué cambia el radio de la parte *H*?
5. ¿Qué característica permite que la rotación de la parte *H* se transmita a la parte *G*?
6. Describa el mecanismo que realiza la misma función de esta leva en pilas más pequeñas de papeles en impresoras de computadora y fotocopiadoras.

9–2. La leva de la figura E9.2 impulsa el eslabón *J* que, a la vez, impulsa otro mecanismo que no se muestra. El eslabón *A* pivota en la parte inferior de la bancada de la máquina. Un espárrago se extiende del eslabón *A* a través de una ranura en el eslabón *B*. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.

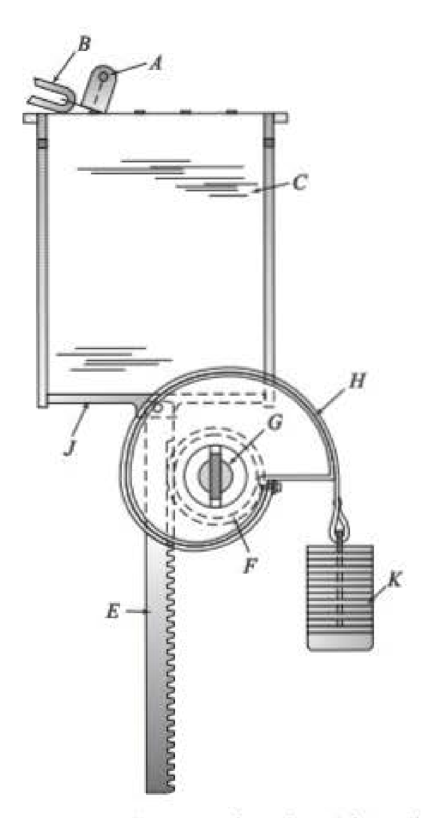


FIGURA E9.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Describa el movimiento del eslabón *B* conforme la leva *D* gira en sentido horario.
2. ¿Qué tipo de leva es *D*?
3. ¿Qué tipo de seguidor es *C*?
4. ¿Qué tipo de componente es la parte *F*?
5. Describa la acción de la parte *F*.
6. ¿Qué tipo de componente es la parte *E*?
7. Describa la función de la parte *E*.

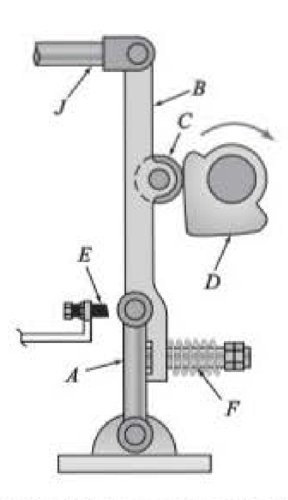


FIGURA E9.2 (Cortesía de Industrial Press).

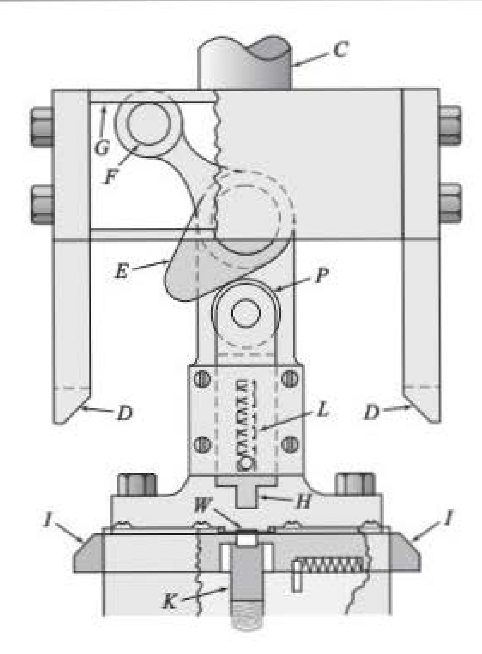


FIGURA E9.3 (Cortesía de Industrial Press).

8. Describa el movimiento cíclico de la parte *B*.
9. ¿Qué cambio ocurriría en el movimiento de *B* si se alargara la parte *E*?
10. ¿Qué cambio ocurriría en el movimiento de *B* si se acortara el espárrago en la parte *E*?

9–3. La máquina mostrada en la figura E9.3 troquela y moldea partes de acero. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.
1. Conforme la varilla *C* comienza a deslizarse hacia abajo, ¿cuál es el movimiento de la leva *E*?
2. ¿Cuál es el movimiento del émbolo *H*?
3. ¿Qué sucede con la tira de metal sujeta en *W*?
4. Conforme la varilla *C* continúa deslizándose hacia abajo, ¿cuál es el movimiento del émbolo?
5. ¿Cuál es el movimiento del deslizador *I*?
6. ¿Qué sucede con la tira de acero en *W*?

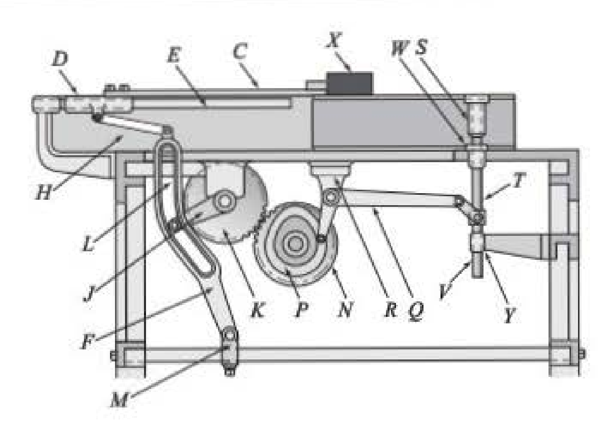


FIGURA E9.4 (Cortesía de Industrial Press).

7. Conforme la varilla *C* comienza a deslizarse hacia arriba, ¿cuál es el movimiento del émbolo *H*?
8. ¿Cuál es el objetivo de este mecanismo?
9. ¿Por qué hay resortes en contacto con el deslizador *I*?
10. ¿Por qué un resorte soporta la parte *K*?
11. ¿Qué tipo de mecanismo podría impulsar la varilla *C*?

9–4. En la figura E9.4 se muestra una máquina. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo; luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su operación.
1. Describa el movimiento del eslabón *F*, cuando el engrane *K* gira en sentido horario.
2. Comente los detalles del movimiento cíclico del eslabón *F*.
3. Describa el movimiento de la corredera *D*, cuando el engrane *K* gira en sentido horario.
4. Describa el movimiento del engrane *N*, cuando el engrane *K* gira en sentido horario.
5. Describa el movimiento del eslabón *Q*, cuando el engrane *K* gira en sentido horario.
6. ¿A qué tipo de componente pertenece la parte *P*?
7. Describa el movimiento al que está restringida la parte *V*.
8. Comente con precisión la manera en que el eslabón *Q* está sujeto a la parte *V*.
9. Comente el movimiento cíclico de toda la máquina.
10. Explique la necesidad de una máquina así.

ENGRANES: ANÁLISIS CINEMÁTICO Y SELECCIÓN

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Reconocer los diferentes tipos de engranes.**
2. **Identificar y usar las características geométricas estándares de los engranes.**
3. **Calcular la distancia entre centros, la razón de contacto, las limitaciones por la interferencia y las variaciones en holgura.**
4. **Calcular y usar la razón de velocidad para determinar las propiedades cinemáticas de los engranes acoplados.**
5. **Determinar las propiedades cinemáticas de engranes y trenes de engranes planetarios.**

10.1 INTRODUCCIÓN

Los engranes son componentes sumamente comunes utilizados en muchas máquinas. La figura 10.1 ilustra el mecanismo impulsor de los rodillos alimentadores de papel de un escáner. En tal aplicación, un motor eléctrico impulsa un pequeño engrane que, a la vez, impulsa engranes más grandes para hacer girar los rodillos alimentadores. Después, los rodillos alimentadores jalan del documento hacia el dispositivo de escaneado de la máquina.

En general, la función de un engrane es transmitir movimiento de un eje giratorio a otro. En el caso del alimentador de la figura 10.1, el movimiento del motor se transmite a los ejes que transportan los rodillos. Además de transmitir movimiento, los engranes se utilizan con frecuencia para incrementar o disminuir la velocidad, o bien, para cambiar la dirección del movimiento de un eje a otro.

Son sumamente comunes en la salida de fuentes de potencia mecánica, como motores eléctricos y motores de combustión interna, que giran a velocidades mucho mayores de lo que la aplicación requiere. Por ejemplo, una máquina fax necesita que los rodillos alimenten el documento a través de la máquina a una rapidez compatible con el dispositivo de escaneado. No obstante, un motor eléctrico típico gira a velocidades mayores de las necesarias en los rodillos. Por ello, la velocidad del motor se debe reducir conforme se transmite a los ejes de los rodillos de alimentación. Asimismo, los rodillos superiores tienen que girar en dirección opuesta a la de los rodillos inferiores, de modo que los engranes son una elección natural para esta aplicación.

La figura 10.2a muestra dos engranes rectos acoplados, diseñados para transmitir movimiento entre sus respectivos ejes. La figura 10.2b presenta dos rodillos o discos de fricción, que también fueron diseñados para transmitir movimiento entre los ejes. Es evidente que estos discos son menos costosos que las complejas configuraciones de los engranes. Sin embargo, los discos dependen de la fricción para transmitir las fuerzas que acompañan el movimiento. Ya que muchas aplicaciones requieren transmisión de potencia (movimiento y fuerzas), las superficies lisas de los discos quizá no sean capaces de generar las fuerzas de fricción suficientes y, por lo tanto, se deslizarían con mayores cargas.

Para eliminar la posibilidad de deslizamiento, se crea un engrane de modo tal que las superficies lisas de los discos se sustituyen por dientes, que ofrecen un acoplamiento positivo y eliminan el deslizamiento. Desde un punto de vista cinemático,

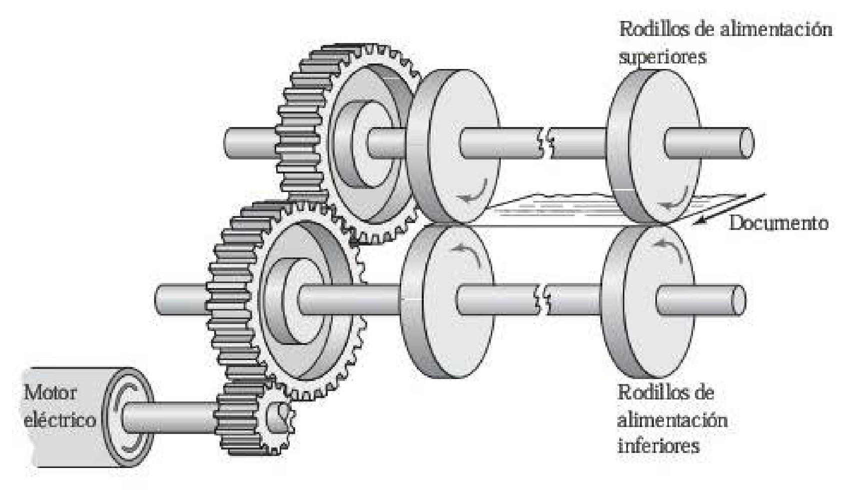


FIGURA 10.1 Rodillos de alimentación de un escáner.

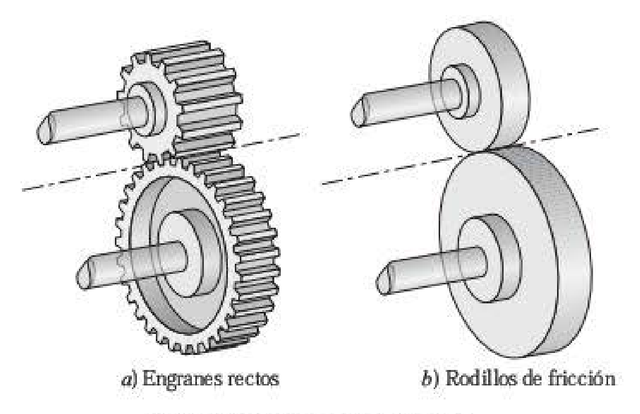


FIGURA 10.2 Engranes y rodillos.

el par de engranes de la figura 10.2a reemplazaría los discos de la figura 10.2b, ya que los diámetros efectivos son idénticos.

En este capítulo se estudian los principios generales del engranaje y las relaciones cinemáticas asociadas. El enfoque del libro es el análisis y el diseño de mecanismos que son necesarios para suministrar el movimiento requerido por una máquina. En congruencia con tal objetivo, el enfoque del presente capítulo es la selección de engranes estándar para producir el movimiento necesario en las máquinas industriales. Como son los engranes más utilizados y menos complicados, se hace énfasis en los engranes rectos. Se invita al lector a consultar otras fuentes para un mayor detalle sobre los perfiles de dientes de engranes, manufactura, calidad, diseño de resistencia y engranes más complejos [refs. 4, 13 y 15].

10.2 TIPOS DE ENGRANES

Los *engranes rectos* son los más sencillos y, por consiguiente, el tipo más común de los engranes. Los dientes de un engrane recto son paralelos al eje de rotación. Los engranes rectos sirven para transmitir movimiento entre ejes paralelos, las cuales se encuentran en la mayoría de aplicaciones. En la figura 10.3a se observa un par de engranes rectos acoplados.

Una *cremallera* es un caso especial de engrane recto donde los dientes no están configurados alrededor de un círculo, sino en una base plana. La cremallera se visualiza como un engrane recto con un diámetro infinitamente largo. Cuando la cremallera se acopla con un engrane recto, se produce movimiento de traslación. En la figura 10.3b se observan una cremallera y un engrane recto acoplados.

Los *engranes internos* o *anulares* tienen los dientes construidos sobre la superficie interior de un círculo. Cuando se acoplan con un engrane recto, el engrane interno aporta la ventaja de reducir la distancia entre los centros de los engranes para lograr cierta variación de velocidad. En la figura 10.3c se ilustra un engrane interno acoplado con un engrane recto tradicional.

Los *engranes helicoidales* son parecidos a los engranes rectos, que sirven en las mismas aplicaciones que estos. La diferencia es que los dientes de un engrane helicoidal se inclinan hacia el eje de rotación. El ángulo de inclinación se conoce como el *ángulo de hélice* φ. Este ángulo brinda un acoplamiento más gradual de los dientes durante el acoplamiento y produce impacto y ruido menores. Por su accionamiento más suave, en las aplicaciones de alta velocidad se prefieren engranes helicoidales. Sin embargo, el ángulo de hélice produce fuerzas de empuje y pares de flexión, que no se generarían en los engranes rectos. En la figura 10.3d se ilustra un par de engranes helicoidales acoplados.

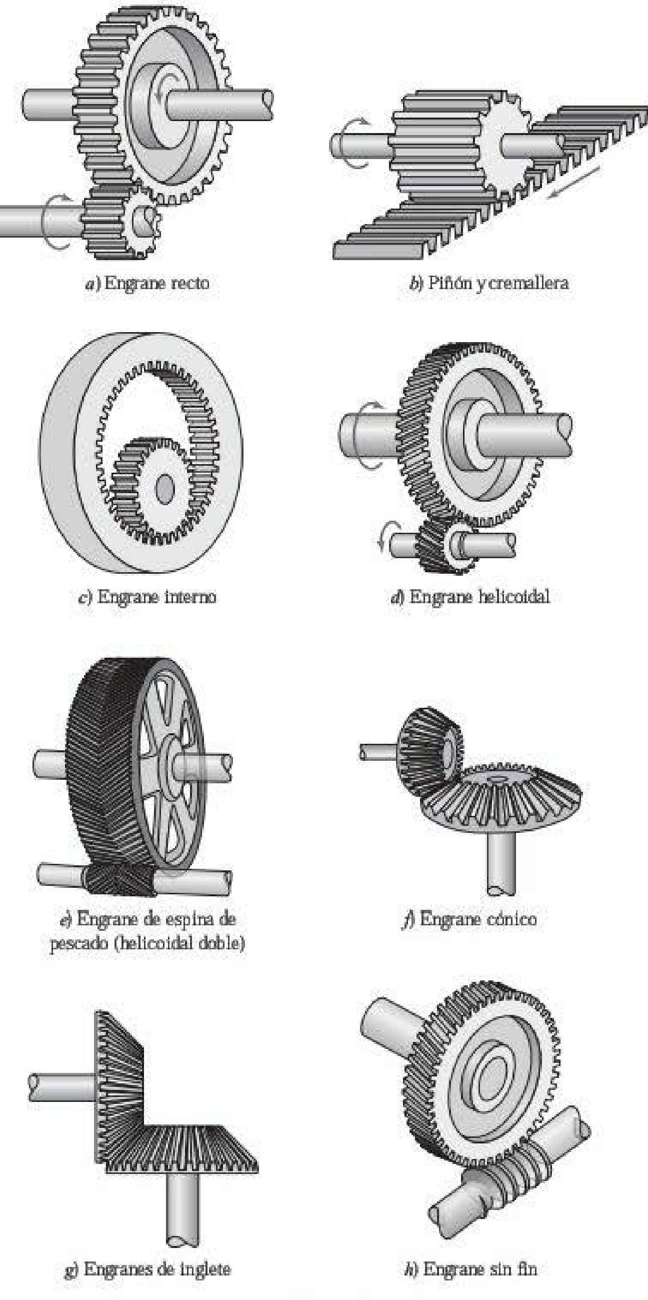


FIGURA 10.3 Tipos de engranes.

Los *engranes de espina de pescado* se utilizan en las mismas aplicaciones que los engranes rectos y helicoidales. De hecho, también se conocen como *engranes helicoidales dobles*. El engrane de espina de pescado se parece a dos engranes helicoidales opuestos con los extremos colocados uno contra otro. Esta configuración compleja sirve de contrapeso a la fuerza de empuje de un engrane helicoidal. La figura 10.3e ilustra un engrane de espina de pescado.

Los *engranes cónicos* tienen los dientes moldeados sobre una superficie cónica y sirven para transmitir movimiento entre ejes no paralelos. Aun cuando la mayoría de sus aplicaciones implican la conexión de ejes perpendiculares, los engranes cónicos también se utilizan en aplicaciones con ejes cuyos ángulos son mayores y menores de 90°. Cuando los engranes cónicos se acoplan, sus conos presentan un vértice común. Sin embargo, el ángulo real del cono de cada engrane depende de la razón de engrane de los engranes acoplados. Por consiguiente, los engranes cónicos se

diseñan en conjunto, por lo que no es posible sustituir un engrane para modificar la razón de engrane. En la figura 10.3f se ilustra un par de engranes cónicos acoplados.

Los *engranes de inglete* son un caso especial de engranes cónicos, donde los engranes son del mismo tamaño y el ángulo de los ejes es de 90°. En la figura 10.3g se presenta un par de engranes de inglete acoplados.

Un *tornillo sin fin* y un *engrane sin fin* sirven para transmitir movimiento entre ejes no paralelos que no se intersecan. El tornillo sin fin tiene un diente en forma de espiral alrededor de un cilindro de paso. Este diente también se conoce como *cuerda*, porque se asemeja a la cuerda de un tornillo. Similar al engrane helicoidal, la espiral de paso del tornillo sin fin genera una fuerza axial que se debe tomar en cuenta. En la mayoría de las aplicaciones, el tornillo sin fin impulsa al engrane sin fin para efectuar grandes reducciones de velocidad. Por lo general, un engrane sin fin no es reversible, es decir, el engrane sin fin no puede impulsar el tornillo sin fin. En la figura 10.3h se muestran acoplados un tornillo sin fin y un engrane sin fin.

10.3 TERMINOLOGÍA DE UN ENGRANE RECTO

Como ya se mencionó, los engranes rectos son el tipo de engrane más común. Además, la terminología que se usa para describir los engranes rectos también se aplica a otros tipos de engranes. Por lo tanto, se requiere un análisis concienzudo de las características y la terminología de los engranes rectos.

En la figura 10.4 se indican las características principales del diente de un engrane recto.

El *círculo de paso* de un engrane es el círculo que representa el tamaño del rodillo de fricción correspondiente que podría sustituir al engrane. Tales rodillos equivalentes se presentaron en la figura 10.2b. Cuando dos engranes se acoplan, sus círculos de paso son tangentes en el punto de contacto sobre la línea que une el centro de ambos círculos. En la figura 10.4 se observa el círculo de paso.

El *punto de paso* es el punto de contacto de los dos círculos de paso.

El *paso diametral d* de un engrane es simplemente el diámetro del círculo de paso. Como la cinemática de un engrane recto es idéntica a la de un rodillo de fricción análogo, el paso diametral es un parámetro del engrane muy utilizado. Sin embargo, como el círculo de paso está ubicado cerca de la mitad de los dientes del engrane, el paso diametral no es posible medirlo en forma directa en el engrane.

El *número de dientes N* es simplemente el número total de dientes del engrane. Es evidente que este valor habrá de ser un entero, porque no se pueden utilizar fracciones de diente.

El *paso circular p* es la distancia medida a lo largo del círculo de paso de un punto sobre un diente al punto correspondiente, en el diente adyacente del engrane. El paso circular se calcula a partir del número de dientes y el paso diametral del engrane. La ecuación aplicable es:

$$p = \frac{\pi d}{N} \tag{10.1}$$

El *círculo base* de un engrane es el círculo a partir del cual se construye la forma curva del diente del engrane. En la siguiente sección se exponen los detalles acerca de la generación del perfil curvo del diente.

El *diámetro base* d_b es el diámetro del círculo a partir del cual se genera el perfil del diente del engrane. En la sección 10.4 se explica completamente el círculo base.

El *ancho de cara F* es la longitud del diente del engrane paralela al eje de la flecha.

El *adendo a* es la distancia radial del círculo de paso a la parte superior del diente del engrane.

El *dedendo b* es la distancia radial del círculo de paso a la parte inferior del diente del engrane.

La *profundidad total* h_T es la altura del diente del engrane, que es igual a la suma del adendo y el dedendo.

La *tolerancia c* es la cantidad en la cual el dedendo excede al adendo. Este es el espacio entre la parte superior del diente del engrane y la parte inferior del diente del engrane acoplado.

La *holgura B* es la cantidad que el ancho del espacio entre dientes excede al espesor del diente del engrane, medida sobre el círculo de paso.

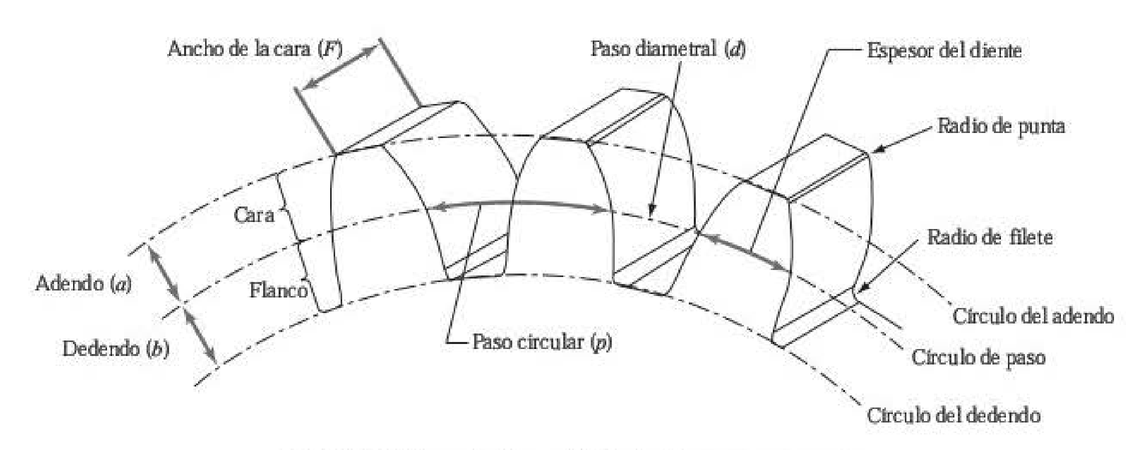


FIGURA 10.4 Características del diente de un engrane recto.

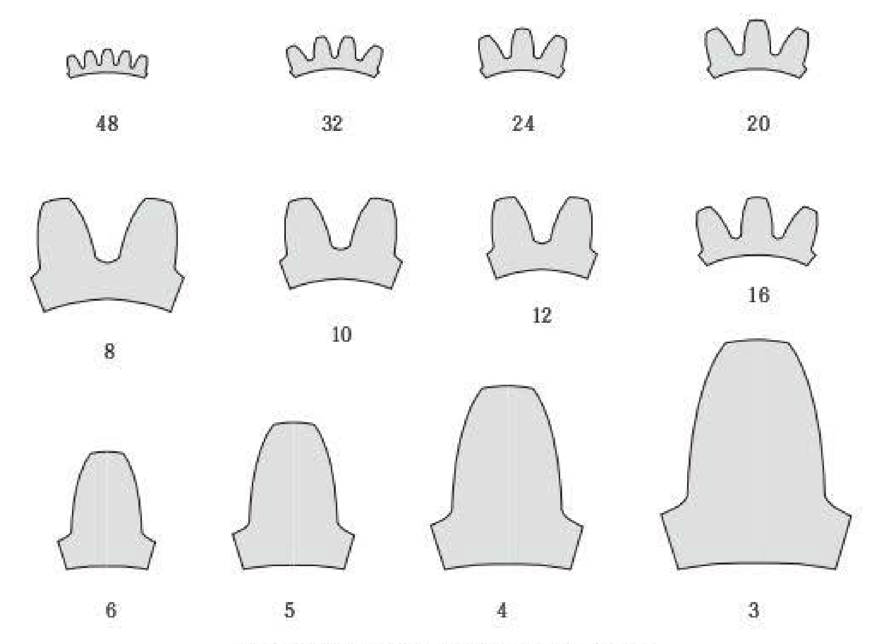


FIGURA 10.5 Tamaños estándar de diente.

El *paso diametral* P_d, o simplemente *paso*, se refiere en realidad al tamaño del diente, que se ha convertido en un estándar de especificación para el tamaño del mismo. Formalmente, el paso diametral es el número de dientes por pulgada del paso diametral.

$$P_d = \frac{N}{d} \tag{10.2}$$

El paso diametral es un parámetro de engranes que se usa comúnmente en las unidades estadounidenses tradicionales. De nueva cuenta, es una medida relacionada con el tamaño del diente de un engrane. En la figura 10.5 se muestran los tamaños estándar de dientes y sus pasos diametrales. Aun cuando los engranes acoplados suelen tener diferentes diámetros y diferente número de dientes, los *engranes acoplados deben tener el mismo paso diametral*. Lo anterior debería ser evidente porque el paso diametral es una medida del tamaño del diente.

El paso diametral no se mide directamente sobre el engrane, aunque es un valor de referencia extremadamente común. En teoría, es posible producir casi cualquier tamaño de dientes de engrane; no obstante, en aras de la estandarización de herramientas, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes (AGMA, por las siglas de American Gear Manufacturer's Association) designó los pasos diametrales más usados, los cuales se muestran en la tabla 10.1. Aun cuando no hay un significado físico, los pasos diametrales estándar preferidos están dados en enteros pares. Hay calibradores que miden los pasos diametrales estándar. Las unidades del paso diametral son el recíproco de pulgadas (in^{-1}); de cualquier modo, no es frecuente especificar unidades cuando se expresan los valores numéricos.

El *módulo m* es un parámetro de engrane que se utiliza comúnmente en el sistema internacional (SI) de unidades. El módulo también es una medida relativa al tamaño del diente. Se define como la razón entre el paso diametral y el número de dientes del engrane.

$$m = \frac{d}{N} \tag{10.3}$$

El módulo también es una medida relativa del tamaño del diente y, en teoría, el recíproco del paso diametral. Sin embargo, cuando se emplea en el SI, se mide en milímetros. Entonces, el módulo y el paso diametral no son recíprocos numéricamente. La relación entre el paso diametral y el módulo, tomando en cuenta las unidades, es

$$m = \frac{25.4}{P_d} \tag{10.4}$$

Como con el paso diametral, los engranes rectos métricos comercialmente disponibles se fabrican con módulos estandarizados. Los valores comunes se presentan en la tabla 10.2.

TABLA 10.1 Pasos diametrales estándar

Paso grueso		Paso fino	
2	6	20	80
2.25	8	24	96
2.5	10	32	120
3	12	40	150
3.5	16	48	200
4		64	

TABLA 10.2 Módulos métricos estandarizados

1	4	16
1.25	5	20
1.5	6	25
2	8	32
2.5	10	40
3	12	50

Si se sustituyen las ecuaciones (10.2) y (10.3) en (10.1), el paso circular también se expresa como:

$$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{\pi}{P_d} = \pi m \qquad (10.5)$$

El *ángulo de presión* ϕ es el ángulo entre una línea tangente a ambos círculos de paso de los engranes acoplados y una línea perpendicular a los dientes en el punto de contacto. La línea tangente a los círculos de paso se conoce como *línea de paso*. La línea perpendicular a la superficie de los dientes en el punto de contacto se conoce como *línea de presión* o *línea de contacto*. Por lo tanto, el ángulo de presión se mide entre la línea de paso y la línea de presión. En la figura 10.6 se muestra el ángulo de presión.

El ángulo de presión afecta la forma relativa de un diente de engrane, como se indica en la figura 10.7. Aun cuando los engranes se fabrican en un rango amplio de ángulos de presión, la mayoría de los engranes están estandarizados en 20° y 25°. Los engranes con un ángulo de presión de 14½° se usaron pródigamente, aunque ahora se consideran obsoletos. Se fabrican todavía solo como sustitutos en trenes de engranes viejos que aún se utilizan. Como el ángulo de presión afecta la forma del diente, *dos engranes acoplados también deben tener el mismo ángulo de presión.*

Recuerde que las fuerzas se transmiten de manera perpendicular a las superficies en contacto. Por ello, la fuerza que actúa sobre un diente lo hace a lo largo de la línea de presión. Como se verá en la siguiente sección, los dientes de un engrane están moldeados para mantener un ángulo de presión constante durante el acoplamiento. Los engranes con menores ángulos de presión transmiten eficientemente el torque y generan menores cargas radiales sobre el eje y los cojinetes de soporte. Sin embargo, conforme los ángulos de presión se reducen, hay una mayor tendencia de los dientes del engrane a interferirse conforme se engranan.

10.4 PERFILES DE DIENTES DE INVOLUTA

Para obtener un movimiento suave, el diente del engrane debe tener una forma que mantenga el engrane impulsado girando a velocidad constante a través del proceso de engranaje y desengranaje. Para decirlo de manera concisa, los engranes necesitan una relación de velocidad constante. Esta condición requiere que la trayectoria del contacto del diente del engrane sea una línea recta, la cual también debe intersecar el punto común a ambos círculos de paso. La figura 10.8 muestra dos dientes acoplados en tres momentos diferentes del proceso de engranaje. Observe que el punto de contacto traza una recta, conocida como *línea de contacto*. Esta línea también interseca el punto tangente a ambos círculos de paso, lo cual es necesario para que los engranes mantengan una relación de velocidad constante.

El descubrimiento de una forma de diente que cumpliera con el cometido no fue tarea sencilla; sin embargo, se han identificado varias formas como posibles candidatos. De las formas posibles, la involuta de un círculo se ha convertido en un estándar en la mayoría de las aplicaciones de engranes. La forma de involuta se construye desenrollando un alambre tenso a partir de un círculo base de diámetro d_b. La trayectoria trazada por el extremo del alambre se denomina *curva de involuta de un círculo*. En la figura 10.9a se ilustra un perfil de involuta. Se utiliza un segmento de esta curva de involuta para formar el perfil del diente del engrane.

Como se estableció en la sección anterior, en un perfil de involuta la línea de contacto es idéntica a la línea de presión. El ángulo de presión, o inclinación de la línea de contacto, se determina a partir del segmento de la curva de involuta usado por el diente del engrane. El ángulo de presión se incrementa conforme aumenta la distancia entre el círculo base y el círculo de paso. Esto se muestra en la figura 10.9b. La relación entre el

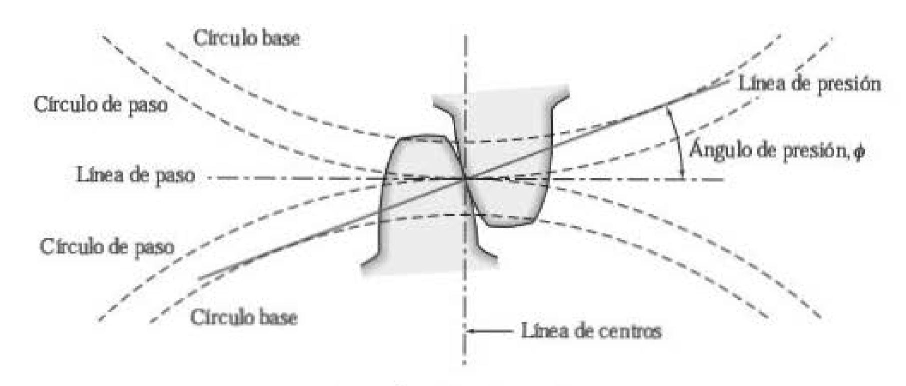


FIGURA 10.6 Ángulo de presión.

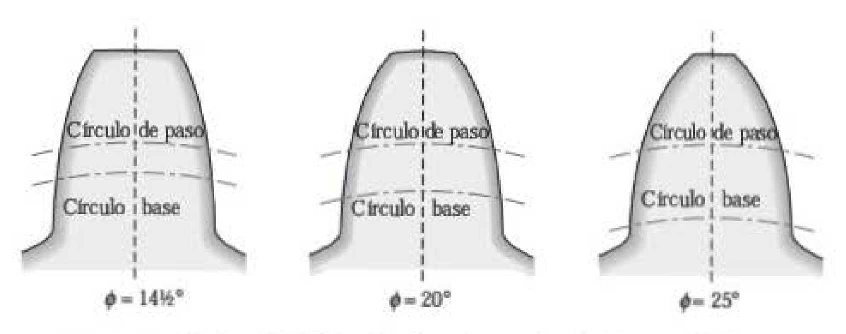


FIGURA 10.7 Influencia del ángulo de presión sobre las formas del diente.

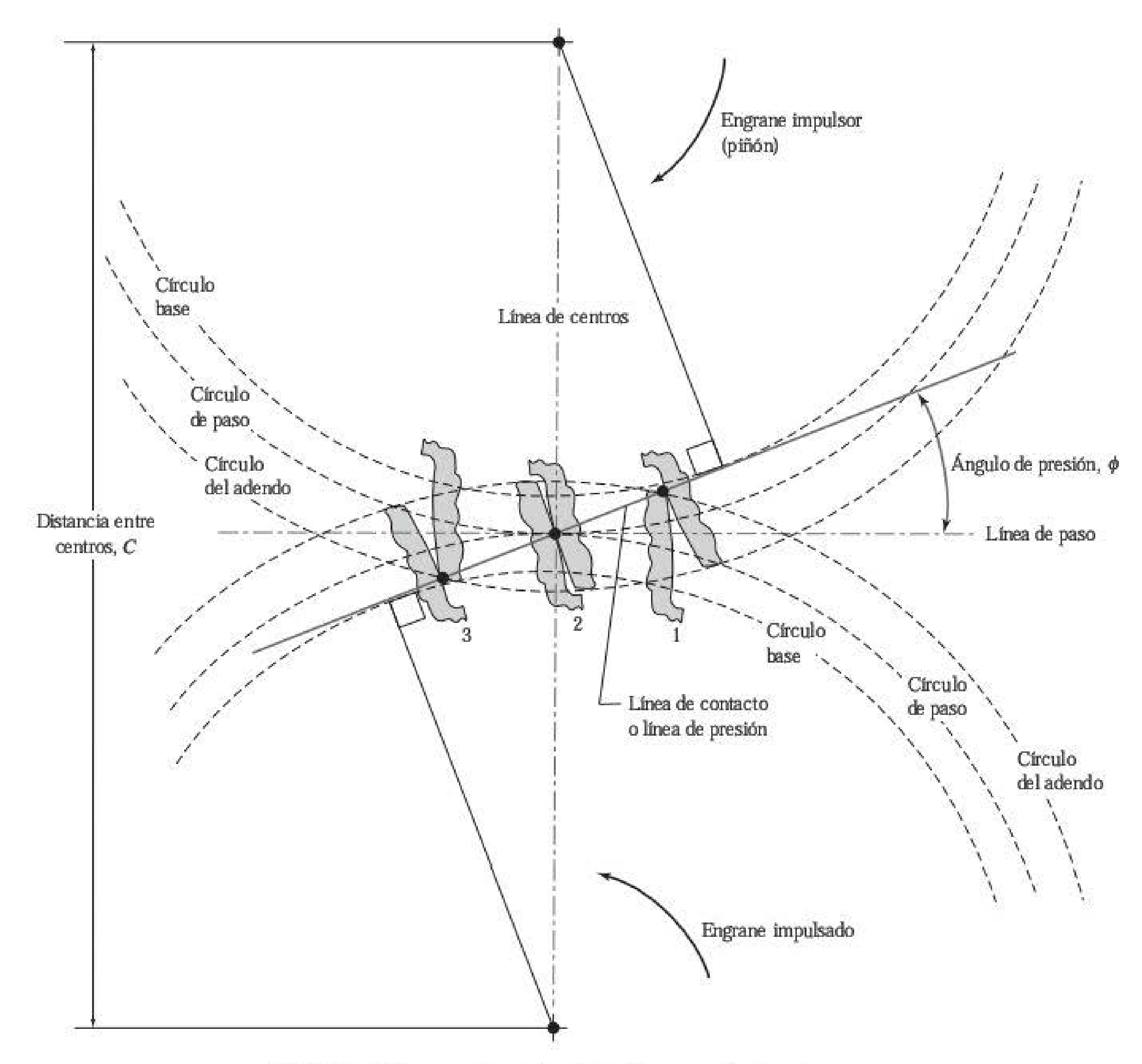


FIGURA 10.8 Proceso de acoplamiento de un par de engranes.

FIGURA 10.9 Diente de engrane de involuta.

ángulo de presión, el paso diametral y el diámetro del círculo base se expresa como:

$$d_b = d \cos\phi \tag{10.6}$$

Como por definición una involuta se extiende a partir del círculo base, cualquier porción del perfil del diente dentro del círculo base no es de involuta. Es usual maquinar esta parte como una línea radial con un filete en el círculo del dedendo. La porción del diente dentro del círculo base no fue diseñada para entrar en contacto con el diente del engrane acoplado. Este contacto provocaría interferencia.

La desventaja más significativa en el uso de dientes de engranes con perfiles de involuta es la posibilidad de que haya interferencia entre la punta del diente del engrane y el flanco del engrane acoplado. Esto ocurre cuando el engrane más pequeño tiene pocos dientes. En ciertas circunstancias, es posible modificar la forma del diente a costa de la forma de la profundidad total (figura 10.9b) para eliminar la interferencia. En la sección 10.6.3 se analizarán la interferencia y el empleo de perfiles alternativos.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.1

Un engrane recto de involuta con 35 dientes y 20° profundidad total tiene un paso diametral de 10. Determine los diámetros del círculo de paso, del paso circular y del círculo base.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule el paso diametral***

El paso diametral se calcula reagrupando la ecuación (10.2).

$$d = \frac{N}{P_d} = \frac{35}{10} = 3.5\,\text{in}$$

2. ***Determine el paso circular***

El paso circular se calcula con la ecuación (10.5).

$$p = \frac{\pi}{P_d} = \frac{\pi}{(10\,\text{in}^{-1})} = 0.314\,\text{in}$$

3. ***Calcule el diámetro del círculo base***

El diámetro del círculo base se calcula directamente con la ecuación (10.6).

$$d_b = d\cos\phi = 3.5\,\cos(20°) = 3.289\,\text{in}$$

Es el diámetro del círculo donde se origina la forma de involuta, que no es una característica evidente cuando se inspecciona un engrane real.

10.5 ENGRANES ESTÁNDAR

Los engranes se fabrican mediante varios procesos. Para engranes metálicos, los procesos más comunes son corte con moldeadores o máquinas cortadoras, fundición y moldeado a través de procesos con polvo metalúrgico. Los engranes de plástico por lo general se fabrican con procesos de inyección. Se recomienda al lector consultar fuentes específicas de manufactura de engranes para los detalles sobre los procesos individuales [ref. 13].

Como en la mayoría de los procesos se utilizan herramientas especializadas, las cuales son únicas para cada tamaño de engrane, desde el punto de vista económico es deseable estandarizar el tamaño de los engranes. Los engranes estandarizados se encuentran fácilmente en la mayoría de los catálogos de equipo industrial. Estos engranes se venden indistintamente y pueden acoplarse con otros engranes que tengan el mismo paso diametral y el mismo ángulo de presión. Desde luego, para hacerlo, los fabricantes deben seguir una convención estándar para moldear los detalles del perfil del diente del engrane. La AGMA es la principal organización que supervisa este esquema de estandarización. Es una agrupación comercial de servicio completo que representa a cerca de 400 fabricantes, así como usuarios de engranes y engranajes, además de a proveedores de equipo.

Como se estableció anteriormente, dos engranes de involuta cualesquiera, con el mismo paso diametral y el mismo ángulo de presión, se acoplarán. Por lo tanto, los dientes de engrane se han estandarizado con base en el paso diametral y el ángulo de presión. Como se expuso en la sección 10.3, los ángulos de presión estándar son 14½°, 20° y 25°. El ángulo de presión de 14½° se ha vuelto obsoleto y sirve básicamente para sustituir un engrane usado.

El paso diametral es una medida del tamaño del diente. En aplicaciones donde las fuerzas que se transmiten son altas, se

TABLA 10.3 Especificaciones de la AGMA del diente de engrane de profundidad total

Características del diente para un ángulo de presión ϕ	Paso grueso ($P_d < 20$) 14½° o 20° o 25°	Paso fino ($P_d \geq 20$) 20°
Adendo, a	$\frac{1.000}{P_d}$	$\frac{1.000}{P_d}$
Dedendo, b	$\frac{1.250}{P_d}$	$0.002 + \frac{1.2}{P_d}$
Profundidad de trabajo, h_k	$\frac{2.000}{P_d}$	$\frac{2.000}{P_d}$
Profundidad total, h_t	$\frac{2.250}{P_d}$	$0.002 + \frac{2.200}{P_d}$
Espesor circular de diente, t	$\frac{1.571}{P_d}$	$\frac{1.571}{P_d}$
Radio del filete, r_f	$\frac{0.300}{P_d}$	no estandarizado
Tolerancia mínima, c	$\frac{0.250}{P_d}$	$0.002 + \frac{0.200}{P_d}$
Tolerancia c (al fondo del diente)	$\frac{0.350}{P_d}$	$0.002 + \frac{0.350}{P_d}$
Anchura mín. en la parte superior	$\frac{0.250}{P_d}$	no estandarizado
Estándar de la AGMA	201.02	207.04
Ancho de cara	$\frac{12}{P_d}$	$\frac{12}{P_d}$

requieren dientes más grandes, con menores valores del paso diametral. Los engranes se utilizan en una gran variedad de aplicaciones, desde relojes mecánicos con fuerzas pequeñas, hasta molinos con grandes rodillos de acero para fuerzas extremadamente grandes. Por consiguiente, hay disponible una gran variedad de pasos diametrales. Los valores estandarizados del paso diametral se indican en la tabla 10.1.

La mayoría de las características de un diente de engrane, como las que se identifican en la sección 10.3 y en la figura 10.3, están estandarizadas en relación con el paso diametral y el ángulo de presión. Las relaciones aplicables se presentan en la tabla 10.3. Estas relaciones son actualizadas por la AGMA, que revisa y publica los estándares nuevos cada año, la mayoría de los cuales están certificados por el Instituto Nacional Estadounidense de Estándares (ANSI, por la siglas de American National Standards Institute). Los estándares de la AGMA ejercen gran influencia en los mercados a nivel mundial.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.2

Considere el engrane recto de involuta con 35 dientes, a 20°, profundidad total y con un paso diametral igual a 10 del problema de ejemplo 10.1. Determine el diámetro del círculo del adendo, del círculo del dedendo y la tolerancia.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule el adendo***

El círculo del adendo es el diámetro exterior del engrane. El adendo es la distancia desde el círculo de paso sobre un diente del engrane hasta la parte superior del diente. La distancia estándar de este engrane se calcula a partir de las ecuaciones de la tabla 10.3.

$$a = \frac{1}{P_d} = \frac{1}{10} = 0.100 \text{ in}$$

2. ***Calcule el diámetro del adendo***

Observe que el adendo es la distancia entre los radios del círculo de paso y el círculo del adendo, de modo que el diámetro del círculo del adendo está descentrado una distancia a en ambos lados del círculo de paso. En el problema de ejemplo 10.1, el paso diametral es de 3.5 in. Entonces, el diámetro del círculo del adendo se calcula como:

$$d_a = d + 2a = 3.5 + 2(0.100) = 3.7 \text{ in}$$

3. ***Calcule el diámetro del dedendo***

De modo similar, el dedendo es la distancia entre los radios del círculo de paso y el círculo del dedendo. Por lo tanto, el dedendo se calcula como:

$$b = \frac{1.25}{P_d} = \frac{1.25}{10} = 0.125 \text{ in}$$

en tanto que el diámetro del círculo del dedendo es:

$$d_b = d - 2b = 3.5 - 2(0.125) = 3.25 \text{ in}$$

4. ***Calcule la cantidad del perfil del diente que no es de involuta***

Observe que el diámetro del círculo base de este problema de ejemplo es de 3.289 in. Comparando este con el del círculo del dedendo, se observa que una pequeña porción del perfil del diente del engrane se encuentra dentro del círculo base. Al considerar una distancia radial, la longitud de esta pequeña porción del perfil del diente se determina por:

$$\text{Longitud radial que no es involuta} = \frac{(3.289)}{2} - \frac{(3.250)}{2} = 0.019$$

Recuerde que por definición una involuta se extiende únicamente a partir del círculo base. Esta pequeña porción del perfil del diente no es una involuta, por lo que no debería hacer contacto con el diente del engrane acoplado.

5. ***Calcule la tolerancia***

Por último, la tolerancia es la distancia que el dedendo excede al adendo. Es el espacio entre la parte superior de un diente de un engrane y la parte inferior del diente del engrane acoplado. La distancia estándar para este engrane se calcula con las ecuaciones de la tabla 10.3.

$$c = \frac{0.25}{P_d} = \frac{0.25}{10} = 0.025 \text{ in}$$

Observe que la tolerancia es mayor que la distancia de la parte que no es involuta del diente del engrane. Por consiguiente, no se espera que haya contacto entre los dientes de los engranes en esta porción.

En la práctica, los perfiles manufacturados del diente del engrane se desvían del perfil teórico que se acaba de examinar. La composición del error toma en cuenta las imperfecciones de manufactura del perfil del diente, así como del espaciamiento entre un diente y otro. La AGMA [estándar 2000-A88] define un espectro de índices de calidad que van desde la menor precisión (3) hasta la mayor precisión (16). La velocidad de los dientes de engranes acoplados, la cual se analizará en la sección 10.7, es un factor que determina la calidad requerida. Evidentemente, el costo del engrane estará en función de la calidad.

10.6 RELACIONES DE LOS ENGRANES ACOPLADOS

En la figura 10.3 se muestran dos engranes en contacto. Cuando dos engranes se acoplan, por lo general el engrane más pequeño se denomina *piñón*; el más grande se conoce como *engrane principal* o simplemente *engrane*. Recuerde que para que dos engranes se acoplen, deben tener el mismo paso diametral y el mismo ángulo de presión. En las siguientes secciones, se analizarán las relaciones de dos engranes acoplados.

10.6.1 Distancia entre centros

La *distancia entre centros C* se define como la distancia de un centro a otro entre dos engranes acoplados, que también es la distancia entre los ejes que soportan los engranes. En la configuración común de engranes externos (figura 10.3), la distancia se expresa como:

$$C_{\text{engranes externos}} = r_1 + r_2 = \frac{(d_1 + d_2)}{2} \quad \textbf{(10.7)}$$

ya que

$$d = \frac{N}{P_d}$$

La ecuación (10.7) se replantea como:

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(N_1 + N_2)}{2P_d} \quad \textbf{(10.8)}$$

En engranes internos (figura 10.3c), la distancia entre centros es la diferencia entre los radios de paso y se expresa como:

$$C_{\text{engranes internos}} = r_2 - r_1 = \frac{(d_2 - d_1)}{2} = \frac{(N_2 - N_1)}{2P_d} \quad \textbf{(10.9)}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.3

Dos engranes de profundidad total a 20°, paso 5, se usan en una pequeña mezcladora de concreto para construcción. Los engranes transmiten potencia de un pequeño motor de combustión interna a la olla mezcladora. En la figura 10.10 se ilustra esta máquina. El piñón tiene 15 dientes y el engrane 30. Determine la distancia entre centros.

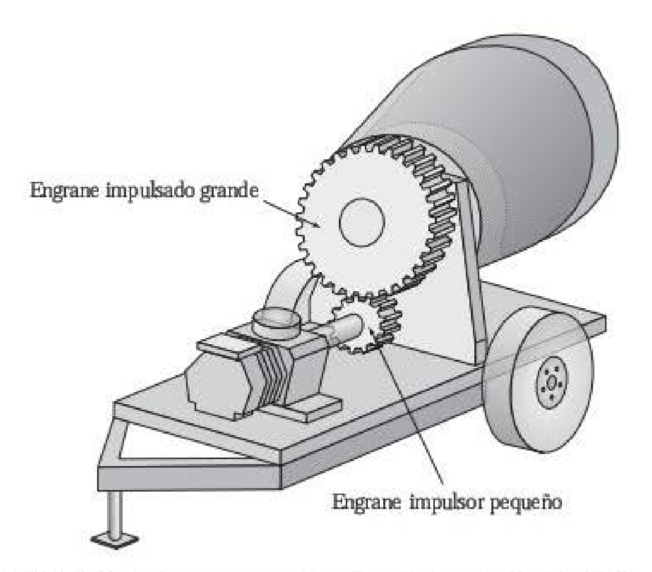


FIGURA 10.10 Mezcladora de concreto del problema de ejemplo 10.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule los diámetros de paso***

Los diámetros de paso para ambos engranes se determina con la ecuación (10.2).

$$d_1 = \frac{N_1}{P_d} = \frac{15}{5} = 3.0 \text{ in}$$

$$d_2 = \frac{N_2}{P_d} = \frac{30}{5} = 6.0\,\text{in}$$

2. ***Calcule la distancia entre centros***

Como los engranes son externos, la distancia entre centros se calcula con la ecuación (10.7).

$$C = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = \frac{(3.0\,\text{in} + 6.0\,\text{in})}{2} = 4.5\,\text{in}$$

3. ***Verifique la distancia entre centros***

Desde luego, se utiliza la ecuación (10.8) para calcular directamente la distancia entre centros a partir de la información dada.

$$C = \frac{(N_1 + N_2)}{2\,P_d} = \frac{(15 + 30)}{2(5)} = 4.5\,\text{in}$$

10.6.2 Razón de contacto

La *razón de contacto* m_p es el número promedio de dientes que están en contacto en un momento determinado. Evidentemente, la razón de contacto debe ser mayor que 1, porque no es posible que se pierda el contacto entre los engranes. En la práctica, las razones de contacto deberían ser mayores que 1.2. Los diseños robustos tienen razones de contacto de 1.4 o 1.5. Para ilustrar este principio, una razón de contacto de 1.2 indica que un par de dientes siempre está en contacto, mientras un segundo par está en contacto 20% de las veces.

Los valores más grandes de razones de contacto implican mayor suavidad, pues otro diente del engrane comparte la carga durante más tiempo en el proceso de engranaje/desengranaje. Asimismo, con más dientes que comparten la carga, se suele transmitir más potencia. Como quiera que sea, la razón de contacto se incrementa de forma más directa con el uso de engranes más grandes. Sin embargo, esto se contrapone a la mayoría de las metas de diseño de compactibilidad.

Numéricamente, la razón de contacto se expresa como la longitud de la trayectoria de contacto dividida entre el paso base p_b, el cual, a la vez, se define como la distancia entre puntos correspondientes de dientes adyacentes, medida sobre el círculo base. El paso base se calcula de la siguiente manera:

$$p_b = \frac{\pi d_1 \cos\phi}{N_1} = \frac{\pi d_2 \cos\phi}{N_2} \tag{10.10}$$

Desde luego, la trayectoria del punto de contacto en los dientes de involuta es una línea recta (sección 10.4). La longitud Z de esta trayectoria de contacto se deduce de las intersecciones de los respectivos círculos del adendo y la línea de contacto. Esta longitud es [ref. 9]:

$$Z = \sqrt{(r_2 + a_2)^2 - (r_2 \cos\phi)^2} - r_2 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{(r_1 + a_1)^2 - (r_1 \cos\phi)^2} - r_1 \operatorname{sen}\phi \tag{10.11}$$

De modo que una expresión de la razón de contacto en términos de la geometría del diente de engrane está dada por:

$$m_p = \frac{Z}{p_b} \tag{10.12}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.4

Para los engranes de la mezcladora de concreto del problema de ejemplo 10.3, determine la razón de contacto.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule las propiedades básicas del diente***

Los radios de paso de ambos engranes se calculan a partir de los diámetros de paso.

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{3.0\,\text{in}}{2} = 1.5\,\text{in}$$

$$r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{6.0\,\text{in}}{2} = 3.0\,\text{in}$$

Observando la tabla 10.3, el adendo para dientes de profundidad total a 20° es:

$$a = \frac{1}{P_d} = \frac{1}{5} = 0.20\,\text{in}$$

2. ***Calcule el paso base***

El paso base se calcula con la ecuación (10.10).

$$p_b = \frac{\pi d_1 \cos\phi}{N_1} = \frac{\pi(3.0 \text{ in})\cos(20°)}{15} = 0.6890 \text{ in}$$

3. ***Calcule la longitud de contacto***

La longitud de la línea de contacto se calcula con la ecuación (10.11).

$$Z = \sqrt{(r_2 + a_2)^2 - (r_2\cos\phi)^2} - r_2 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{(r_1 + a_1)^2 - (r_1\cos\phi)^2} - r_1 \operatorname{sen}\phi$$

$$= \sqrt{(3.0 + 0.2)^2 - (3.0\cos 20°)^2} - 3.0 \operatorname{sen} 20°$$

$$+ \sqrt{(1.5 + 0.2)^2 - (1.5\cos 20°)^2} - 1.5 \operatorname{sen} 20°$$

$$= 0.9255 \text{ in}$$

Luego, la razón de contacto se determina con la ecuación (10.12).

$$m_p = \frac{Z}{pb} = \frac{0.9255 \text{ in}}{0.6890 \text{ in}} = 1.3433$$

Aun cuando esta razón es aceptable, mayores valores serían mejores (1.4 a 1.5).

10.6.3 Interferencia

Como se mencionó anteriormente, la desventaja más significativa en el uso de perfiles de diente de engranes de involuta es la posibilidad de interferencia. Los dientes del engrane tienen perfiles de involuta entre el círculo base y el círculo del adendo. Cuando se construye un engrane con pocos dientes y ángulos de presión pequeños, el círculo del dedendo es considerablemente menor que el círculo base de la involuta. Por lo tanto, el diente entre el círculo base y el dedendo no es una involuta. Si el diente del engrane acoplado contactara esta porción del diente, se infringiría la condición fundamental de la razón de velocidad constante. Tal condición se conoce como *interferencia* y, cuando ocurre, los dientes pueden generar ruido, vibración y desgaste excesivos.

Los diseñadores provocan la interferencia cuando intentan obtener ensambles compactos usando muy pocos dientes en los engranes. La interferencia se presenta usualmente cuando un engrane pequeño se acopla con uno mucho más grande. Se logró obtener una relación que se emplea para determinar el número de dientes necesario en el engrane para eliminar la interferencia [ref. 9]. La ecuación (10.13) determina el número más grande de dientes en el engrane para asegurar que no haya interferencia. La relación está dada como una función del número de dientes en el piñón acoplado, junto con el ángulo de presión y el tamaño del adendo.

$$N_2 < \frac{\{N_1^2 \operatorname{sen}^2\phi - 4k^2\}}{4k - 2N_1 \operatorname{sen}^2\phi} \qquad \textbf{(10.13)}$$

donde k está definida por la relación del adendo:

$$a = \frac{k}{P_d}$$

La ecuación (10.13) sirve para tabular combinaciones adecuadas de engranes que eliminen la interferencia. Tales combinaciones se presentan en la tabla 10.4.

TABLA 10.4 Combinaciones de dientes de engrane para eliminar la interferencia

$\phi = 14°$		$\phi = 20°$		$\phi = 25°$	
Número de dientes del piñón	**Número máximo de dientes del engrane**	**Número de dientes del piñón**	**Número máximo de dientes del engrane**	**Número de dientes del piñón**	**Número máximo de dientes del engrane**
< 23	Interferencia	< 13	Interferencia	< 9	Interferencia
23	26	13	16	9	13
24	32	14	26	10	32
25	40	15	45	11	249
26	51	16	101	12	∞
27	67	17	1309		
28	92	18	∞		
29	133				
30	219				
31	496				
32	∞				

Observe en la tabla 10.4 que los piñones de 14½° con más de 32 dientes se acoplan, sin interferencia, con cualquier tamaño de engrane. También que un piñón estándar de 14½° con menos de 23 dientes sufre interferencia, indistintamente del tamaño del engrane acoplado. Estos límites se obtienen para otros ángulos de presión estándar.

En la tabla 10.4 es evidente que un piñón de involuta con un ángulo de presión de 25° permite el uso de engranes con menos dientes sin interferencia. Como consecuencia, es posible lograr ensambles más compactos. Este es el motivo principal de la popularidad de los dientes a 25° y la obsolescencia de los dientes a 14½°.

En el caso extremo donde un piñón se acopla con cualquier otro engrane, se sustituye $N_2 = \infty$ en la ecuación (10.13). Esto da el tamaño del piñón que se acopla con cualquier engrane. Como ya se mencionó, un piñón a 14½° con 32 dientes tiene tales propiedades. Una vez que se sustituye $N_2 = \infty$, se deduce la siguiente relación:

$$N_1 > \frac{2k}{\text{sen}^2 \phi} \qquad (10.14)$$

Se debería notar que un engrane con $N_2 = \infty$ también tendría un radio de paso infinito. Este es el concepto subyacente de una cremallera, como la que se muestra en la figura 10.3d. Entonces, se debe satisfacer la ecuación (10.14) para garantizar que un engrane se acopla con la cremallera y elimina la interferencia.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.5

Para los engranes de la mezcladora de concreto descrita en el problema de ejemplo 10.3, determine si la interferencia debería ser una preocupación.

SOLUCIÓN:

1. ***Utilice la tabla de interferencia para verificar criterios***

En la tabla 10.4 se observa que un piñón de 15 dientes, con dientes de profundidad total a 20°, no puede acoplarse con un engrane con más de 45 dientes sin interferencia. Con tan solo 30 dientes, la interferencia no es un problema previsible.

2. ***Use la ecuación de interferencia para verificar los criterios***

Se obtiene el mismo resultado con la ecuación (10.13). De la tabla 10.3, el adendo es:

$$a = \frac{1}{P}$$

Por lo tanto,

$$k = 1$$

Se utiliza la ecuación (10.13) para verificar los problemas de interferencia.

$$N_2 < \frac{\{N_1^2 \text{sen}^2 \phi - 4k^2\}}{4k - 2N_1 \text{sen}^2 \phi}$$

$$N_2 < \frac{\{15^2 \text{sen}^2 20° - 4(1)^2\}}{4(1) - 2(15)\text{sen}^2 20°}$$

$$N_2 < 45.48$$

El número de dientes del engrane impulsado, 30, es menor que el valor límite de 45.48, por lo que la interferencia no es un problema.

Como se mencionó anteriormente, el perfil del diente se puede modificar a costa de la forma de la profundidad total, con la finalidad de permitir el acoplamiento de engranes pequeños con engranes grandes. Desde luego, esto minimiza el tamaño total del sistema de engranes, el cual es un objetivo de diseño usual. La AGMA ha incluido previsiones estándar para modificar los perfiles de involuta.

Se desarrollaron *dientes de muñón* (*cortos*) con un ángulo de presión grande y dientes pequeños. El sistema de muñón tiene dientes más fuertes, pero una profundidad de trabajo usualmente 20% menor que los dientes de profundidad total.

Otro sistema alternativo es el *sistema de adendos largo y corto*. En estos perfiles, aumenta el adendo de un engrane y disminuye el adendo del engrane acoplado.

El resultado, desde luego, es que tales engranes no estandarizados ya no son intercambiables con los engranes estándar. Los engranes especializados se usan raras veces en el diseño de máquinas en general y los detalles están más allá del alcance de este libro. Se deben consultar las referencias para el análisis de perfiles no estandarizados [refs. 4, 9, 13, 15].

10.6.4 Rebaje

La interferencia también se elimina al remover material del diente del engrane entre el círculo base y el círculo del dedendo. Esta es la porción del diente del engrane que no es de involuta e interferiría con el diente del engrane acoplado. En la figura 10.11 se muestra el diente rebajado de un engrane.

El rebaje reduce evidentemente la resistencia de un engrane, con lo cual disminuye la potencia que se puede transmitir con seguridad. Además, también reduce la longitud de contacto, lo

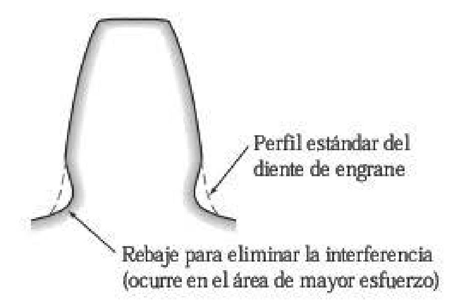


FIGURA 10.11 Diente rebajado de un engrane.

cual disminuye la razón de contacto, mientras genera un accionamiento más burdo y ruidoso. Por lo tanto, se debería evitar el rebaje a menos que la aplicación requiera definitivamente un engranaje compacto. En tales casos, es necesario realizar análisis, así como experimentos cinemáticos y de resistencia avanzados para garantizar una operación adecuada.

10.6.5 Holgura (juego)

Como se estableció en la sección 10.3, la holgura es la cantidad que el ancho del espacio entre dientes excede al espesor del diente del engrane, medida sobre el círculo de paso. En términos más prácticos, es el espacio que un engrane puede girar sin que su engrane acoplado gire. Si bien la holgura quizá parezca indeseable, es necesaria cierta holgura para efectos de lubricación de los dientes del engrane. Los engranes que funcionan continuamente en una dirección pueden tener realmente holgura considerable. Los engranes de arranque/parada frecuente o que invierten su dirección, deberían tener una holgura muy controlada.

El perfil de diente de un engrane se diseña con un valor de holgura nominal. El tamaño de la holgura determina el espesor del diente del engrane, ya que la holgura es una medida del espesor del diente en el espacio del diente. La AGMA especifica valores de holguras recomendadas [estándar 2002-B88]. Aun cuando estos valores son algo conservadores, los engranes de transmisión de potencia en general tienen valores recomendados de holgura de

$$\frac{0.05}{P_d} < B_{\text{recomendada}} < \frac{0.1}{P_d}$$

En los engranes disponibles comercialmente, los valores de la holgura son mucho mayores para permitir mayor flexibilidad en las aplicaciones. Los valores de la holgura en estos engranes son por lo general:

$$\frac{0.3}{P_d} < B_{\text{engranes-de-inventario}} < \frac{0.5}{P_d}$$

De manera que se debe tener cuidado cuando se especifiquen engranes de inventario para las aplicaciones con inversión de las direcciones o con secuencias frecuentes de arranque/parada.

Los valores de la holgura están muy influidos por cualquier variación de la distancia entre los centros de los engranes. Desde luego, en cualquier ambiente de producción, varía la distancia entre centros de dos engranes. Sin embargo, una desviación en la distancia nominal entre centros puede especificarse a propósito por un diseñador, para ajustar la holgura a un rango deseado. La variación de holgura ΔB que se obtendrá con una variación ΔC en la distancia entre centros se aproxima con la siguiente relación:

$$\Delta B \approx 2(\Delta C)\tan\phi \qquad \textbf{(10.15)}$$

La ecuación (10.15) se usa con la ecuación (10.7) o (10.8) para especificar la distancia entre centros que produce los valores de holgura que se deben mantener en un rango determinado. La reducción de la distancia entre centros disminuye la holgura, y viceversa.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.6

Los engranes de la mezcladora de concreto descrita en el problema de ejemplo 10.3 son artículos de catálogo con una holgura de diseño igual a $0.4/P_d$. Especifique la distancia entre centros que reduce la holgura a un valor de $0.1/P_d$ recomendado por la AGMA.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la holgura del diseño***

$$B_{\text{diseñada}} = \frac{0.4}{P_d} = \frac{0.4}{5} = 0.08\,\text{in}$$

2. ***Determine la holgura recomendada***

$$B_{\text{recomendada}} = \frac{0.1}{P_d} = \frac{0.1}{5} = 0.02\,\text{in}$$

3. ***Calcule la distancia entre centros ajustada***

Reagrupando la ecuación (10.15):

$$\Delta C \approx \frac{\Delta B}{(2\tan\phi)} = \frac{(0.02 - 0.08)}{2\tan(20°)} = 0.0824\,\text{in}$$

En el problema de ejemplo 10.3, la distancia nominal entre centros se determinó igual a 4.5 in. Por lo tanto, para ajustar el valor de la holgura, la distancia entre centros se debería reducir a

$$C_{\text{ajustada}} = 4.5 - 0.0824 = 4.4176\,\text{in}$$

Se tiene que poner énfasis en que la reducción de la distancia entre centros producirá un engranaje muy apretado, además de que podría causar mucho ruido, sobrecalentamiento y sobrecarga estructural. Sin embargo, algunas aplicaciones requieren holgura mínima. Desde luego, hay que efectuar pruebas para confirmar el diseño.

10.6.6 Ángulo de presión de operación

Como se mencionó en las secciones anteriores, el ángulo de presión define la línea de acción de la fuerza sobre el diente del engrane. El ángulo de presión del diseño se corta o moldea en el diente del engrane y afecta la forma real del diente (figura 10.7).

Debe mencionarse que conforme la distancia entre centros de los engranes acoplados se desvía de su valor nominal, el ángulo de presión real durante la operación difiere del valor de diseño. En otras palabras, dos engranes a 20° tendrían realmente un ángulo de presión mayor durante la operación al incrementar el valor nominal de la distancia entre centros. La relación que se utiliza para determinar la magnitud de la discrepancia se expresa [ref. 9] como:

$$\cos\phi_{\text{operación}} = \left\{\frac{C_{\text{nominal}}}{C_{\text{operación}}}\right\}\cos\phi_{\text{nominal}} \qquad \textbf{(10.16)}$$

En las aplicaciones donde se requiere calcular con precisión la fuerza real que se transmite, se debería usar el ángulo de presión en operación, ya que refleja el desempeño real de las fuerzas en el engrane.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.7

Para los engranes de la mezcladora de concreto descrita en el problema de ejemplo 10.3, determine el ángulo de presión en operación cuando la distancia entre centros es de 4.4176 in, como en el problema de ejemplo 10.6.

SOLUCIÓN: Si se parte de los números del problema de ejemplo 10.6 y de la ecuación (10.16), se calcula lo siguiente:

$$\cos\phi_{\text{operación}} = \left\{\frac{C_{\text{nominal}}}{C_{\text{operación}}}\right\}\cos\phi_{\text{nominal}} = \left\{\frac{4.5}{4.4176}\right\}\cos 20° = 0.9572$$

y

$$\phi_{\text{operación}} = 16.82°$$

10.7 CINEMÁTICA DE UN ENGRANE RECTO

Una función básica de los engranes consiste en proporcionar una razón de velocidad constante entre sus respectivos ejes. Cuando un par de engranes tiene una razón de velocidad constante significa que el engrane impulsado mantiene una velocidad uniforme, mientras el engrane impulsor gire a velocidad constante. Esta condición lleva al desarrollo del perfil de involuta del diente. En la figura 10.12 se muestra un par de engranes rectos acoplados.

Formalmente, la *razón de velocidad VR* se define como la velocidad angular del engrane impulsor (engrane 1) dividida entre la velocidad angular del engrane impulsado (engrane 2).

$$VR = \frac{\omega_{\text{impulsor}}}{\omega_{\text{impulsado}}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad \textbf{(10.17)}$$

Como la razón es válida independientemente de las unidades, la razón de velocidad se define, asimismo, en términos de revoluciones por minuto, radianes por unidad de tiempo o cualquier otro conjunto conveniente de unidades de velocidad angular. En la práctica, una razón de velocidad igual a 3 se representaría como 3:1, que se lee como "tres a uno". De igual manera, una razón de velocidad de 1/3 se representaría como 1:3 y se leería como "uno a tres".

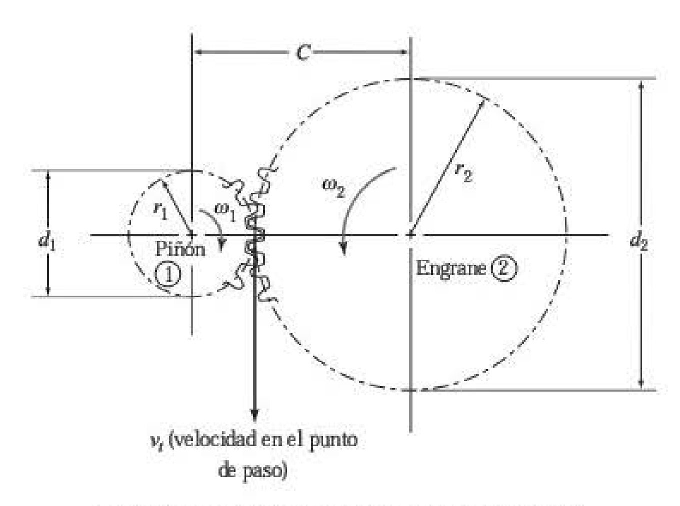


FIGURA 10.12 Cinemática de engranes acoplados.

La *velocidad en la línea de paso* v_t se define como la magnitud de la velocidad del punto de paso de los dos engranes acoplados. Esta velocidad también se observa en la figura 10.12. Es evidente que la velocidad en la línea de paso de ambos engranes es idéntica, porque el diente de un engrane empuja el diente acoplado. Por lo tanto, la velocidad en la línea de paso es una

medida lineal y está relacionada con las velocidades angulares de los engranes y sus radios de paso mediante la ecuación (6.5).

$$v_t = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \qquad \textbf{(10.18)}$$

Advierta que, como en el capítulo 6, la velocidad angular en esta ecuación se debe especificar en radianes por unidad de tiempo.

La combinación de las ecuaciones (10.17) y (10.18) da la siguiente relación:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} = VR$$

Si se introducen los diámetros de paso,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{(2r_2)}{(2r_1)} = \frac{r_2}{r_1} = VR$$

así como el paso diametral y el número de dientes,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\dfrac{N_2}{P_d}}{\dfrac{N_1}{P_d}} = VR$$

Como el paso diametral de los dos engranes debe ser idéntico para que los dientes se acoplen, se elimina P_d en la ecuación anterior:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{N_2}{N_1} = VR$$

Reuniendo todas las relaciones anteriores se obtiene una expresión integral de la razón de velocidad.

$$VR = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \textbf{(10.19)}$$

La convención de signos algebraicos define la dirección relativa del giro del engrane. En el engranaje externo típico, los centros de los ejes están en lados opuestos de la tangente común a los círculos de paso, lo cual establece que los engranes giran en direcciones opuestas. Para expresar tal hecho, la razón de velocidad se proporciona con un valor negativo.

Para engranes internos, como el mostrado en la figura 10.3c, los centros de los ejes están del mismo lado de la tangente común a los círculos de paso. Esto indica que los engranes giran en la misma dirección. Por lo tanto, la razón de velocidad se expresa con valor positivo.

Como se mencionó en la introducción, muchos engranes se usan en aplicaciones donde se debe reducir la velocidad de una fuente de potencia. Entonces, es normal tener razones de velocidad mayores que 1. Como se observa en la ecuación (10.17), esto indica que el engrane impulsor gira más rápido que el engrane impulsado, lo cual es el caso en las reducciones de velocidad.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.8

Se utiliza un grupo de engranes para reducir la velocidad de un motor eléctrico que impulsa el eje de un transportador, en la caja registradora de un supermercado (figura 10.13). El engrane sobre el eje del motor es un piñón de paso 10, con 15 dientes y funciona a 1800 rpm en sentido horario. Determine la velocidad del engrane acoplado, el cual tiene 45 dientes. Calcule también la velocidad en la línea de paso.

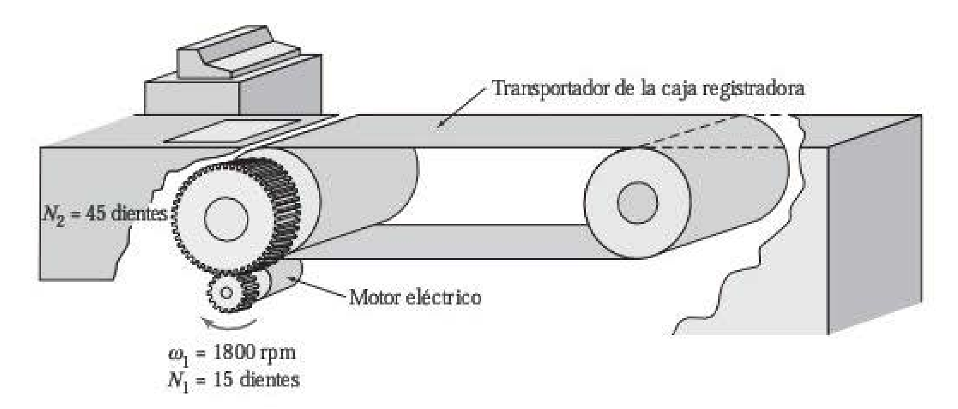


FIGURA 10.13 Transportador de la caja registradora del problema de ejemplo 10.8.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la razón de velocidad***

La razón de velocidad se calcula con la ecuación (10.19).

$$VR = \frac{N_2}{N_1} = \frac{45}{15} = -3$$

En la práctica, este valor se expresa comúnmente como razón de engrane de 3:1. Observe que el valor negativo indica que los engranes giran en direcciones opuestas, lo cual es congruente con los engranes externos.

2. ***Determine la velocidad angular del engrane impulsado***

La velocidad angular del engrane impulsado se calcula reagrupando la ecuación (10.17).

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{VR} = \frac{1800\,\text{rpm}}{(-3)} = -600\,\text{rpm} = 600\,\text{rpm, en sentido antihorario}$$

3. ***Calcule la velocidad en la línea de paso***

Los diámetros de paso se calculan con la ecuación (10.2).

$$d_1 = \frac{N_1}{P_d} = \frac{15}{10} = 1.5\text{ in}$$

$$d_2 = \frac{N_2}{P_d} = \frac{45}{10} = 4.5\text{ in}$$

La velocidad en la línea de paso se calcula con la ecuación (10.18).

$$v_t = r_1\omega_1$$

$$r_1 = \frac{1.5}{2} = 0.75\text{ in}$$

$$\omega_1 = (1800\,\text{rpm})\left[\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right] = 11309.7\text{ rad/min}$$

$$v_t = (0.75\,\text{in})(11309.7\,\text{rad/min}) = 8482.3\text{ in/min}$$

Al convertir las unidades,

$$v_t = 8482.3\text{ in/min}\left[\frac{1\text{ ft}}{12\text{ in}}\right] = 706.9\text{ ft/min}$$

Como se indicó anteriormente, la AGMA define [estándar 2000-A88] un conjunto de números de control de calidad que van de 3 a 16. Estas clasificaciones numéricas reflejan la precisión del perfil del diente, el espaciado diente a diente y el acabado superficial. La velocidad v_t en la línea de paso es un factor que determina la calidad requerida del engrane. La tabla 10.5 presenta la calidad del engrane recomendada en sistemas impulsores mecánicos de precisión.

TABLA 10.5 Calidad de engrane recomendada por la AGMA

Velocidad en la línea de paso (ft/min, fpm)	Calidad sugerida del engrane (clasificación de la AGMA)
0-800	6-8
800-2000	8-10
2000-4000	10-12
Más de 4000	12-14

10.8 SELECCIÓN DE UN ENGRANE RECTO

En un proceso de diseño, se deben elegir los engranes para realizar cierta tarea. Con frecuencia, la tarea es obtener una razón de velocidad determinada. Debido a que la mayoría de los engranes en operación cumplen con el estándar de la AGMA, el diseñador tan solo necesita determinar los parámetros clave: el paso diametral, el ángulo de presión y el número de dientes en cada engrane. La mayoría de otras características de un engrane se

TABLA 10.6 Pasos diametrales adecuados para engranes a 20° de acero dulce, con ancho de cara estándar

Potencia	rpm del piñón								
hp	50	100	300	600	900	1200	1800	2400	3600
0.05	20	20	24	32	32	32	32	32	32
0.10	16	20	20	24	24	24	32	32	32
0.25	12	16	20	20	24	24	24	24	24
0.33	10	12	16	20	20	24	24	24	24
0.50	10	12	16	20	20	20	20	24	24
0.75	8	10	12	16	16	20	20	20	20
1.0	6	10	12	16	16	16	20	20	20
1.5	6	8	12	12	16	16	16	16	20
2.0	6	6	10	12	12	12	16	16	16
3.0	5	6	8	10	12	12	12	12	16
5.0	4	5	6	8	10	10	12	12	12
7.5	4	5	6	8	8	8	10	10	10
10	3	4	6	6	6	8	8	8	10
15	2	4	5	6	6	6	6	6	8
20	2	3	4	5	6	6	6	6	—
25	—	3	4	5	5	5	6	5	—
30	—	2	4	4	5	5	5	—	—
40	—	2	3	4	4	—	—	—	—
50	—	—	3	4	4	—	—	—	—

determina con el uso de las relaciones estándar de la AGMA presentadas en secciones anteriores.

10.8.1 Paso diametral

En un proceso típico de diseño, el primer parámetro a elegir es el paso diametral adecuado. Como el paso diametral es el tamaño relativo del diente del engrane, se mantiene el argumento de que las fuerzas transmitidas y las propiedades del material del engrane afectan tal decisión. Los criterios precisos de selección requieren el cálculo de los esfuerzos en el diente y las presiones de contacto del engrane. Los procedimientos de cálculo se incluyen en las especificaciones de la AGMA. Este nivel de detalle va más allá del alcance de este libro.

Se pueden obtener fácilmente estimaciones conservadoras de pasos diametrales adecuados con la mayoría de los proveedores de engranes comerciales. Los proveedores utilizan los estándares de la AGMA para determinar la capacidad para transportar potencia de sus engranes de inventario. Partiendo de estos datos, se logra una estimación del paso diametral adecuado, ya que se conocen la potencia nominal transmitida por el par de engranes, la velocidad angular del piñón y el material del engrane. Como ejemplo, se incluyen estos datos en la tabla 10.6. Esta tabla lista pasos diametrales adecuados para engranes, a 20°, de acero dulce con ancho de cara estándar, con base en la velocidad del piñón y la potencia transmitida. Hay tablas similares para ángulos de presión y materiales alternativos. El uso de estas tablas se ilustra con un ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.9

Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce para la mezcladora de concreto descrita en el problema de ejemplo 10.3. La mezcladora es impulsada por un motor de combustión interna de 10 hp, a una velocidad de 1800 rpm. Determine un paso diametral adecuado.

SOLUCIÓN: Están especificados los engranes de acero dulce que son capaces de funcionar a 10 hp con una velocidad del piñón de 1800 rpm. Tomando en cuenta criterios de interferencia, la tabla 10.3 indica que un piñón de 18 dientes con un ángulo de presión de 20° se puede acoplar con cualquier otro engrane. La tabla 10.6 sugiere que se debe utilizar un paso diametral igual a ocho para transmitir la potencia. Por ello, un piñón de acero dulce de 18 dientes con un paso diametral de ocho debería resultar adecuado. Para una selección más confiable, es necesario efectuar un análisis de resistencia completo.

10.8.2 Ángulo de presión

El segundo parámetro que se debería seleccionar es el ángulo de presión. Como se mencionó, los valores estándar de los ángulos de presión son 14½°, 20° y 25°. Recuerde que los engranes de 14½° se recomiendan únicamente para sustituir los engranes de 14½° en las máquinas ya existentes. Los engranes con ángulos de presión iguales a 20° se adaptan bien a las aplicaciones generales. Los engranes con ángulos de presión de 25° pueden ser más pequeños, sin preocuparse por la interferencia, pero su eficiencia es menor en la transmisión de la fuerza. Por lo tanto, están mejor adaptados para aplicaciones de alta velocidad y baja potencia.

10.8.3 Número de dientes

Finalmente, se debe determinar el número de dientes del engrane. Esta decisión por lo general depende de la razón de velocidad deseada. Se suelen preferir los engranes más pequeños porque minimizan el tamaño, el peso y el costo. Desde luego, el tamaño mínimo lo determinan los criterios de interferencia. El número de dientes de un engrane tiene que ser un entero. Aun cuando esta premisa parece evidente, debe ser una consideración permanente, ya que la obtención de un número entero se dificultaría, además de que los fabricantes de engranes no tienen en inventario engranes con incrementos de un diente. La tabla 10.7 lista los engranes comunes disponibles comercialmente. Se recomienda consultar un catálogo específico, como Boston Gear, Browning Gears o Martin Sprocket & Gear, para elegir el número de dientes, como opciones adicionales a las listadas en la tabla 10.7.

TABLA 10.7 Número de dientes de engranes en inventario comercialmente disponibles

Paso diametral de 32								
12	16	20	28	36	48	64	80	112
14	18	24	32	40	56	72	96	128
Paso diametral de 24								
12	18	24	30	42	54	72	96	144
15	21	27	36	48	60	84	120	
Paso diametral de 20								
12	16	24	35	50	80	100	160	
14	18	25	40	60	84	120	180	
15	20	30	45	70	90	140	200	

TABLA 10.7 (Continuación)

Paso diametral de 16								
12	16	24	32	48	64	96	160	
14	18	28	36	56	72	128	192	
15	20	30	40	60	80	144		
Paso diametral de 12								
12	15	20	28	42	60	84	120	168
13	16	21	30	48	66	96	132	192
14	18	24	36	54	72	108	144	216
Paso diametral de 10								
12	16	24	30	45	55	80	120	200
14	18	25	35	48	60	90	140	
15	20	28	40	50	70	100	160	
Paso diametral de 8								
12	16	22	32	44	60	80	112	
14	18	24	36	48	64	88	120	
15	20	28	40	56	72	96	128	
Paso diametral de 6								
12	16	24	33	48	66	96		
14	18	27	36	54	72	108		
15	21	30	42	60	84	120		
Paso diametral de 5								
12	16	24	30	45	70	110	160	
14	18	25	35	50	80	120	180	
15	20	28	40	60	100	140		

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.10

Se utiliza un engranaje reductor para un pequeño motor en un bote de pesca. Los engranes deben transmitir 5 hp de un motor eléctrico que gira a 900 rpm a la hélice que gira a 320 rpm. Seleccione un conjunto de engranes para realizar esta tarea.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine el paso diametral y el ángulo de presión adecuados***

Como esta aplicación requiere engranajes en general, se usa un ángulo de presión de 20°. Si se parte de la tabla 10.6, un estimado del paso diametral adecuado es:

$$P_d = 10$$

2. ***Emplee la razón de velocidad requerida para iterar y determinar el número de dientes adecuado***

La razón de velocidad requerida es

$$VR = \frac{\omega_{impulsora}}{\omega_{impulsada}} = \frac{900\,\text{rpm}}{320\,\text{rpm}} = 2.8125$$

Reagrupando la ecuación (10.19)

$$N_{impulsando} = N_{impulsor}\left(\frac{\omega_{impulsora}}{\omega_{impulsora}}\right) = N_{impulsor}\left(\frac{900\,\text{rpm}}{320\,\text{rpm}}\right) = N_{impulsor}(2.8125)$$

Como generalmente se prefiere un ensamblaje más pequeño, se sustituyen los valores de los dientes del piñón (impulsor), iniciando con un piñón lo más pequeño posible. Observe que se debe aplicar un proceso iterativo, porque el número de dientes debe ser un entero. Usando:

$$N_{impulsor} = 13, \qquad N_{impulsado} = 13\left(\frac{900}{320}\right) = 36.56$$

$$N_{impulsor} = 14, \qquad N_{impulsado} = 14\left(\frac{900}{320}\right) = 39.38$$

$$N_{impulsor} = 15, \quad N_{impulsado} = 15\left(\frac{900}{320}\right) = 42.14$$

$$N_{impulsor} = 16, \quad N_{impulsado} = 16\left(\frac{900}{320}\right) = 45$$

La combinación de enteros más pequeña es de 16 y 45 dientes. Asimismo, si se parte del análisis anterior, un paso diametral adecuado es de 10. La tabla 10.7 confirma que estos engranes están disponibles comercialmente.

3. ***Calcule los diámetros de paso y la distancia entre centros***

Por último, los diámetros de paso correspondientes y la distancia entre centros son:

$$d_1 = \frac{N_1}{P_d} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ in}$$

$$d_2 = \frac{N_2}{P_d} = \frac{45}{10} = 4.5 \text{ in}$$

$$C_{engranes\ externos} = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = \frac{(1.6 + 4.5)}{2} = 3.05 \text{ in}$$

Con frecuencia, los engranes se eligen para modificar la razón de velocidad entre los ejes de un máquina existente. Ocurre una situación parecida cuando los ejes de los engranes se deben espaciar una distancia específica debido a otras restricciones. Ambas situaciones limitan la distancia entre centros de los engranes. En casos así, el número de dientes elegido para cada engrane quizá no sea el más pequeño posible, sino el necesario para satisfacer el requerimiento de distancia entre los ejes. También se puede usar un diente más grande que el necesario para cumplir con la distancia entre ejes. Finalmente, es posible que se requiera alguna desviación de la razón meta para especificar los engranes estándar. En general, las relaciones explicadas a lo largo de este capítulo sirven para especificar cualquier conjunto de engranes. Los ejemplos siguientes muestran algunos escenarios posibles.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.11

Un par de engranes es impulsado por un motor eléctrico y se usan para impulsar el eje de un torno a 200 rpm. En la figura 10.14 se ilustra este sistema impulsor. El motor de 1 hp se sustituirá por un motor más eficiente, pero de alta velocidad, con velocidad de 600 rpm. Para llevar a cabo tal modificación, se debe seleccionar un nuevo conjunto de engranes que mantengan la velocidad del husillo a 200 rpm. Sin embargo, los engranes están montados en una carcasa complicada que no se puede modificar. Por lo tanto, la distancia entre centros de los engranes debe permanecer en 7.5 in. Especifique el conjunto de engranes a utilizar.

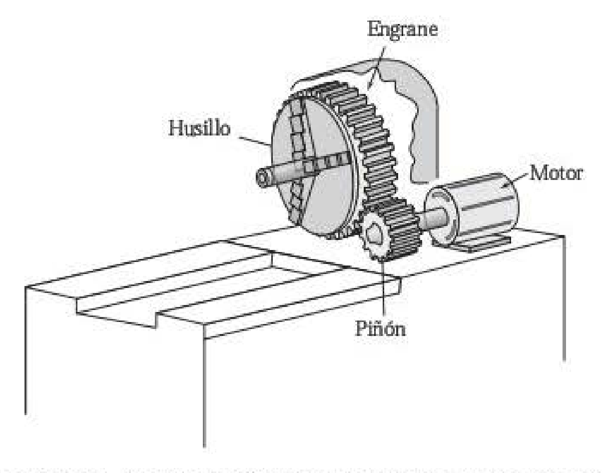


FIGURA 10.14 Impulsor del torno del problema de ejemplo 10.11.

SOLUCIÓN: 1. ***Especifique la razón de engrane y la distancia entre centros***

Los principales parámetros de este problema son la razón de velocidad y la distancia entre centros. La razón de velocidad requerida es:

$$VR = \frac{\omega_{impulsora}}{\omega_{impulsada}} = \frac{600\,\text{rpm}}{200\,\text{rpm}} = 3.0$$

Entonces,

$$VR = \frac{d_2}{d_1} = 3.0$$

lo cual se replantea como:

$$d_2 = 3d_1$$

Adicionalmente, la distancia entre centros es:

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = 7.5$$

2. ***Determine el diámetro requerido de los engranes***

Usando estas relaciones, se determinan algebraicamente los diámetros de paso adecuados mediante:

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_1 + 3d_1}{2} = \frac{4d_1}{2} = 7.5$$

Despejando,

$$d_1 = 3.75 \text{ in}$$

y

$$d_2 = 3(3.75) = 11.25 \text{ in}$$

3. ***Determine el paso diametral adecuado***

Ahora el problema se reduce al cálculo del paso diametral adecuado y del número de dientes que resultan del paso diametral requerido. Como esta aplicación implica engranajes en general, se utiliza un ángulo de presión de 20°. Remitiéndose a la tabla 10.6, un estimado del paso diametral adecuado es de 14. Por consiguiente, se consideran tan solo valores de $P_d \leq 14$. Al relacionar el paso diametral, el paso diametral y el número de dientes, se calcula lo siguiente:

$$N_{impulsor} = (d_1)(P_d) = 3.75 P_d$$

$$N_{impulsado} = (VR)N_{impulsor} = 3N_{impulsor} = 3(3.75 P_d) = 11.25 P_d$$

Se sustituyen los pasos diametrales de 14 y menores en estas dos ecuaciones. Recuerde que tan solo son válidas las soluciones con números de dientes enteros. De la iteración a través de todas las combinaciones, solamente tres son los factibles.

La mejor alternativa dependería de la disponibilidad de engranes estándar, el costo y el peso del engranaje. Advierta que la velocidad de salida será exactamente de 200 rpm. En muchas situaciones, no se logra obtener exactamente la velocidad impulsada. En el siguiente problema se ilustra este caso.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.12

En la figura 10.15 se ilustra el ventilador de escape de un engrane impulsado, y la carcasa. Para mejorar el flujo de aire, la velocidad del ventilador necesita incrementarse a 460 rpm, o bien, acercarse a esta velocidad tanto como sea posible. Se utilizará el motor existente de 3 hp que funciona a 1750 rpm. La carcasa no se debería alterar, pues tiene un sistema de soporte con una distancia entre centros de 9.5 in. Seleccione un conjunto de engranes para esta aplicación.

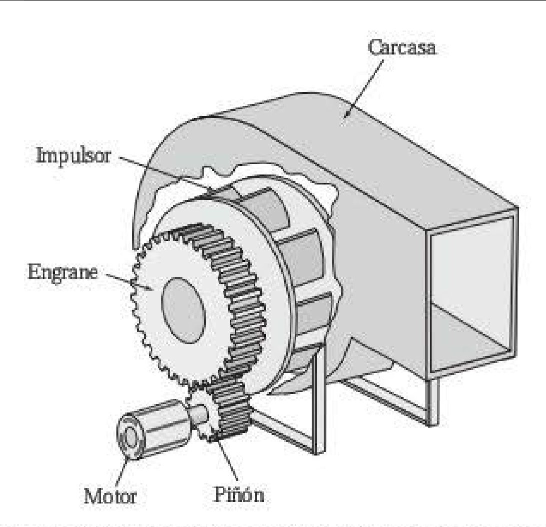


FIGURA 10.15 Ventilador del escape del problema de ejemplo 10.12.

SOLUCIÓN: **1.** ***Especifique la razón de engrane y la distancia entre centros***

Como en el problema de ejemplo 10.11, los parámetros principales de este problema son la razón de velocidad y la distancia entre centros. La razón de velocidad requerida es:

$$VR = \frac{\omega_{\text{impulsora}}}{\omega_{\text{impulsada}}} = \frac{1750\,\text{rpm}}{460\,\text{rpm}} = 3.80$$

Este escenario de diseño se complica por una razón de velocidad no fraccionaria. Es imposible obtener una velocidad impulsada de 460 rpm exactamente, usando un número entero de dientes de engrane. Lo anterior se resuelve si se redondea la razón de velocidad a un valor fraccionario.

$$VR = \left(\frac{d_2}{d_1}\right) \approx 3.75$$

Este redondeo dará una velocidad inducida de:

$$\omega_{\text{impulsada}} = \left(\frac{\omega_{\text{impulsora}}}{VR}\right) = \left(\frac{1750\text{ rpm}}{3.75}\right) = 466\text{ rpm}$$

Si se supone que el ventilador funciona adecuadamente a esta velocidad,

$$d_2 = 3.75\,d_1$$

Como antes, la distancia entre centros es:

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = 5.5\text{ in}$$

2. ***Determine los diámetros requeridos de los engranes***

Con el uso de tales relaciones, se determinan algebraicamente los diámetros de paso adecuados.

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(d_1 + 3.75d_1)}{2} = \frac{4.75d_1}{2} = 9.5\text{ in}$$

Despejando,

$$d_1 = 4\text{ in}$$

y

$$d_2 = 3.75(4) = 15\text{ in}$$

3. ***Determine un paso diametral adecuado***

Como antes, el problema se reduce ahora al cálculo de un paso diametral adecuado y del número de dientes que resulte de los diámetros de paso requeridos. Como se mencionó, el cálculo de dientes enteros es improbable debido a la razón de la velocidad decimal. Se necesita una solución iterativa.

Como esta aplicación implica engranajes en general, se usa un ángulo de presión de 20°. Remitiéndose a la tabla 10.6, un estimado del paso diametral adecuado es de 12. Por lo tanto, se consideran tan solo valores de $P_d \leq 12$. Al relacionar la velocidad, el paso diametral, el paso diametral y el número de dientes, se calcula lo siguiente:

$$N_{impulsor} = (d_1)(P_d) = 2P_d$$

$$N_{impulsado} = (VR)\,N_{impulsor} = 3.75\,N_{impulsor} = 3.75(2P_d) = 7.5\,P_d$$

Se sustituyen los pasos diametrales de 12 y menores en estas dos ecuaciones. Recuerde que tan solo son válidas las soluciones con números de dientes enteros. Al calcular todas las combinaciones, tres son factibles.

Hay otras combinaciones posibles con engranes que tienen un paso diametral menor de 8. Otra vez, la mejor alternativa dependería de la disponibilidad de engranes estándar, el costo y el peso del conjunto de engranes.

10.9 CINEMÁTICA DE LA CREMALLERA Y EL PIÑÓN

En la sección 10.2 se analizó brevemente un sistema de piñón-cremallera, que se muestra en la figura 10.3b. Sirve para convertir el movimiento giratorio de un piñón en movimiento de traslación de la cremallera. La aplicación más digna de mención del sistema cremallera-piñón está en la dirección de los automóviles, donde el movimiento giratorio del volante de la dirección empuja la parte posterior de las ruedas delanteras, dirigiendo al vehículo en una nueva dirección. Entonces, el movimiento giratorio se convierte en lineal. Una cremallera y un piñón también funcionan de tal manera que el movimiento lineal de la cremallera haga girar el piñón.

Como se mencionó brevemente en la sección 10.5.3, una cremallera es un caso especial de engrane recto. Cuando el diámetro de un engrane se vuelve muy grande, el perfil local de los dientes se asemeja a una cremallera. De hecho, una cremallera se puede tratar matemáticamente como un engrane recto con paso diametral infinito. Por consiguiente, todas las propiedades geométricas de un engrane recto que se presentaron anteriormente también se aplican a una cremallera. La única diferencia es que en vez de referirse a un paso diametral, la cremallera tiene una línea de paso.

Desde el punto de vista cinemático, el movimiento giratorio del piñón y el lineal de la cremallera se relacionan mediante los conceptos presentados en el capítulo 6, ecuación (6.5). La ecuación de desplazamiento de la cremallera está dada por:

$$\Delta R_{cremallera} = r(\Delta\theta) = \frac{(d_{piñón})(\Delta\theta_{piñón})}{2} \qquad \textbf{(10.20)}$$

donde $\Delta\theta_{piñón}$ se debe especificar en radianes. La magnitud de la velocidad lineal de la cremallera está dada por:

$$v_{cremallera} = \omega_{piñón} r_{piñón} = \frac{(d_{piñón})(\omega_{piñón})}{2} \qquad \textbf{(10.21)}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.13

Se utilizan una cremallera y un piñón sobre una prensa para taladrar como se indica en la figura 10.16. El piñón tiene 16 dientes y paso igual a 16. Determine la distancia que debe(n) girar el mango (y el piñón) para avanzar el taladro 0.75 in.

SOLUCIÓN: De la ecuación (10.20), la rotación que se desea del piñón es:

$$\Delta\theta_{piñón} = \frac{2\Delta R_{cremallera}}{d_{piñón}}$$

Y

$$d_{piñón} = \frac{N_{piñón}}{P_d} = \frac{16}{16} = 1.0 \text{ in}$$

$$\Delta\theta_{piñón} = \frac{2(0.75 \text{ in})}{(1.0 \text{ in})} = 1.5 \text{ rad}$$

Al convertir a grados,

$$\Delta\theta_{piñón} = 1.5 \text{ rad}\left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right) = 85.94°$$

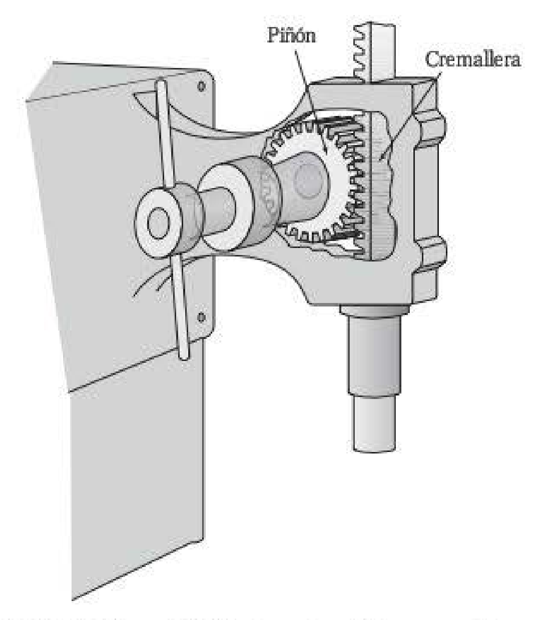


FIGURA 10.16 Prensa taladradora de piñón y cremallera.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.14

Para la prensa taladradora descrita en el problema de ejemplo 10.13, determine la velocidad a la que debe girar el piñón para avanzar el taladro a una velocidad de 12 in/min.

SOLUCIÓN: De la ecuación (10.21), la velocidad angular del piñón se determina por:

$$\omega_{\text{piñón}} = \frac{2v_{\text{cremallera}}}{d_{\text{piñón}}} = \frac{2(12 \text{ in/min})}{(10 \text{ in})} = 24 \text{ rad/min}$$

Convirtiendo a revoluciones por minuto,

$$\omega_{\text{piñón}} = 24 \text{ rad/min}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3.82 \text{ rpm}$$

10.10 CINEMÁTICA DE UN ENGRANE HELICOIDAL

En la sección 10.2 se presentaron los engranes helicoidales, que se muestran en la figura 10.3d. El desarrollo de los engranes helicoidales en realidad se dio cuando los operadores de máquinas descubrieron que los engranes escalonados funcionaban más suavemente y con menos ruido que los engranes rectos. Un engrane escalonado consistía en varios engranes rectos delgados colocados lado a lado, donde cada engrane giraba a un ángulo pequeño en relación con el engrane adyacente. El engrane apilado resultante no ejercía el mismo impacto fuerte que normalmente tienen dos dientes cuando entran en contacto (p. ej. los engranes rectos ordinarios).

Los engranes helicoidales son el caso extremo de engranes escalonados, ya que los dientes no están escalonados, sino inclinados hacia el eje del engrane. Cuando se utilizan sobre ejes paralelos, los engranes helicoidales proporcionan un contacto traslapado de los dientes, es decir, cuando el extremo frontal de un diente entra en contacto y comienza a llevar la carga transmitida, el extremo posterior del diente anterior también está en contacto. Esto ocasiona una operación más suave y menos ruidosa, conforme un diente se carga de manera gradual. Por tales motivos, con frecuencia se prefieren los engranes helicoidales, aun cuando son más difíciles de fabricar y, como resultado, son más costosos.

Los engranes helicoidales se diseñan hacia la derecha o hacia la izquierda, según la pendiente de inclinación del diente. Los dientes helicoidales, cuya pendiente baja hacia la izquierda, se diseñan con una hélice hacia la izquierda. Por el contrario, un engrane helicoidal con dientes hacia abajo a la derecha, se diseña con una hélice hacia la derecha. El engrane helicoidal superior mostrado en la figura 10.3d es un engrane hacia la izquierda.

Los engranes helicoidales también se usan en ejes no paralelos sin modificar su geometría intrínseca. Tal configuración se conoce como *engranes helicoidales cruzados*. Sin embargo, en las configuraciones cruzadas, las fuerzas requeridas para impulsar el conjunto de engranes se incrementa dramáticamente con el ángulo del eje. Por lo tanto, configuraciones así se recomiendan en aplicaciones de transmisión de menor potencia.

Las relaciones geométricas y cinemáticas de los engranes helicoidales son muy parecidas a las de los engranes rectos. La diferencia principal es la definición del *ángulo de hélice* ϕ, que es el ángulo de inclinación de los dientes. Este ángulo se muestra en el engrane helicoidal hacia la izquierda de la figura 10.17.

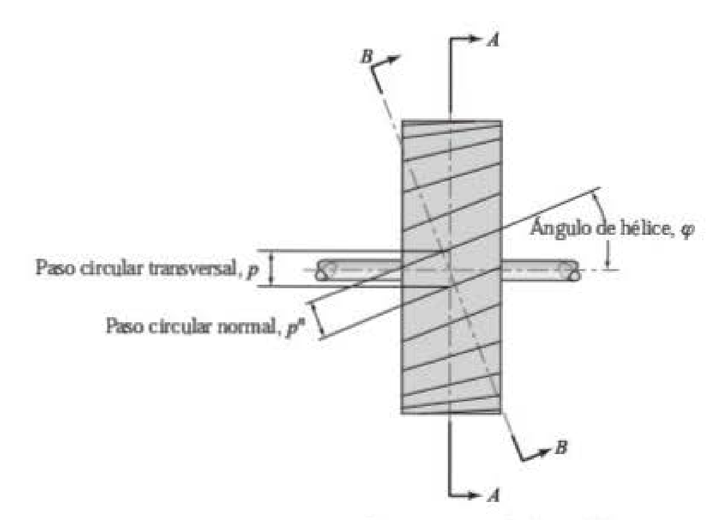


FIGURA 10.17 Geometría de un engrane helicoidal.

La vista de la sección transversal de un engrane helicoidal, perpendicular al eje del engrane, parece idéntica a la de un engrane recto. Esta vista es producto de la sección A-A de la figura 10.17, llamada *sección transversal*. Las propiedades geométricas del diente definidas para los engranes rectos se utilizan en los engranes helicoidales. Para eliminar confusión, estas propiedades se designan como propiedades transversales. El paso circular transversal, el ángulo de presión transversal y el paso diametral transversal son idénticos a las definiciones correspondientes de los engranes rectos. En la figura 10.17 se ilustra el paso circular transversal.

Algunas propiedades geométricas adicionales se definen observando la sección transversal, normal a los dientes del engrane. Esta vista se genera por la sección B-B en la figura 10.17, llamada *sección normal*.

El *paso circular normal* p^n se define como la distancia entre puntos correspondientes de un engrane, medidos sobre el círculo de paso y normal al diente del engrane. El paso circular normal también se muestra en la figura 10.17. El paso circular normal se relaciona con el paso circular transversal por medio de trigonometría.

$$p^n = p \cos \phi \qquad \textbf{(10.22)}$$

El *paso diametral normal*, P_d^n, se define usando el paso circular normal, de modo parecido a la ecuación (10.5).

$$P_d^n = \frac{\pi}{p^n} \qquad \textbf{(10.23)}$$

El *módulo normal* m^n se define asimismo como:

$$m^n = \pi p^n \qquad \textbf{(10.24)}$$

También por trigonometría,

$$P_d = P_d^n \cos \phi \qquad \textbf{(10.25)}$$

$$m = \frac{m^n}{\cos \phi} \qquad \textbf{(10.26)}$$

El *ángulo de presión normal* θ^n también se define a partir de la vista normal de la forma del diente. El ángulo de presión normal se relaciona asimismo con el ángulo de presión transversal mediante

$$\tan \phi^n = \tan \phi \cos \phi \qquad \textbf{(10.27)}$$

Los engranes helicoidales rara vez se intercambian; por lo tanto, no hay sistemas de dientes estándares como los descritos para los engranes rectos. Las dimensiones preferidas dependen usualmente del modo en que se crean los engranes helicoidales. Cuando el engrane se corta a través de una operación de fresado, el paso diametral normal debería ajustarse a los estándares listados en la tabla 10.1. Por el contrario, cuando un engrane se corta con un cortador, el paso diametral transversal tiene que ajustarse a los valores de la tabla 10.1.

El ángulo de hélice en la mayoría de los engranes varía entre 15° y 45°. Como los dientes se encuentran a cierto ángulo del eje, se produce una carga de empuje en los engranes helicoidales acoplados. La fuerza de empuje varía directamente con la tangente del ángulo de hélice; por consiguiente, los ángulos de hélice más grandes requieren suficiente soporte axial en el engrane y en el eje.

En aplicaciones con ejes paralelos, la razón de velocidad de la ecuación (10.19) también se aplica a los engranes helicoidales. Dos requerimientos adicionales a los de los engranes rectos, para un acoplamiento adecuado de engranes helicoidales, son:

1. Los engranes deben tener ángulos de hélice iguales.
2. Las hélices de los dos engranes acoplados deben ser de sentidos opuestos. Es decir, un engrane debe tener la hélice hacia la izquierda y el otro hacia la derecha.

La presencia de un ángulo de hélice también ayuda a eliminar la interferencia. Ya se dedujo una ecuación similar a la ecuación (10.13) para los engranes helicoidales, de modo que el número mínimo de dientes en el piñón que se puede usar —cuando se acopla con un engrane de cualquier tamaño, sin preocuparse por la interferencia— se determina como:

$$N_1 > \frac{2k \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \phi} \qquad \textbf{(10.28)}$$

Los valores obtenidos con esta ecuación se resumen en la tabla 10.8.

TABLA 10.8 Dientes mínimos para eliminar la interferencia en un engrane helicoidal

	Ángulo de presión normal, ϕ^n		
Ángulo de hélice	**14½°**	**20°**	**25°**
0 (engrane recto)	32	17	12
5°	32	17	12
10°	31	17	12
15°	29	16	11
20°	27	15	10
22.5°	25	14	10
25°	24	13	9
30°	21	12	8
35°	18	10	7
40°	15	8	6
45°	12	7	5

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.15

Para reducir el ruido en un engrane impulsor, se sustituyen dos engranes de paso 12, con 20 y 65 dientes, por engranes helicoidales. El nuevo conjunto de engranes debe tener la misma razón de velocidad. Como se usará la misma carcasa, la distancia entre centros también debe permanecer igual. Suponga que los engranes helicoidales se fabricaron por fresado.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la razón de velocidad deseada y la distancia entre centros***

La razón de velocidad original y la distancia entre centros se calcula como:

$$VR = \frac{N_{\text{impulsado}}}{N_{\text{impulsor}}} = \frac{65}{20} = 3.25$$

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(N_1 + N_2)}{2P_d} = \frac{(20 + 65)}{2(12)} = 3.4\,\text{in}$$

2. ***Determine un paso diametral adecuado***

Como los engranes se cortarán con una fresa, el paso diametral normal se debería ajustar a los estándares listados en la tabla 10.1. Los engranes originales tienen un paso diametral de 12; por lo tanto, se supone que los dientes son lo suficiente resistentes. Entonces, se seleccionan los engranes helicoidales con un paso diametral de 12.

3. ***Determine el número adecuado de dientes***

Al sustituir la ecuación (10.22) en la ecuación (10.7), se realizan los siguientes cálculos:

$$C_{\text{engranes externos}} = \frac{(N_1 + N_2)}{2P_d^n \cos\varphi} = \frac{(N_1 + N_2)}{2(12\cos\varphi)} = 3.4\,\text{in}$$

Asimismo,

$$\frac{N_2}{N_1} = 3.25$$

Por lo tanto,

$$\frac{(N_1 + 3.25N_1)}{24\cos\varphi} = 3.4$$

lo cual se reduce a:

$$\cos\varphi = \frac{N_1}{19.2}$$

Esta ecuación indica que N_1 debe ser menor que 19.2 en la aplicación. Por ensayo y error se consideran las siguientes combinaciones de la tabla 10.9.

Se utiliza la primera solución para generar números enteros para ambos dientes. Se seleccionan un piñón de 16 dientes y un engrane de 52 dientes con un ángulo de hélice de 33.55°. Observe que al aplicar los criterios de interferencia de la tabla 10.8, se utiliza un ángulo de presión normal de 20° o de 25°.

TABLA 10.9 Iteraciones del problema de ejemplo 10.15

Dientes del piñón N_1	Dientes del engrane N_2	Paso diametral normal P_d^n	Ángulo de hélice φ	Paso diametral P_d
19	61.75	12	8.27	11.88
18	58.50	12	20.36	11.25
17	55.25	12	27.70	9.62
16	52	12	33.55	9.00

10.11 CINEMÁTICA DE ENGRANES CÓNICOS

Los engranes cónicos se presentaron en la sección 10.2 y se ilustran en la figura 10.3f. Los engranes cónicos son útiles en la transmisión de movimiento entre dos ejes que se intersecan. Una de las propiedades más importantes de una configuración de engranes cónicos es el *ángulo de eje* Σ. El ángulo de eje se define como el ángulo entre las líneas centrales de los ejes de soporte. Las aplicaciones comunes de engranes cónicos consisten en ejes que se intersecan en ángulos rectos o que tienen un ángulo de ejes de 90°.

Como se expuso en la sección 10.1 y se muestra en la figura 10.2, los engranes rectos tienen la misma cinemática que la de dos rodillos de fricción. De modo similar, es posible sustituir los engranes cónicos por dos conos de fricción. Con esta geometría cónica, la profundidad de los dientes del engrane se estrecha desde afuera hacia la parte media. La mayoría de las característica geométricas del diente utilizadas en los engranes rectos, tales como el paso diametral y el adendo, se aplican para los engranes cónicos. Lo anterior se observa en la sección axial de los dos engranes cónicos acoplados mostrada en la figura 10.18. Como los dientes se angostan, las características del diente se miden en el borde exterior del diente.

La razón de velocidad angular, como se presentó para los engranes rectos de la ecuación (10.19), también es aplicable a los engranes cónicos. El paso diametral y el ángulo de presión también tienen la misma definición que en los engranes rectos y deben ser idénticos en los engranes cónicos para que se acoplen. El paso diametral de los engranes cónicos generalmente sigue el estándar de valores presentado en la tabla 10.1. La mayoría de los engranes cónicos se fabrican con un ángulo de presión de 20°; sin embargo, la forma del diente no es usualmente una involuta debido a la dificultad de su manufactura. Se han desarrollado perfiles alternativos, que son marcas registradas de los vendedores y sirven como ventajas competitivas.

Además del paso diametral y del ángulo de presión, los engranes cónicos se clasifican por su *ángulo de paso* γ. El ángulo de paso es el ángulo generado por el cono sobre el cual se construye el engrane. Se han identificado los ángulos de paso de los dos engranes acoplados mostrados en la figura 10.18. El ángulo de paso de cada engrane es una función de la razón de velocidad y se expresa como:

$$\tan\gamma_{\text{piñón}} = \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{\left\{\cos\Sigma + \left(\dfrac{N_{\text{engrane}}}{N_{\text{piñón}}}\right)\right\}} \tag{10.29}$$

$$\tan\gamma_{\text{engrane}} = \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{\left\{\cos\Sigma + \left(\dfrac{N_{\text{piñón}}}{N_{\text{engrane}}}\right)\right\}} \tag{10.30}$$

Como el cono de paso es una función de la razón de velocidad, no se puede sustituir un engrane cónico individual para modificar la razón, como es el caso en los engranes rectos. Por lo tanto, los engranes cónicos se comercializan en paquete.

En la figura 10.18 es evidente que la suma de los ángulos de paso de los dos engranes acoplados debe ser igual al ángulo de eje. Entonces,

$$\Sigma = \gamma_{\text{piñón}} + \gamma_{\text{engrane}} \tag{10.31}$$

Un engrane de inglete, como el mostrado en la figura 10.3g, es un caso especial de engrane cónico con un ángulo de eje de 90° y una razón de velocidad de 1. Con las ecuaciones (10.29) y (10.30), el ángulo de paso de ambos engranes de inglete es de 45°.

El montaje de los engranes cónicos es crítico. Para lograr un acoplamiento ideal, el vértice de los conos de ambos engranes debe estar en la misma ubicación. Cualquier desviación podría causar holgura excesiva o interferencia. Debido a la geometría intrínseca de los engranes cónicos, por lo menos uno de los engranes debe estar sujeto en el extremo de un eje en voladizo. Esta configuración trae por sí misma deflexiones excesivas, las cuales también suelen causar problemas de holgura.

Las cargas de empuje axial desarrolladas por los engranes cónicos acoplados siempre tienden a separar los engranes. Esto puede contribuir a la deflexión del eje y también se debe tomar en cuenta. Desde luego, los cojinetes de soporte del eje también se tienen que configurar para soportar esta fuerza de empuje.

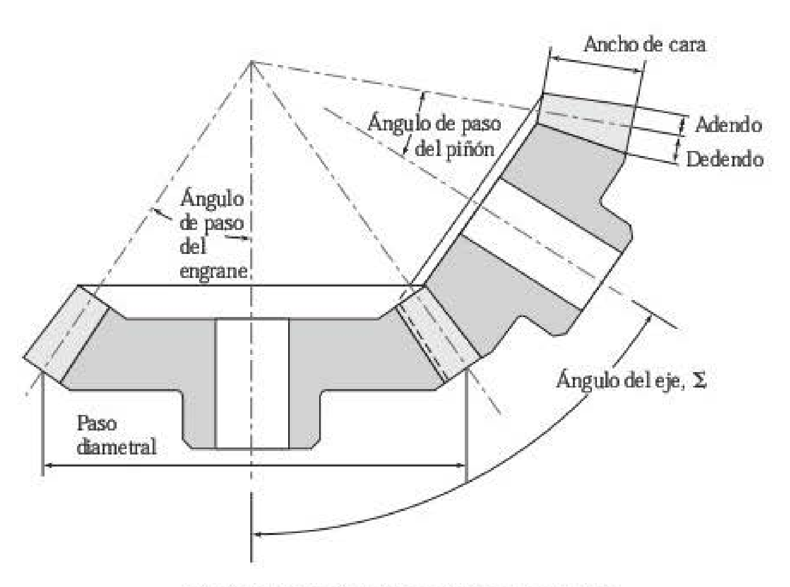


FIGURA 10.18 Engranes cónicos acoplados.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.16

Un par de engranes cónicos tienen 18 y 27 dientes, que se usan en ejes que se intersecan entre sí a un ángulo de 70°. Determine la razón de velocidad y los ángulos de paso de ambos engranes.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la razón de velocidad***

La razón de velocidad se determina con la ecuación (10.17).

$$VR = \frac{N_{\text{engrane}}}{N_{\text{piñón}}} = \frac{27 \text{ dientes}}{18 \text{ dientes}} = 1.5$$

2. ***Calcule los ángulos de paso***

Los ángulos de paso se calculan con las ecuaciones (10.29) y (10.30).

$$\tan \gamma_{\text{piñón}} = \frac{\text{sen}\,\Sigma}{\left[\cos\Sigma + \left(\frac{N_{\text{engrane}}}{N_{\text{piñón}}}\right)\right]}$$

$$\gamma_{\text{piñón}} = \tan^{-1}\left[\frac{\text{sen}(70°)}{(\cos 70°) + (27/18)}\right] = 27.02°$$

$$\tan \gamma_{\text{engrane}} = \frac{\text{sen}\,\Sigma}{\left[\cos\Sigma + \left(\frac{N_{\text{piñón}}}{N_{\text{engrane}}}\right)\right]}$$

$$\gamma_{\text{engrane}} = \tan^{-1}\left[\frac{\text{sen}(70°)}{(\cos 70°) + (18/27)}\right] = 42.98°$$

10.12 CINEMÁTICA DE UN ENGRANE SIN FIN

En la sección 10.2 se describieron un tornillo sin fin y un engrane sin fin, que se ilustran en la figura 10.3h. El tornillo sin fin y el engrane sin fin se emplean para transmitir movimiento entre ejes no paralelos que no se intersecan. Con un engrane sin fin, se podrían obtener razones de velocidad grandes en un espacio muy limitado. El engrane pequeño se conoce como *tornillo sin fin*; el engrane más grande, como *engrane sin fin*, *rueda sin fin* o simplemente *engrane*.

El tornillo sin fin se asemeja a un simple tornillo, por lo que con frecuencia los dientes del tornillo sin fin se denominan cuerdas (figura 10.3h). Los tornillos sin fin se fabrican comúnmente con una, dos o cuatro cuerdas, de modo que el *número de dientes (cuerdas) de un tornillo sin fin*, N_w, es una propiedad importante. El concepto de cuerdas múltiples superpuestas en un tornillo sin fin individual se ilustra en la figura 10.19.

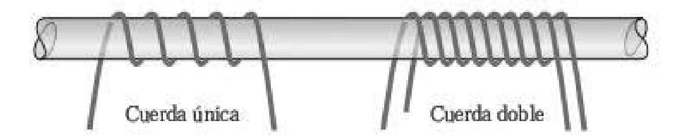


FIGURA 10.19 Concepto de cuerdas múltiples.

La forma del diente del engrane sin fin es usualmente una involuta. También es común cortar cóncavos los dientes a través de la cara, de modo que se ajusten mejor al tornillo sin fin cilíndrico. Esta técnica se denomina *diente de engrane sin fin envolvente*. Es un intento por tener una mayor huella de contacto sobre la que se transfieren las fuerzas. El tornillo sin fin también se puede cortar con una longitud cóncava, de tal manera que se ajuste mejor a la redondez del engrane sin fin. Cuando se incorporan ambas opciones, el engranaje sin fin se denomina de *doble-envoltura* y brinda la huella de contacto más grande y la mayor transmisión de potencia. En tales configuraciones, el tornillo sin fin y el engrane sin fin no son intercambiables, de modo que se adquieren en paquete.

El engrane sin fin es en realidad el caso extremo de un engrane helicoidal con un ángulo de hélice grande, el cual enrolla el diente alrededor del engrane. Por lo tanto, el tornillo sin fin se describe con todas las propiedades geométricas de un engrane helicoidal dadas en la sección 10.6. Los valores del paso diametral normalmente se ajustan a los estándares de la tabla 10.1. Los ángulos de presión también se ajustan a los estándares de 14½°, 20° y 25° usados en los engranes helicoidales. En la práctica, el ángulo de presión también se elige con base en el ángulo de desplazamiento del tornillo sin fin, como se comentará posteriormente.

El tornillo sin fin se describe por el número de cuerdas, el *paso diametral del tornillo sin fin* d_w, el *paso* p_w y el *ángulo de desplazamiento* λ. El paso diametral del tornillo sin fin se determina de modo parecido al de los engranes rectos, como el diámetro del círculo tangente al paso diametral del engrane sin fin. El paso del tornillo sin fin también es similar a la definición de los engranes rectos, es decir, es la distancia entre puntos correspondientes sobre dientes (cuerdas) adyacentes. Estas propiedades geométricas del tornillo sin fin se ilustran en la figura 10.20.

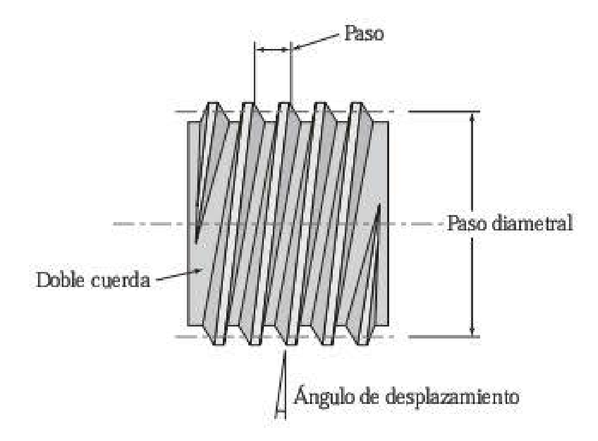


FIGURA 10.20 Geometría de un tornillo sin fin.

En la figura 10.20 también se muestra el ángulo de desplazamiento, el cual es el ángulo de inclinación de los dientes (cuerdas). Dicho ángulo se calcula a través de la relación trigonométrica con otras características del tornillo sin fin.

$$\tan\lambda = \frac{N_w p_w}{\pi d_w} \quad \textbf{(10.32)}$$

Para un engranaje sin fin acoplado, el paso del tornillo sin fin debe ser el mismo paso del engrane sin fin. Entonces, de la ecuación (10.1),

$$p_w = p_{\text{engrane}} = \frac{\pi}{P_d} \quad \textbf{(10.33)}$$

En ejes que están a 90°, lo cual es muy usual, el ángulo de desplazamiento del tornillo sin fin es igual al ángulo de hélice del engrane sin fin.

La razón de velocidad de un engranaje sin fin se calcula como el número de dientes del engrane sin fin dividido entre el número de cuerdas del tornillo sin fin.

$$VR = \frac{N_{\text{engrane}}}{N_w} \quad \textbf{(10.34)}$$

Esto también es igual en la aplicación del engrane recto.

En la mayoría de los engranajes, el tornillo sin fin es el impulsor, convirtiendo de ese modo al conjunto en un reductor de velocidad. La mayoría de los engranajes son irreversibles en el sentido de que el engrane sin fin no puede hacer girar el tornillo, porque se desarrolla una gran fuerza de fricción entre los dientes. Los impulsores irreversibles también se conocen como de *autobloqueo*. Los tornillos sin fin deben tener un ángulo de desplazamiento mayor de 10° aproximadamente para ser impulsados por el engrane sin fin acoplado. Esto daría lugar a un *engranaje reversible*, pero es muy raro.

Aun cuando la irreversibilidad quizá suene como una desventaja, hay algunos beneficios. Por ejemplo, los equipos levadizos por lo general requieren que la carga se sostenga en una altura determinada, incluso cuando se desactiva la fuente de energía, como un motor que se apaga. Como el tornillo sin fin ya no puede hacer girar al engrane sin fin, la carga se bloquea a cierta altura. Esta acción de freno se utiliza en varios dispositivos mecánicos como montacargas, gatos y plataformas levadizas. En casos así, se deben analizar la resistencia de los dientes y la fricción prevista para garantizar la seguridad.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.17

Se necesita un engranaje sin fin para reducir la velocidad de un motor eléctrico de 1800 a 50 rpm. Consideraciones de resistencia requieren que se utilice un engrane de paso 12, y se desea que el conjunto tenga autobloqueo. Seleccione un juego que realice esta tarea.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique el número de dientes adecuado***

La razón de velocidad se calcula con la ecuación (10.17).

$$VR = \frac{\omega_{\text{tornillo}}}{\omega_{\text{engrane}}} = \frac{1800\,\text{rpm}}{50\,\text{rpm}} = 36$$

Cuando se selecciona un tornillo sin fin de una cuerda, el engrane sin fin debe tener

$$N_{\text{engrane}} = \frac{VR}{N_w} = \frac{(36)}{(1)} = 36 \text{ dientes}$$

De la ecuación (10.33) y usando un paso diametral de 12, el paso del tornillo se determina con:

$$p_w = \frac{\pi}{P_d} = \frac{\pi}{12} = 0.2618 \text{ in}$$

2. ***Calcule el tamaño del conjunto de engranes***

Como se desea autobloqueo, se utiliza un ángulo de desplazamiento conservador de 5°. Con la ecuación (10.32), se determina lo siguiente:

$$\tan\lambda = \frac{N_w p_w}{\pi d_w}$$

$$\tan 5° = \frac{(1)(0.2618)}{\pi d_w}$$

Al despejar,

$$d_w = 1.0499 \text{ in}$$

El paso diametral del engrane sin fin es:

$$d_{\text{engrane}} = \frac{N_{\text{engrane}}}{P_d} = \frac{36 \text{ dientes}}{12} = 3.0 \text{ in}$$

Por último, la distancia entre centros es:

$$C = \frac{(d_{\text{tornillo}} + d_{\text{engrane}})}{2} = \frac{(1.0499 + 3.0)}{2} = 2.0250 \text{ in}$$

10.13 TRENES DE ENGRANES

Un tren de engranes es una serie de conjuntos de engranes acoplados. Los trenes de engranes se utilizan comúnmente para lograr reducciones de velocidad significativas. Muchas fuentes de potencia mecánica, como los motores de combustión interna, las turbinas y los motores eléctricos, operan en forma eficiente a altas velocidades (1800 a 10000 rpm). Muchas aplicaciones de esta potencia, como las puertas automáticas de los estacionamientos, las ruedas impulsoras de los automóviles y los ventiladores de techo, requieren bajas velocidades (10 a 100 rpm) para su operación. Por ello, la reducción de grandes velocidades es un requerimiento usual, donde el uso de trenes de engranes es muy común.

Por ejemplo, podría requerirse la reducción de la velocidad de un eje de 1800 a 10 rpm: una reducción de velocidad de 180:1. Si se intentara esta reducción con un solo conjunto de engranes, la ecuación (10.19) mostraría que el engrane impulsado sería 180 veces más grande que el engrane impulsor. Evidentemente, el engrane impulsado sería demasiado grande, pesado y costoso.

Una segunda opción, más lógica, sería reducir la velocidad en pasos, mediante una serie de pares de engranes. Se trata de una estrategia que hace caer en cascadas las velocidades angulares hasta la velocidad de salida deseada. Es exactamente la lógica subyacente en los trenes de engranes.

Cuando se usan múltiples pares de engranes en serie, la razón de velocidad total se conoce como *valor del tren*: *TV*, el cual se define como la velocidad de entrada al tren de engranes dividida entre la velocidad de salida del tren. Esto es congruente con la definición de la razón de velocidad. El valor del tren es el producto de la razón de velocidad de los pares individuales de engranes acoplados que integran el tren. En forma de ecuación, se expresa como:

$$TV = \frac{\omega_{\text{ent}}}{\omega_{\text{sal}}} = (VR_1)(VR_2)(VR_3)\ldots \tag{10.35}$$

El signo algebraico resultante de la multiplicación de las razones individuales de velocidad determina la dirección relativa de giro de los ejes de entrada y de salida. Los valores positivos indican que los ejes de entrada y de salida giran en la misma dirección, en tanto los valores negativos indican giros opuestos.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.18

En la figura 10.21 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades:

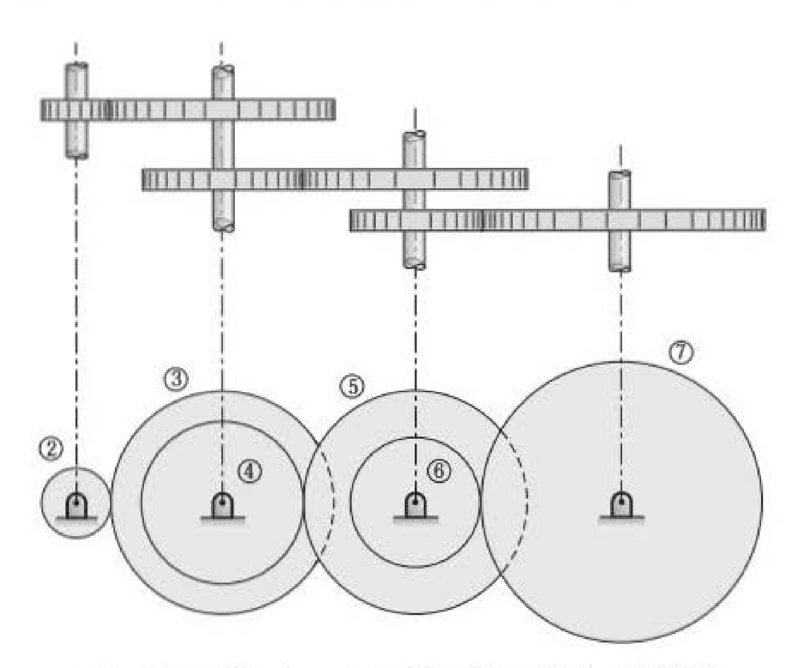


FIGURA 10.21 Tren de engranes del problema de ejemplo 10.18.

Engrane 2: $N_2 = 12$ dientes y $P_d = 12$
Engrane 3: $d_3 = 2.5$ in
Engrane 4: $N_4 = 15$ dientes
Engrane 5: $d_5 = 30$ in y $P_d = 10$
Engrane 6: $d_6 = 1.5$ in y $P_d = 8$
Engrane 7: $N_7 = 32$ dientes

Determine la velocidad angular del engrane 7 cuando el engrane 2 impulsa a 1800 rpm en sentido antihorario. Calcule asimismo la distancia entre los ejes que transportan los engranes 2 y 7.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule las dimensiones adecuadas de los engranes***

Para calcular el valor del tren, se deben determinar las propiedades adecuadas de los engranes. En este problema se utilizan y se deben calcular los diámetros de paso de los engranes.

$$d_2 = \frac{N_2}{P_d} = \frac{12}{12} = 1 \text{ in}$$

El engrane 4 se acopla con el engrane 5 y debe tener un paso diametral idéntico.

$$d_4 = \frac{N_4}{P_d} = \frac{15}{10} = 1.5 \text{ in}$$

Entonces, el engrane 7 se acopla con el engrane 6 y debe tener un paso diametral idéntico.

$$d_7 = \frac{N_7}{P_d} = \frac{32}{8} = 4 \text{ in}$$

2. ***Calcule las velocidades y las razones***

El valor del tren se calcula como:

$$TV = (VR_{2-3})(VR_{4-5})(VR_{6-7}) = \left(-\frac{d_3}{d_2}\right)\left(-\frac{d_5}{d_4}\right)\left(-\frac{d_7}{d_6}\right)$$
$$= \left(-\frac{2.5 \text{ in}}{1 \text{ in}}\right)\left(-\frac{3 \text{ in}}{1.5 \text{ in}}\right)\left(-\frac{4 \text{ in}}{1.5 \text{ in}}\right) = -13.33$$

La velocidad del engrane 7 se determina con este valor del tren.

$$\frac{\omega_2}{\omega_7} = TV$$

$$\omega_7 = \frac{\omega_2}{TV} = \frac{1800 \text{ rpm}}{(-13.33)} = -135 \text{ rpm} = 135 \text{ rpm, en sentido horario}$$

La distancia entre los centros de los engranes 2 y 7 se determina sumando los radios de paso de todos los engranes de 2 a 7, lo cual se observa en la figura 10.21.

$$C = r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$$
$$= \left(\frac{1 \text{ in}}{2}\right) + \left(\frac{2.5 \text{ in}}{2}\right) + \left(\frac{1.5 \text{ in}}{2}\right) + \left(\frac{3 \text{ in}}{2}\right) + \left(\frac{1.5 \text{ in}}{2}\right) + \left(\frac{4 \text{ in}}{2}\right) = 6.75 \text{ in}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.19

Diseñe un tren de engranes que tenga un valor del tren de +300:1. Al aplicar los criterios de interferencia, ningún engrane debería tener menos de 15 dientes y, por restricciones de tamaño, ningún engrane puede tener más de 75 dientes.

SOLUCIÓN: 1. ***Descomponer el valor del tren en razones de velocidad individuales***

Con las restricciones de tamaño de los engranes usados en este tren, la razón de velocidad individual máxima se determina por:

$$VR_{\text{máx}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{75}{15} = 5$$

Como en todos los problemas de diseño, hay más de una solución. Ya que el valor del tren es el producto de las razones de velocidad individuales, una solución se obtiene factorizando el valor del tren con valores

no mayores que las razón de velocidad individual máxima. En este problema, ningún factor puede ser mayor de 5.

$$TV = 300 = (-5)(-60) = (-5)(-5)(12) = (-5)(-5)(-4)(-3)$$

Por lo tanto, un tren de engranes con pares de engranes con razones individuales de velocidad de –5, –5, –4 y –3 dan un valor total de tren de 300. Se utiliza un valor negativo para las razones individuales de velocidad, porque se desean usar los engranes externos más comunes.

2. ***Identifique el número de dientes de cada engrane***

$VR_{1-2} = -5$, use engranes externos con $N_1 = 15$ y $N_2 = 75$

$VR_{3-4} = -5$, use engranes externos con $N_3 = 15$ y $N_4 = 75$

$VR_{5-6} = -4$, use engranes externos con $N_5 = 15$ y $N_6 = 60$

$VR_{7-8} = -3$, use engranes externos con $N_7 = 15$ y $N_8 = 45$

En general, cuando se usan engranes externos para producir giros opuestos, se debe emplear un número par de pares de engranes para obtener un valor positivo del tren de engranes. Como la solución de este ejemplo tiene cuatro pares de engranes, la rotación de salida tiene la misma dirección que la de entrada.

10.14 ENGRANES LOCOS

Considere el tren de engranes que se muestra en la figura 10.22. Observe que el engrane medio se acopla con el engrane más pequeño para formar la primera razón. El engrane medio también se acopla con el engrane más grande para formar la segunda razón. Como siempre, el valor del tren se calcula como el producto de las razones de velocidad.

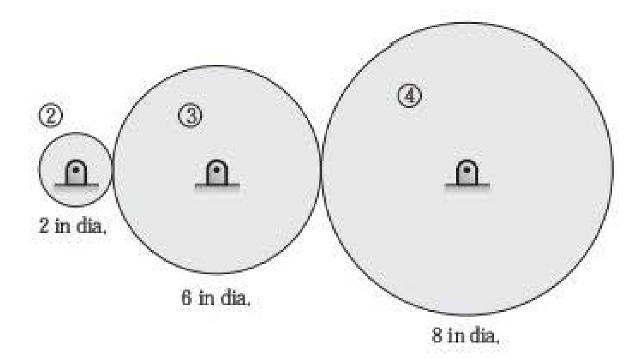


FIGURA 10.22 Tren de engranes con un engrane loco.

$$TV = (VR_{2-3})(VR_{3-4}) = \left(-\frac{d_3}{d_2}\right)\left(-\frac{d_4}{d_3}\right)$$

$$TV = \left(-\frac{6}{2}\right)\left(-\frac{8}{6}\right) = +\frac{8}{2} = +4$$

Observe que d_3 aparece tanto en el numerador como en el denominador. En esta situación, se anula la influencia del engrane medio. Una configuración de engranes así crea un valor del tren igual a:

$$TV = \left(-\frac{d_3}{d_2}\right)\left(-\frac{d_4}{d_3}\right) = +\frac{d_4}{d_2}$$

Por lo tanto, el valor del tren depende únicamente del tamaño del primer engrane y del último. El diámetro, o el número de dientes del engrane central, no influye en el valor del tren. El engrane central se conoce como *engrane loco*, cuya función es modificar la dirección del movimiento de salida, sin afectar la magnitud del movimiento. Para ilustrar esta función, considere una configuración donde el engrane 2 se acopla directamente con el engrane 4. El valor del tren resultante sería:

$$TV = (-VR_{2-4}) = -\frac{d_4}{d_2}$$

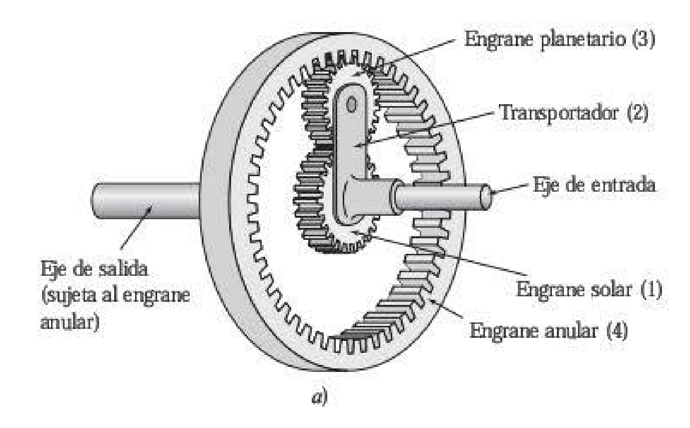
Así, el engrane loco sirve únicamente para invertir la dirección de la salida. Como se mencionó, el tamaño del engrane loco no influye en la cinemática del tren. En la práctica, se determina el tamaño este engrane con la finalidad de ubicar de manera conveniente los centros de los engranes de entrada y de salida. Desde luego, como los tres engranes están acoplados, deben tener pasos diametrales y ángulos de presión idénticos.

10.15 TRENES DE ENGRANES PLANETARIOS

Los trenes de engranes presentados en las secciones anteriores tienen los centros de los engranes sujetos a cuerpos fijos. En los trenes de engranes planetarios, se elimina tal restricción, pues al eslabón que sostiene los centros de los engranes se le permite moverse. En la figura 10.23 se ilustra un tren de engranes planetario, el cual también se conoce como *tren epicíclico*.

Los trenes planetarios se usan para obtener grandes reducciones de velocidades en un espacio menor que el de un tren de engranes convencional. Sin embargo, el mayor beneficio es la capacidad para modificar fácilmente el valor del tren. Como todos los eslabones son capaces de moverse, es factible modificar el valor del tren al sujetar diferentes engranes o transportadores. En la práctica, la conexión del eslabón fijo se realiza con mecanismos de freno o de embrague, con lo que libera un eslabón y fija otro. Por tal motivo, los engranes de trenes planetarios son muy comunes en las transmisiones automotrices.

Como el movimiento se asemeja a los planetas que giran alrededor del Sol de nuestro sistema solar, se aplicó a este sistema el término de *tren de engranes planetario*. Al ampliar la comparación, el engrane central se conoce como *solar*. Los engranes que giran alrededor del engrane solar se conocen como *planetas*. Un transportador mantiene a los engranes planetarios en órbita alrededor del Sol. Por último, el tren suele estar encerrado en un engrane interno llamado *engrane anular* o *de anillo*. En la figura 10.23 se presentan estos engranes.



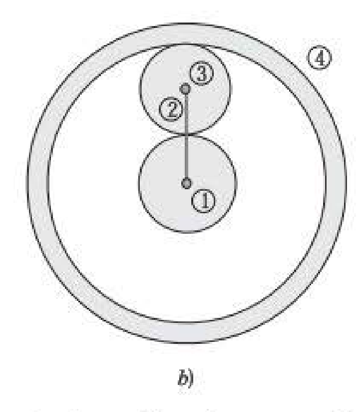


FIGURA 10.23 Tren de engranes planetario.

10.15.1 Análisis de engranes planetarios por superposición

El movimiento de un tren de engranes planetario no siempre es tan fácil de discernir como en los trenes de centro fijo. Conforme los engranes y los transportadores giran, el movimiento parecería muy complejo. Para analizar el movimiento de un tren de engranes planetarios, se utiliza el método de superposición para "pasar a través de" los movimientos de los engranes.

El método de superposición consiste en lo siguiente:

Paso uno

El primer paso es flexibilizar la restricción del eslabón fijo y suponer temporalmente que el transportador está bloqueado. Se gira una revolución el engrane que estaba fijo antes y se calcula el efecto en el tren completo.

Paso dos

El segundo paso es eliminar todas las restricciones y registrar el movimiento al girar cada eslabón una revolución en dirección opuesta al giro del paso uno. Cuando este movimiento se combina con el movimiento del primer paso, el movimiento superpuesto del engrane fijo es igual a cero.

Paso tres

El movimiento de todos los eslabones se determina combinando los giros de los primeros dos pasos. Finalmente, las velocidades son proporcionales a los movimientos de rotación.

Dicho en términos generales, aunque este método parece complejo, es bastante sencillo. El método se ilustra mejor con un problema de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.20

En la figura 10.24 se observa un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) es la entrada al tren. El solar (engrane 1) es el engrane fijo y tiene 30 dientes. El engrane planetario (engrane 3) tiene 35 dientes. El engrane anular sirve como la salida del tren y tiene 100 dientes. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 1200 rpm en sentido horario.

SOLUCIÓN: 1. ***Realice el paso 1***

El primer paso consiste en fijar temporalmente el transportador y, luego, calcular los movimientos de todos los engranes, cuando el engrane previamente fijado gira una revolución. De este modo se determina lo siguiente:

El engrane 1 gira una revolución.

$$\Delta\theta_1 = +1 \text{ rev}$$

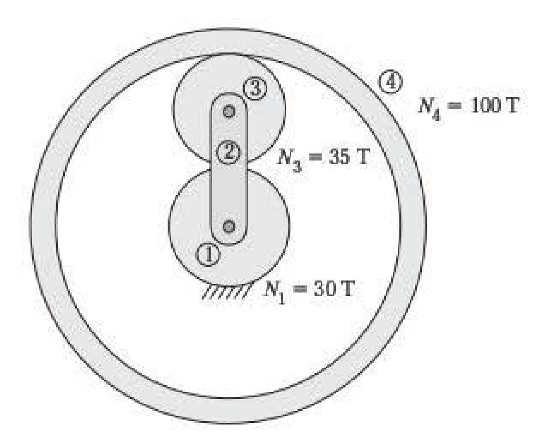


FIGURA 10.24 Tren planetario del problema de ejemplo 10.20.

En relación con el engrane 1, el engrane 3 (VR_{1-3}) gira tanto como:

$$\Delta\theta_3 = (VR_{1-3})(\Delta\theta_1) = \left(-\frac{30}{35}\right)(+1\text{ rev}) = -0.857 \text{ rev}$$

De acuerdo con el engrane 3, el engrane 4 ($VR_{3\text{-}4}$) gira tanto como:

$$\Delta\theta_4 = (VR_{3-4})(\Delta\theta_3) = (VR_{3-4})(V_{1-3})(\Delta\theta_1) = \left(\frac{+35}{100}\right)\left(-\frac{30}{35}\right)(+1\text{ rev}) = -0.3 \text{ rev}$$

2. ***Realice el paso 2***

   El segundo paso es girar todos los eslabones –1 revolución. Esto regresa al engrane solar a su posición origi-nal, generando así un movimiento neto igual a cero.

3. ***Realice el paso 3***

   El método de superposición implica la combinación de estos dos movimientos, lo cual da como resultado el movimiento real del tren de engranes planetario. Así, los giros de ambos pasos se suman algebraicamente. Los dos pasos se resumen en la tabla 10.10.

TABLA 10.10 Tabulación del análisis de engranes planetarios del problema de ejemplo 10.20

Eslabón	Solar	Planeta	Anular	Transportador
Paso 1: Giro con el transportador fijo	+1	−0.857	−0.3	0
Paso 2: Giro de todos los eslabones	−1	−1	−1	−1
Paso 3: Giros totales	0	−1.857	−1.3	−1

4. ***Determine las velocidades de todos los eslabones***

   Las velocidades se determinan con las razones de los desplazamientos angulares.

$$\omega_{\text{solar}} = \left(\frac{\Delta\theta_{\text{solar}}}{\Delta\theta_{\text{transportador}}}\right)\omega_{\text{transportador}} = \left(\frac{0}{-1}\right)(1200\,\text{rpm}) = 0\,\text{rpm}$$

$$\omega_{\text{planetario}} = \left(\frac{-1.857}{-1}\right)\omega_{\text{transportador}} = (+1.857)(1200\text{ rpm}) = +2228\,\text{rpm} = 2228\text{ rpm, en sentido horario}$$

$$\omega_{\text{anillo}} = \left(\frac{-1.3}{-1}\right)\omega_{\text{transportador}} = (+1.3)(1200\,\text{rpm}) = +1560\text{ rpm} = 1560\,\text{rpm, en sentido horario}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.21

En la figura 10.25 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El engrane anular (engrane 1) es el engrane fijo y tiene 120 dientes. El engrane planetario (engrane 4) tiene 40 dientes. El engrane solar (engrane 3) sirve como la salida del tren y tiene 30 dientes. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 1200 rpm en sentido horario.

SOLUCIÓN:

1. ***Realice los pasos 1 a 3***

   El primer paso es fijar temporalmente el transportador. Luego se calculan los movimientos de todos los engranes, cuando el engrane fijado con anterioridad gira una revolución.

   El segundo paso es girar todos los eslabones –1 revolución. Esto regresa el engrane anular a su posición original, generando así un movimiento neto igual a cero.

   Estos dos pasos se resumen en la tabla 10.11.

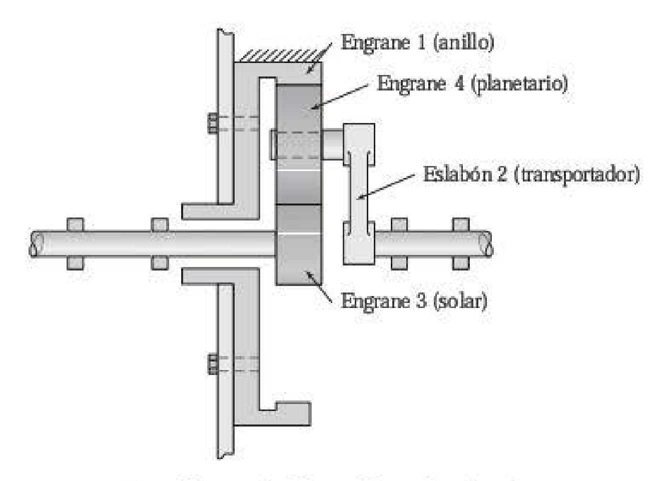


FIGURA 10.25 Tren planetario del problema de ejemplo 10.21.

TABLA 10.11 Pasos de la solución del problema de ejemplo 10.21

Eslabón	Solar (engrane 3)	Planeta (engrane 4)	Anillo (engrane 1)	Transportador (engrane 2)
Paso 1:				
Giro con el transportador fijo	$\left(\frac{120}{40}\right)\left(\frac{-40}{30}\right) = -4.0$	$\left(\frac{120}{40}\right) = 3.0$	+1	0
Paso 2:				
Giro de todos los eslabones	−1	−1	−1	−1
Paso 3:				
Giros totales	−5.0	+2.0	0	−1

2. ***Calcule la velocidad de todos los eslabones***

Las velocidades se determinan mediante las razones de los desplazamientos angulares.

$$\omega_{\text{anillo}} = \left(\frac{\Delta\theta_{\text{anillo}}}{\Delta\theta_{\text{transportador}}}\right)\omega_{\text{transportador}} = \left(\frac{0}{-1}\right)(0 \text{ rpm}) = 0 \text{ rpm}$$

$$\omega_{\text{transportador}} = 1200 \text{ rpm, sentido horario}$$

$$\omega_{\text{planetario}} = \left(\frac{+2.0}{-1}\right)\omega_{\text{transportador}} = (-2.0)(1200 \text{ rpm}) = -2400 \text{ rpm} = 2400 \text{ rpm, sentido antihorario}$$

$$\omega_{\text{solar}} = \left(\frac{-5.0}{-1}\right)\omega_{\text{transportador}} = (+5.0)(1200 \text{ rpm}) = +6000 \text{ rpm} = 6000 \text{ rpm, sentido horario}$$

10.15.2 Análisis por ecuación de engranes planetarios

Además del método tabular, el movimiento de un tren de engranes planetario también se analiza mediante una ecuación que se deduce de las velocidades angulares relativas. Para desarrollar el método de la fórmula, se examina el movimiento de los engranes acoplados en relación con el transportador. Así, se utiliza la inversión cinemática para visualizar el tren como si el transportador estuviera fijo. Se designa el engrane de un extremo del tren como el primer engrane. El engrane del extremo opuesto del tren se designa como el último engrane.

El tren está formado por pares de engranes acoplados consistentes en engranes impulsores e impulsados. El primer engrane se designa como el engrane impulsor; el último engrane, como el engrane impulsado. Los engranes intermedios se identifican como corresponda, dependiendo de si impulsan o son impulsados. Al calcular la razón de cada par, la razón es negativa en engranes externos acoplados y positiva en engranes con acoplamiento interno.

Al cambiar el enfoque a velocidades absolutas, el primer engrane tiene una velocidad angular designada ω_F y el último engrane, una velocidad angular denominada ω_F. El transportador tiene una velocidad angular $\omega_{\text{transportador}}$. La relación entre las velocidades angulares y el número de dientes es como sigue:

$$\frac{\omega_{L/\text{transportador}}}{\omega_{F/\text{transportador}}} = \pm\frac{\text{producto del número de dientes de los engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes de los engranes impulsados}} = \frac{\omega_L - \omega_{\text{transportador}}}{\omega_F - \omega_{\text{transportador}}} \qquad (10.36)$$

Con la ecuación (10.36) se obtiene cualquier término de velocidad angular, conociendo los otros dos. Con frecuencia, se fija ya sea el primer engrane, el último o el transportador, y ese término se hace igual a cero. Aun cuando es menos complicado que el método tabular, el método de la fórmula se limita a casos donde la trayectoria de acoplamiento une el primero y el último engranes. El método se ilustra en los siguientes problemas de ejemplo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.22

En la figura 10.24 se muestra un tren de engranes planetarios. El transportador (eslabón 2) sirve como la entrada al tren. El solar (engrane 1) es el engrane fijo y tiene 30 dientes. El engrane planetario (engrane 3) tiene 35 dientes. El engrane anular sirve como salida del tren y tiene 100 dientes. En el problema de ejemplo 10.20 se determinó que la velocidad angular del engrane anular es de 1560 rpm en sentido horario, mientras que el eje de entrada gira a 1200 rpm en sentido horario. Use el método de la fórmula para verificar este resultado.

SOLUCIÓN:

1. ***Especifique el primero y el último engranes***

   El solar (engrane 1) se designa como el primer engrane. Al estar en el otro extremo del tren, el engrane anular (engrane 4) se designa como el último engrane.

2. ***Sustituya las razones de engrane en la fórmula del tren planetario***

   El engrane 1 (primero) se acopla con el engrane 3, el cual a la vez se acopla con el engrane 4 (último). Al sustituir en la ecuación (10.36):

$$\left(-\frac{N_1}{N_3}\right)\left(+\frac{N_3}{N_4}\right) = \frac{\omega_L - \omega_{\text{transportador}}}{\omega_F - \omega_{\text{transportador}}}$$

3. ***Identifique los términos de velocidad angular***

   El solar está fijo y, por lo tanto, $\omega_F = 0$. El transportador gira a 1200 rpm en sentido horario. Considerando el sentido horario como una dirección negativa, $\omega_{\text{transportador}} = -1200$. El engrane anular se debe calcular, de modo que $\omega_L = ?$

4. ***Sustituya los valores en la fórmula del tren planetario y despeje***

   Al sustituir los valores en la ecuación (10.36):

$$\left(-\frac{30}{35}\right)\left(+\frac{35}{100}\right) = \frac{\omega_L - (-1200)}{0 - (-1200)}$$

   Despejando,

$$\omega_L = 1200\left(-\frac{30}{35}\right)\left(+\frac{35}{100}\right) - 1200 = -1560 = 1560 \text{ rpm, en sentido horario}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 10.23

En la figura 10.25 se ilustra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como la entrada al tren. El engrane anular (engrane 1) es el engrane fijo y tiene 120 dientes. El engrane planetario (engrane 4) tiene 40 dientes. El engrane solar (engrane 3) sirve como salida del tren y tiene 30 dientes. En el problema de ejemplo 10.21 se determinó que la velocidad angular del engrane solar es de 6000 rpm en sentido horario, mientras que el eje de entrada gira a 1200 rpm en sentido horario. Use el método de la fórmula para verificar este resultado.

SOLUCIÓN:

1. ***Especifique el primero y el último engranes***

   El solar (engrane 3) se designa como el primer engrane. Al estar en el otro extremo del tren, el engrane anular (engrane 1) se designa como el último engrane.

2. ***Sustituya las razones de engrane en la fórmula del tren planetario***

   El engrane 2 (primero) se acopla con el engrane 4, el cual a la vez se acopla con el engrane 1 (último). Sustituyendo en la ecuación (10.36):

$$\left(-\frac{N_3}{N_4}\right)\left(+\frac{N_4}{N_1}\right) = \frac{\omega_L - \omega_{\text{transportador}}}{\omega_F - \omega_{\text{transportador}}}$$

3. ***Identifique los términos de velocidad angular***

El anillo está fijo; por lo tanto, $\omega_L = 0$. El transportador gira a 1200 rpm en sentido horario. Considerando el sentido horario como una dirección negativa, $\omega_{transportador} = -1200$. Se debe calcular el engrane solar, de modo que $\omega_F = ?$

4. ***Sustituya los valores en la fórmula del tren planetario y despeje***

Sustituyendo los valores en la ecuación (10.36):

$$\left(-\frac{30}{40}\right)\left(+\frac{40}{120}\right) = \frac{0-(-1200)}{\omega_F-(-1200)}$$

Despejando,

$$\omega_F = 1200\left(-\frac{40}{30}\right)\left(+\frac{120}{40}\right) - 1200 = -6000 = 6000 \text{ rpm, en sentido horario}$$

PROBLEMAS

Geometría de engranes rectos

En los problemas 10-1 a 10-4, determine lo siguiente:

a) El diámetro del círculo de paso
b) El diámetro del círculo base
c) El diámetro del círculo del adendo
d) El diámetro del círculo del dedendo
e) El paso circular

10–1. Un engrane recto de involuta de profundidad total a 20°, con 18 dientes, que tiene un paso diametral de 12.

10–2. Un engrane recto de involuta de profundidad total a 20°, con 48 dientes, que tiene un paso diametral de 8.

10–3. Un engrane recto de involuta de profundidad total a 14½°, con 40 dientes, que tiene un paso diametral de 16.

10–4. Un engrane recto a 25°, con 21 dientes, que tiene un módulo métrico de 4. Determine el diámetro del círculo de paso.

En los problemas 10-5 a 10-8, determine lo siguiente:

a) La distancia entre centros
b) La razón de contacto
c) Si hay interferencia
d) La distancia entre centros que reduce la holgura de un valor de catálogo de $0.4/P_d$ a un valor de $0.1/P_d$ recomendado por la AGMA.

10–5. Dos engranes rectos de involuta de profundidad total a 20°, con paso de 12, que se utilizan en una sierra circular industrial para cortar madera. El piñón tiene 18 dientes y el engrane, 42.

10–6. Dos engranes rectos de involuta de profundidad total a 20°, con paso igual a 4, se utilizan en una volteadora para eliminar las rebabas de acero de partes troqueladas. El piñón tiene 12 dientes y el engrane, 28.

10–7. Dos engranes rectos de plástico de involuta, con profundidad total, a 25°, con paso igual a 48, se utilizan en una máquina de afeitar eléctrica. El piñón tiene 18 dientes y el engrane, 42.

10–8. Dos engranes rectos de involuta de profundidad total a 14½°, con paso igual a 16, se utilizan en el torno de un taller mecánico. El piñón tiene 16 dientes y el engrane 72.

En los problemas 10-9 a 10-14, determine lo siguiente:

a) Los diámetros de paso
b) La distancia entre centros

10–9. Dos engranes acoplados con paso igual a 12 tienen 18 dientes externos y 48 dientes internos, respectivamente.

10–10. Dos engranes acoplados con paso igual a 20 tienen 15 dientes externos y 60 dientes internos, respectivamente.

10–11. Dos engranes acoplados tienen 18 y 48 dientes, respectivamente, así como una distancia entre centros de 4.125.

10–12. Dos engranes acoplados tienen 20 y 45 dientes, respectivamente, así como una distancia entre centros de 3.25.

10–13. Un piñón de 18 dientes con un paso igual a 8 se acopla con un engrane interno de 64 dientes.

10–14. Un piñón de 24 dientes con un paso igual a 12 se acopla con un engrane interno de 108 dientes.

Cinemática de engranes

En los problemas 10-15 a 10-18, determine lo siguiente:

a) La velocidad del engrane
b) La velocidad en la línea de paso

10–15. Un piñón de 18 dientes con un paso igual a 8 gira en sentido horario a 1150 rpm y se acopla con un engrane de 64 dientes.

10–16. Un piñón de 15 dientes con un paso igual a 20 gira en sentido horario a 1725 rpm y se acopla con un engrane de 60 dientes.

10–17. Un piñón de 21 dientes con un paso igual a 6 gira en sentido horario a 850 rpm y se acopla con un engrane de 42 dientes.

10–18. Un piñón de 24 dientes con un paso igual a 24 gira en sentido horario a 1725 rpm y se acopla con un engrane de 144 dientes.

Selección de un engrane con una distancia entre centros definida

10–19. Dos engranes con un paso igual a 10 se van a montar con una separación de 12 in y tienen una razón de velocidad de 5:1. Calcule los diámetros de paso y el número de dientes de ambos engranes.

10–20. Dos engranes con un paso igual a 16 se van a montar con una separación de 3.75 in y tienen una razón de

velocidad de 4:1. Calcule los diámetros de paso y el número de dientes de ambos engranes.

Selección de un engrane con una distancia entre centros definida

10–21. Dos engranes con un paso igual a 32 se van a montar con una separación de 2.25 in y tienen una razón de velocidad de 8:1. Calcule los diámetros de paso y el número de dientes de ambos engranes.

10–22. Dos engranes se van a montar con una separación de 5 in y tienen una razón de velocidad de 4:1. Calcule los diámetros de paso, los pasos diametrales y el número de dientes adecuados en ambos engranes.

10–23. Dos engranes se van a montar con una separación de 3.5 in y tienen una razón de velocidad de 6:1. Calcule los diámetros de paso, los pasos diametrales y el número de dientes adecuados en ambos engranes.

10–24. Dos engranes se van a montar con una separación de 10 in y tienen una razón de velocidad de 3:1. Calcule los diámetros de paso, los pasos diametrales y el número de dientes adecuados en ambos engranes.

Selección de un engrane de catálogo

10–25. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce, a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 5 hp. El piñón impulsa a 1800 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 480 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–26. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 2.5 hp. El piñón impulsa a 1500 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 500 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–27. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 8 hp. El piñón impulsa a 1500 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 200 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–28. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 10 hp. El piñón impulsa a 800 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 180 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–29. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 1 hp. El piñón impulsa a 1725 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 560 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–30. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesitan transmitir 10 hp. El piñón impulsa a 1175 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 230 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–31. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 10 hp. El piñón impulsa a 1175 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 170 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–32. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 3 hp. El piñón impulsa a 1750 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 290 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

10–33. Se va a seleccionar un par de engranes de acero dulce a 20°, para una aplicación donde se necesita transmitir 20 hp. El piñón impulsa a 825 rpm y el engrane debe girar tan cerca como sea posible de 205 rpm. Determine un conjunto adecuado de engranes de catálogo para esta aplicación, usando la tabla 10.7.

Piñón y cremallera

10–34. Se usan una cremallera y un piñón para ajustar la altura de una cámara de pie. El piñón tiene 18 dientes y un paso igual a 24. Determine el ángulo que debe(n) girar el mango (y el piñón) para elevar la cámara 5 in.

10–35. Se usan una cremallera y un piñón para bajar el taladro de una prensa taladradora. El piñón tiene 20 dientes y un paso igual a 16. Determine el ángulo que debe(n) girar el mango (y el piñón) para bajar el taladro 3 in.

10–36. Se usan un piñón de 18 dientes y paso igual a 8 para impulsar una cremallera. Determine la distancia que viaja la cremallera cuando el piñón gira 3 revoluciones.

10–37. Se usan un piñón de 24 dientes y paso igual a 12 para impulsar una cremallera. Determine la distancia que viaja la cremallera cuando el piñón gira 5 revoluciones.

10–38. Se usan un piñón y una cremallera para dirigir un mecanismo. El piñón tiene 18 dientes y un paso igual a 12. Determine la velocidad requerida del piñón para impulsar la cremallera a una velocidad de 50 in/min.

10–39. Se usan un piñón y una cremallera para dirigir un mecanismo. El piñón tiene 20 dientes y un paso igual a 10. Determine la velocidad requerida de la cremallera, si el piñón gira a una velocidad de 80 rpm.

Engranes helicoidales

En los problemas 10-40 a 10-41, determine lo siguiente:

a) Los diámetros de paso
b) El paso diametral normal
c) El paso circular normal
d) Si la interferencia es un problema

10–40. Un par de engranes helicoidales tienen un ángulo de presión de 20°, un ángulo de hélice de 45° y un paso diametral igual a 8. El piñón tiene 16 dientes y el engrane 32.

10–41. Un par de engranes helicoidales tiene un ángulo de presión de 14½°, un ángulo de hélice de 30° y un paso diametral igual a 12. El piñón tiene 16 dientes y el engrane 48.

10–42. Para reducir el ruido de un engrane impulsor, se van a sustituir dos engranes rectos con paso igual a 8, 20 y 40 dientes, por dos engranes helicoidales. El conjunto nuevo debe tener la misma razón de velocidad y distancia entre centros. Especifique los dos engranes helicoidales, los cuales se fabricaron con una fresadora, para realizar la tarea.

10–43. Para reducir el ruido en un engrane impulsor, se van a sustituir dos engranes rectos con paso igual a 12, 18 y 54 dientes, por dos engranes helicoidales. El conjunto nuevo debe tener la misma razón de velocidad y distancia entre centros. Especifique los dos engranes helicoidales, los cuales se fabricaron con una fresadora, para realizar la tarea.

Engranes cónicos

10–44. Un par de engranes cónicos que tienen 20 y 75 dientes se utilizan en ejes que se intersecan en un ángulo de 90°. Determine la razón de velocidad y los ángulos de paso de ambos engranes.

10–45. Un par de engranes cónicos que tienen 20 y 75 dientes se utilizan en ejes que se intersecan en un ángulo de 60°. Determine la razón de velocidad y los ángulos de paso de ambos engranes.

10–46. Un par de engranes cónicos que tienen 18 y 90 dientes se utilizan en ejes que se intersecan en un ángulo de 75°. Determine la razón de velocidad y los ángulos de paso de ambos engranes.

Engranes sin fin

10–47. Se necesita un engranaje sin fin para reducir la velocidad de un motor eléctrico de 3600 a 60 rpm. Consideraciones de resistencia requieren que se usen engranes con un paso igual a 16, y se desea que el conjunto sea de autobloqueo. Especifique un conjunto que realice esta tarea.

10–48. Se necesita un engranaje sin fin para reducir la velocidad de un motor eléctrico de 1800 a 18 rpm. Consideraciones de resistencia requieren que se usen engranes con un paso igual a 12, y se desea que el conjunto sea de autobloqueo. Especifique un conjunto que realice esta tarea.

10–49. Se necesita un engranaje sin fin para reducir la velocidad de un motor eléctrico de 3600 a 40 rpm. Consideraciones de resistencia requieren que se usen engranes con un paso igual a 20, y se desea que el conjunto sea de autobloqueo. Especifique un conjunto que realice esta tarea.

Trenes de engranes

10–50. En la figura P10.50 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_2 = 18$ dientes; $N_3 = 72$ dientes y $P_d = 10$; $N_4 = 16$ dientes y $P_d = 8$; y $N_5 = 48$ dientes. Determine la velocidad del engrane 5 cuando el engrane 2 impulsa a 1200 rpm en sentido horario. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 5.

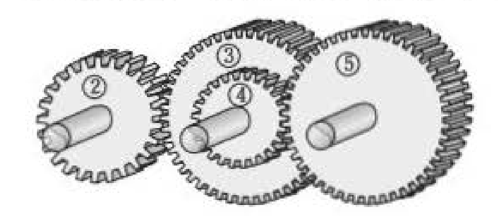


FIGURA P10.50 Problemas 50 y 51.

10–51. En la figura P10.50 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_2 = 20$ dientes y $P_d = 10$; $d_3 = 6$ in; $d_4 = 2$ in y $P_d = 8$; y $N_5 = 48$ dientes. Determine la velocidad del engrane 5 cuando el engrane 2 impulsa a 1800 rpm en sentido antihorario. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 5.

10–52. En la figura P10.52 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_2 = 15$ dientes; $N_3 = 90$ dientes y $P_d = 16$; $N_4 = 15$ dientes; $N_5 = 75$ dientes; $N_6 = 75$ dientes y $P_d = 12$; $N_7 = 15$ dientes; y $N_8 = 60$ dientes y $P_d = 8$. Determine la velocidad del engrane 8 cuando el engrane 2 impulsa a 3600 rpm en sentido horario. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 8.

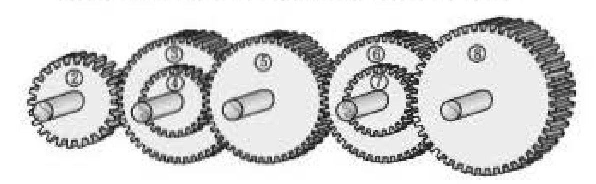


FIGURA P10.52 Problemas 52 y 53.

10–53. En la figura P10.52 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_2 = 16$ dientes y $P_d = 16$; $d_3 = 8$ in; $d_4 = 1.5$ in; $N_5 = 50$ dientes y $P_d = 10$; $d_6 = 5.5$ in; $N_7 = 1.5$ in y $P_d = 8$; y $N_8 = 56$ dientes. Determine la velocidad del engrane 8 cuando el engrane 2 impulsa a 1200 rpm en sentido antihorario. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 8.

10–54. En la figura P10.54 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_1 = 20$ dientes y $P_d = 16$; $d_2 = 8$ in; y $d_3 = 1.5$ in y $P_d = 10$. Determine la distancia que se mueve la cremallera con cada revolución del engrane. Determine asimismo la distancia entre centros entre los engranes 1 y 3.

10–55. En la figura P10.54 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_1 = 18$

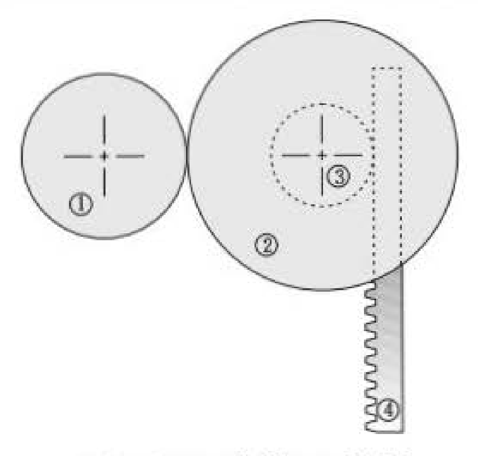


FIGURA P10.54 Problemas 54-56.

dientes y $P_d = 20$; $d_2 = 5.5$ in; y $d_3 = 2.5$ in y $P_d = 8$. Determine la velocidad requerida del engrane 1 para que la cremallera se mueva a una velocidad de 50 in/min.

10–56. En la figura P10.54 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $d_1 = 2.5$ in; $N_2 = 75$ dientes y $P_d = 10$; y $N_3 = 24$ dientes. Determine el paso diametral requerido de la cremallera para que esta se mueva 0.5 in con cada revolución del engrane 1.

10–57. En la figura P10.57 se muestra un tren de engranes. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_1 = 16$ dientes y $P_d = 16$; $d_2 = 8$ in; $N_3 = 20$ dientes; y $N_4 = 50$ dientes. Determine la velocidad del engrane 4 cuando el engrane 1 impulsa a 1800 rpm.

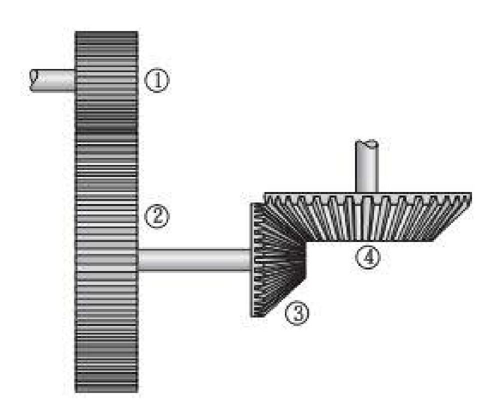


FIGURA P10.57 Problemas 57 y 58.

10–58. En el tren de engranes mostrado en la figura P10.57, los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_1 = 17$ dientes y $P_d = 20$; $d_2 = 4$ in; $N_3 = 18$ dientes; y $N_4 = 36$ dientes. Determine la velocidad del engrane 1 para que el engrane 4 impulse a 380 rpm.

10–59. En el tren de engranes mostrado en la figura P10.59, los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_{tornillosinfin} = 1$ cuerda; $N_2 = 45$ dientes; $N_3 = 18$ dientes y $P_d = 16$; $d_4 = 6$ in; y $N_5 = 80$ dientes. Determine la velocidad del engrane 5 cuando el engrane 1 impulsa a 1800 rpm. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 5.

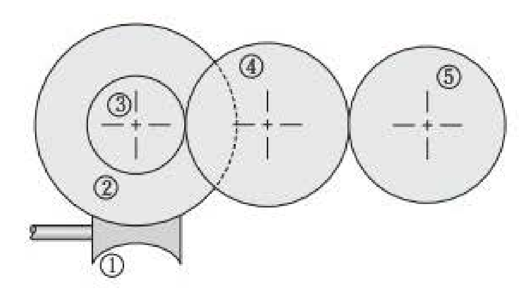


FIGURA P10.59 Problemas 59 y 60.

10–60. En el tren de engranes mostrado en la figura P10.59, los engranes tienen las siguientes propiedades: $N_{tornillosinfin} = 2$ cuerdas; $N_2 = 60$ dientes; $N_3 = 18$ dientes y $P_d = 12$; $d_4 = 6$ in; y $N_5 = 54$ dientes. Determine la velocidad requerida del engrane 1 (el tornillo sin fin) para que el engrane 5 impulse a 28 rpm. Determine asimismo la distancia entre centros de los engranes 2 y 5.

Diseño de trenes de engranes

10–61. Diseñe un tren de engranes con un valor del tren de 400:1. Especifique el número de dientes en cada engrane. Según los criterios de interferencia, ningún engrane debería tener menos de 17 dientes. Debido a restricciones de tamaño, ningún engrane debe tener más de 75 dientes. Bosqueje asimismo el concepto del tren.

10–62. Diseñe un tren de engranes con un valor del tren de –200:1. Especifique el número de dientes en cada engrane. Según los criterios de interferencia, ningún engrane debería tener menos de 17 dientes. Debido a restricciones de tamaño, ningún engrane debe tener más de 75 dientes. Bosqueje asimismo el concepto del tren.

10–63. Diseñe un tren de engranes con un valor del tren de –900:1. Especifique el número de dientes en cada engrane. Según los criterios de interferencia, ningún engrane debería tener menos de 17 dientes. Debido a restricciones de tamaño, ningún engrane debe tener más de 75 dientes. Bosqueje asimismo el concepto del tren.

Mecanismos de engranes impulsados

10–64. En la figura P10.64 se presenta el mecanismo de apertura de una ventana con bisagras. Los engranes tienen las siguientes propiedades: $d_1 = 1$ in; $N_2 = 30$ dientes y $P_d = 20$; $N_3 = 18$ dientes y $P_d = 18$; y $d_4 = 4$ in. Según la configuración mostrada, con $\beta = 20°$, determine gráficamente (usando técnicas manuales de dibujo o el CAD) la rotación angular de la ventana cuando la manivela gira una revolución.

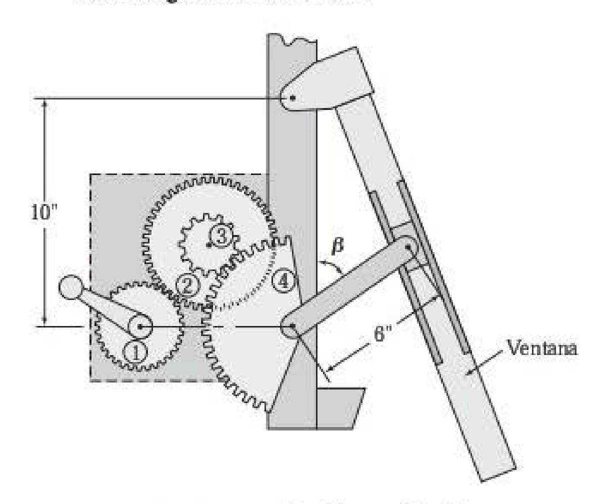


FIGURA P10.64 Problemas 64 a 67.

10–65. Para el mecanismo de apertura de una ventana mostrado en la figura P10.64, determine analíticamente la rotación angular de la ventana, cuando la manivela gira una revolución, usando la configuración mostrada ($\beta = 20°$).

10–66. En el mecanismo de apertura de una ventana mostrado en la figura P10.64, los engranes tienen las siguientes propiedades: $d_1 = 0.75$ in; $N_2 = 48$ dientes y $P_d = 32$; $N_3 = 16$ dientes y $P_d = 32$; $d_4 = 4$ in. Partiendo de la configuración mostrada ($\beta = 20°$), determine gráficamente (usando técnicas manuales de dibujo o el CAD) la velocidad de angular de la ventana con la que se abre la ventana, cuando la manivela gira a una velocidad constante de 20 rpm.

10–67. Para el problema 10-66, determine analíticamente la velocidad angular con la cual se abre la ventana a partir de la configuración mostrada ($\beta = 20°$), cuando la manivela gira a una velocidad constante de 20 rpm.

Trenes de engranes planetarios

10–68. En la figura P10.68 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El solar (engrane 1) está fijo y tiene 16 dientes con un paso diametral de 16. El engrane planetario (engrane 3) tiene un paso diametral de 2 in. El anillo sirve como salida del tren y tiene un paso diametral de 5 in. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 1800 rpm en sentido horario.

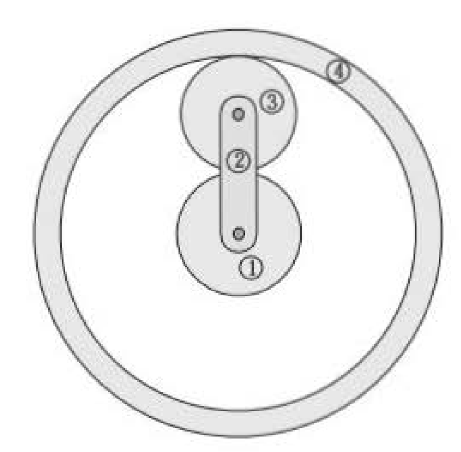


FIGURA P10.68 Problemas 68 y 69.

10–69. En el tren de engranes planetario mostrado en la figura P10.68, el transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El solar (engrane 1) sirve como el engrane de salida y tiene 18 dientes con un paso diametral de 12. El engrane planetario (engrane 3) tiene un paso diametral de 2.5 in. El engrane anular está fijo y tiene un paso diametral de 6.5 in. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 800 rpm en sentido antihorario.

10–70. En la figura P10.70 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El solar (engrane 1) está fijo y tiene 1.25 in de paso diametral con un paso diametral de 16. El engrane 3 tiene 42 dientes, y el engrane 4, 21 dientes. El engrane 5 tiene 32 dientes y está acuñado al mismo eje que el engrane 4. El engrane 5 se acopla con el engrane anular (engrane 6), el cual sirve como salida del tren y tiene 144 dientes. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 680 rpm en sentido horario.

10–71. En la figura P10.70 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El solar (engrane 1) sirve como la salida del tren y tiene un paso diametral de 1.0 in con un paso diametral de 20. El engrane 3 tiene 45 dientes, y el engrane 4, 20. El engrane 5 tiene 30 dientes y está sujeto a la misma flecha que el engrane 4. El engrane 5 se acopla

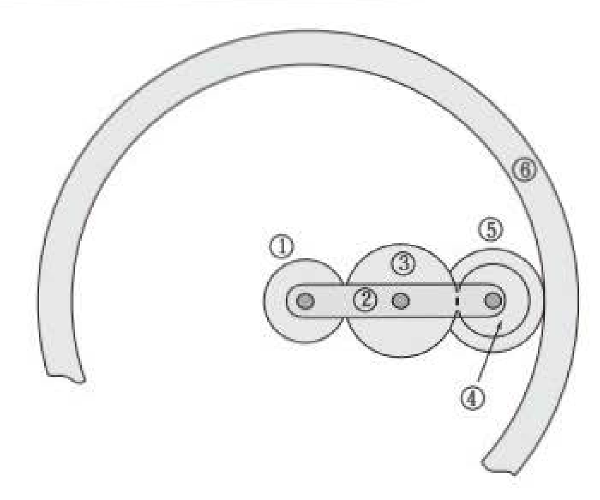


FIGURA P10.70 Problemas 70 y 71.

con el engrane anular (engrane 6), el cual está fijo y tiene 150 dientes. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 1125 rpm en sentido antihorario.

10–72. En la figura P10.72 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El engrane 2 está fijo y tiene 48 dientes con un paso diametral de 12. El engrane 1 tiene 24 dientes, el engrane 3 tiene un paso diametral de 2.5 in, mientras el engrane 4 tiene 35 dientes y un paso diametral de 10. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de entrada gira a 900 rpm en sentido horario.

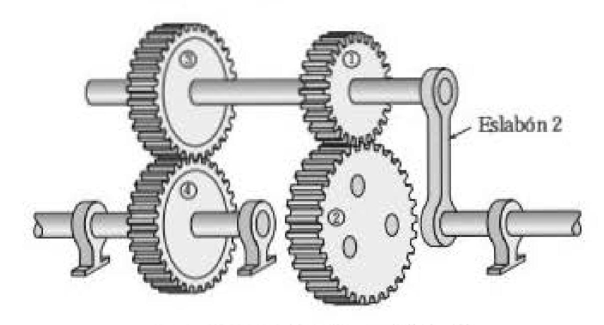


FIGURA P10.72 Problemas 72 y 73.

10–73. En la figura P10.72 se muestra un tren de engranes planetario. El transportador (eslabón 2) sirve como entrada al tren. El engrane 2 está fijo y tiene 4.0 in de paso diametral con un paso diametral de 10. El engrane 1 tiene 25 dientes, el engrane 3 tiene un paso diametral de 2.5 in, y el engrane 4 tiene 32 dientes y un paso diametral de 8. Determine la velocidad angular de todos los miembros de este tren de engranes, cuando el eje de salida gira a 210 rpm en sentido horario.

ESTUDIOS DE CASO

10–1. En la figura E10.1 se muestra un mecanismo que usa dos engranes rectos y una cremallera. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

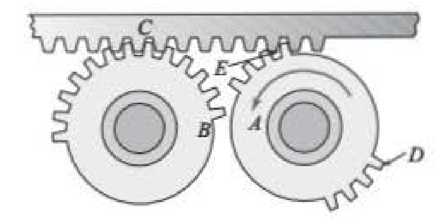


FIGURA E10.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Cuando un segmento del engrane *A* gira en sentido antihorario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento de la cremallera *C*?
2. Cuando un segmento del engrane *A* gira en sentido antihorario a partir de la posición mostrada, ¿cuál es el movimiento del engrane *B*?
3. Cuando el engrane *A* gira hasta que el diente *E* se desacopla de la cremallera *C*, ¿qué movimiento presenta el engrane *B*?
4. ¿Cuál es el rango total de movimiento del engrane *B*?
5. ¿Cuál es el rango total de movimiento de la cremallera *C*?
6. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?
7. ¿Cuáles son los probables problemas de operación con este mecanismo?

10–2. En la figura E10.2 se muestra el dispositivo de una máquina moldeadora de alambre. El eslabón *B* y el engrane recto *C* están sujetos al mismo eje. Asimismo, el eslabón *E* y el engrane recto *D* están acuñados al mismo eje. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

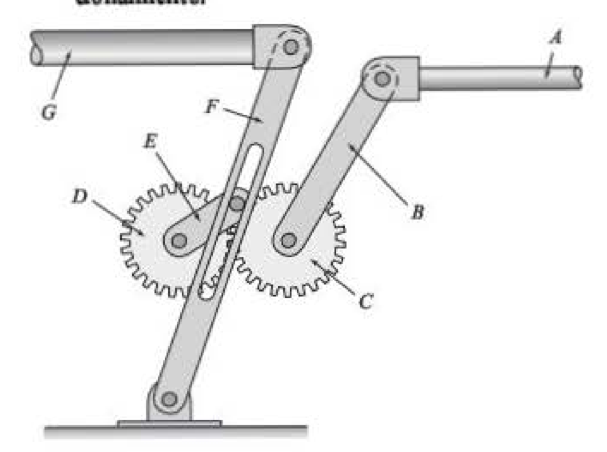


FIGURA E10.2 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del eslabón *B*?
2. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del engrane *C*?
3. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del engrane *D*?
4. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del eslabón *E*?
5. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del eslabón *F*?
6. Conforme el eslabón *A* se mueve hacia la izquierda, ¿cuál es el movimiento del eslabón *G*?
7. Describa específicamente el movimiento proporcionado a *G*, cuando el eslabón *A* oscila hacia atrás y hacia adelante.
8. ¿Cómo se modificaría el movimiento del eslabón *G*, si el mecanismo se ensamblara de modo tal que todo quedara idéntico, excepto que el eslabón *E* girara 90° en sentido horario?

10–3. En la figura E10.3 se ilustra un dispositivo que controla el movimiento de un engrane sujeto al engrane *D*. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

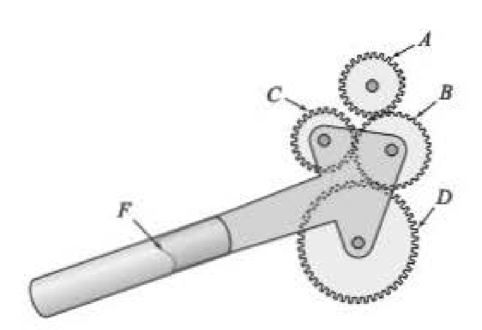


FIGURA E10.3 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme el engrane *A* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del engrane *B*?
2. Conforme el engrane *A* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del engrane *C*?
3. Conforme el engrane *A* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del engrane *D*?
4. Conforme el mango *F* es forzado hacia arriba, ¿qué pasa con los engranes acoplados?
5. Conforme el engrane *A* gira en sentido horario, ¿cuáles son los movimientos de los engranes *B*, *C* y *D*?
6. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?
7. ¿Qué problemas ocurrirían cuando se opere este mecanismo?

10–4. En la figura E10.4 se ilustra un dispositivo que impulsa un pistón (*G*). Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

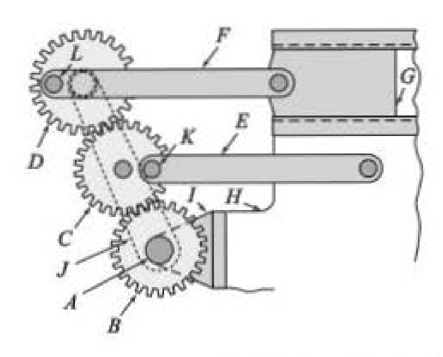


FIGURA E10.4 (Cortesía de Industrial Press).

1. Conforme el engrane *B* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del engrane *C*?
2. Conforme el engrane *B* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento del engrane *D*?

3. Si el eslabón *J* estuviera articulado en *A*, pero no estuviera sujeto al engrane *B*, ¿qué movimiento presentaría el eslabón *J* y qué causaría dicho movimiento?
4. ¿Cuál es el movimiento del centro del engrane *D*?
5. ¿Cuál es el movimiento del pistón *G*?
6. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?

10–5. En la figura E10.5 se ilustra un dispositivo. El eje *C* se mueve libremente a través de los engranes *H* y *J*, pero la pieza *K* está sujeta con un perno al eje. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

1. Conforme el eje *G* gira como se muestra, ¿en qué dirección gira el engrane *H*?
2. ¿Qué tipos de engrane son *F*, *J* y *H*?
3. Conforme el eje *G* gira como se indica, ¿cuál es el movimiento de la pieza *A*?

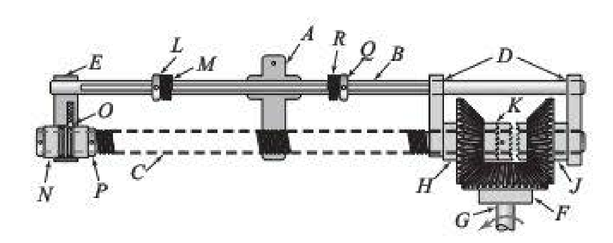


FIGURA E10.5 (Cortesía de Industrial Press).

4. Conforme la pieza *A* entra en contacto con el collarín *L*, ¿qué cambios ocurren en el movimiento del mecanismo?
5. ¿Cuál es la finalidad de la pieza *O*?
6. ¿Por qué existe un conjunto de cuerdas en los collarines *L* y *Q*?
7. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?

TRANSMISIONES DE CORREA Y DE CADENA

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Describir las ventajas de una transmisión de correa.**
2. **Identificar varios tipos de diseño de una correa.**
3. **Determinar las relaciones geométricas de una transmisión de correa.**
4. **Analizar las relaciones cinemáticas de dos ejes acoplados con una transmisión de correa.**
5. **Describir las ventajas de una transmisión de cadena.**
6. **Identificar varios tipos de diseño de una cadena.**
7. **Determinar las relaciones geométricas de una transmisión de cadena.**
8. **Analizar las relaciones cinemáticas de dos ejes acoplados con una transmisión de cadena.**

11.1 INTRODUCCIÓN

La función principal de una transmisión de correa o de cadena es la misma que en una transmisión de engranes. Los tres mecanismos sirven para transmitir potencia entre ejes que giran. Sin embargo, el uso de engranes se vuelve impráctico cuando la distancia entre los ejes es significativa. Tanto la transmisión de correa como la de cadena ofrecen flexibilidad al operar con eficiencia a distancias grandes y pequeñas entre centros.

Considere la cadena de una bicicleta: se utiliza para transmitir movimiento y fuerzas del ensamble giratorio del pedal a la rueda trasera. La distancia entre estos dos componentes giratorios es considerable, por lo que una transmisión de engranes no sería razonable. Asimismo, la razón de velocidad de la transmisión de cadena se modifica fácilmente al cambiar la cadena por un conjunto de catarinas. De este modo, se necesita un giro más lento del pedal —pero mayores fuerzas— para mantener la rotación idéntica de la rueda trasera. La razón de velocidad de una transmisión de correa se modifica de forma similar. Cambiar la razón de velocidad en una transmisión de engranes es un proceso mucho más complejo, como en una transmisión automotriz.

Las transmisiones de correa y de cadena se conocen comúnmente como conectores flexibles. Ambos tipos de mecanismos pueden ir "en el mismo paquete" porque su cinemática es idéntica. La determinación de la cinemática y las fuerzas en las transmisiones de correa y de cadena es el propósito de este capítulo. Como el movimiento primario de los ejes es de rotación pura, las soluciones gráficas no aportan mayor comprensión. Por lo tanto, únicamente resultan prácticas las técnicas analíticas que se presentan en este capítulo.

11.2 CORREAS

La función de una transmisión de correa es transmitir movimiento giratorio y torque de un eje a otro suavemente, sin ruido y de manera económica. Las transmisiones de correa proporcionan la mejor combinación integral de flexibilidad en el diseño, bajo costo, poco mantenimiento, facilidad de ensamblaje y ahorro de espacio.

Comparadas con otras formas de transmisión de potencia, las transmisiones de correa tienen las siguientes ventajas:

- Son menos costosas que las transmisiones de engranes o de cadena.
- La distancia entre centros de los ejes es flexible, mientras que en las transmisiones de engranes está restringida.
- Operan suavemente y con menos ruido a grandes velocidades.
- Se pueden diseñar para que se deslicen cuando se presenta una sobrecarga en la máquina.
- No requieren lubricación, como es el caso de las cadenas y los engranes.
- Se suelen utilizar en más de un plano.
- Son fáciles de ensamblar e instalar, además de que tienen tolerancias flexibles.
- Requieren escaso mantenimiento.
- Funcionan bien en la absorción de cargas de choque.

Las correas por lo general se fabrican como una sola pieza sin uniones, con materiales como tela recubierta con caucho, cuerdas recubiertas con caucho, plástico reforzado, piel y tela (p. ej., algodón o tela sintética). Comercialmente hay muchas formas de correas, las cuales se listan en seguida.

1. En la figura 11.1a se muestra una *correa plana*, que es el tipo más simple, pero por lo común tan solo se usa en aplicaciones con poco torque, ya que la fuerza impulsora está restringida a fricción pura entre la correa y la polea.
2. En la figura 11.1b se presenta una *correa en V*, la cual es el tipo de correa más utilizado, sobre todo en máquinas automotrices e industriales. La forma en V hace que la correa se ajuste muy tensa en la polea, lo cual incrementa la fricción y permite la operación con mayor torque.
3. En la figura 11.1c se ilustra una *correa en V múltiple*. Este diseño de correa equivale a colocar varias correas en V, una al lado de la otra, pero unidas integralmente. Se usa para incrementar la cantidad de potencia transmitida.

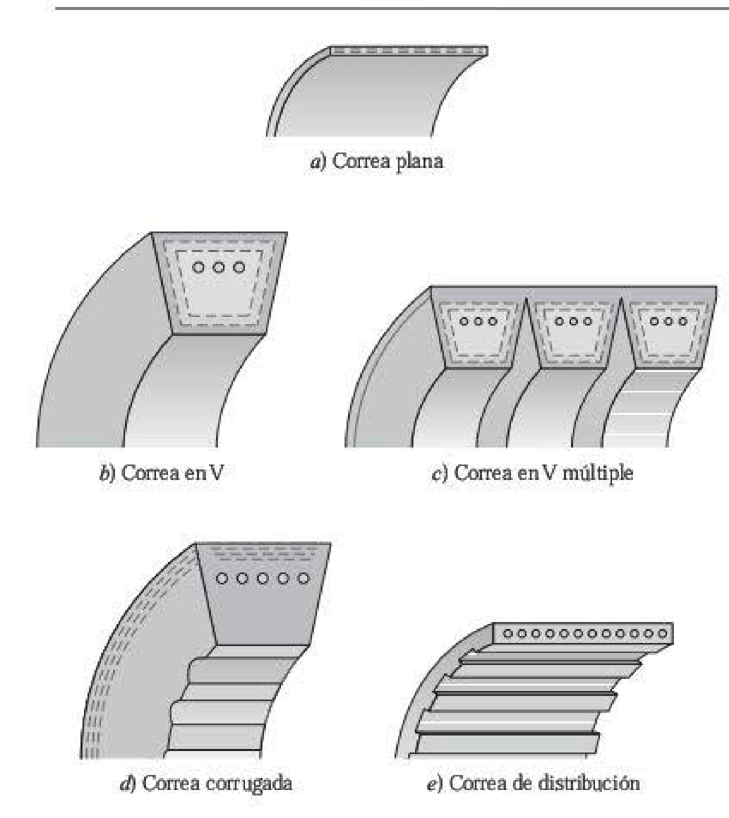


FIGURA 11.1 Tipos de correa.

4. En la figura 11.1d se observa una *correa corrugada*. El diseño de la correa es similar al de la correa en V, pero tiene ranuras en la superficie interior. Esta característica incrementa la flexibilidad de la correa, permitiéndole girar en radios menores. Por consiguiente, se usa en poleas más pequeñas, reduciendo así el tamaño de la transmisión.
5. En la figura 11.1e se muestra una *correa de distribución*, que tiene dientes como un engrane que se acoplan con los dientes de la polea. Su configuración combina la flexibilidad de una correa con el agarre positivo de una transmisión de engranes. Esta correa se usa ampliamente en aplicaciones donde se requiere un posicionamiento relativo de los ejes respectivos.

Las *poleas*, conocidas también como *acanaladas*, son las ruedas que se sujetan a los ejes y transportan la correa. Las poleas tienen una ranura alrededor del borde, cuya forma se acopla con la correa. Una polea acanalada para una correa en V se muestra en la figura 11.2. Las poleas industriales se maquinan en acero o hierro fundido, dependiendo del diámetro. Para un trabajo más ligero, las poleas acanaladas suelen fabricarse de aluminio, plástico o zinc vaciado. Su construcción es sólida o con rayos radiales, según el tamaño. Las poleas grandes por lo general tienen rayos radiales construidos de hierro colado.

Las poleas acanaladas se clasifican por su diámetro de paso, el cual es un diámetro ligeramente menor que el borde de la ranura, correspondiente con la ubicación del centro de la correa. Las poleas acanaladas comerciales se venden en fracciones de pulgada del diámetro interior de la ranura. La tabla 11.1 lista los diámetros de las poleas disponibles.

Cuando las correas están en operación, se estiran con el paso del tiempo. Las máquinas que utilizan una transmisión de correa necesitan algo que compense el estiramiento de la correa, como una base ajustable del motor o una *polea loca*. Esta última sirve para mantener una tensión constante en la correa. Por lo general se coloca en el lado flojo de la correa y se precarga, sobre todo con resortes, para mantener la correa ajustada.

Como ya se mencionó, la correa en V es el tipo más utilizado. Las correas en V industriales comercialmente disponibles están hechas en uno de los tamaños estándar mostrados en la figura 11.3. Desde luego, las secciones transversales más grandes pueden transmitir mayores potencias. Con frecuencia se usan varias correas sobre poleas con ranuras múltiples para incrementar la cantidad de potencia transmitida por la transmisión de

TABLA 11.1 Poleas acanaladas comerciales

Diámetros de paso de las poleas acanaladas (in)

Correa 3V		Correa 5V		Correa 8V
2.2	5.3	4.3	8.4	12.3
2.3	5.6	4.5	8.9	13.0
2.5	6.0	4.8	9.2	13.8
2.6	6.5	4.9	9.7	14.8
2.8	6.9	5.1	10.2	15.8
3.0	8.0	5.4	11.1	16.8
3.1	10.6	5.5	12.5	17.8
3.3	14.0	5.8	13.9	18.8
3.6	19.0	5.9	15.5	19.8
4.1	25.0	6.2	16.1	21.0
4.5	33.5	6.3	18.5	22.2
4.7		6.6	20.1	29.8
5.0		6.7	23.5	39.8
		7.0	25.1	47.8
		7.1	27.9	52.8
		7.5		57.8
		8.1		63.8

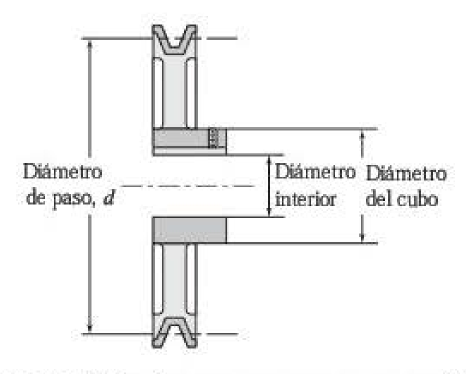


FIGURA 11.2 Polea de una ranura para correa en V.

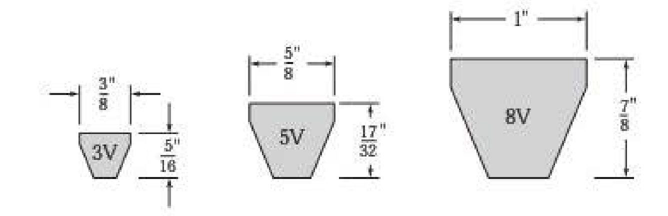


FIGURA 11.3 Secciones transversales de correas en V industriales.

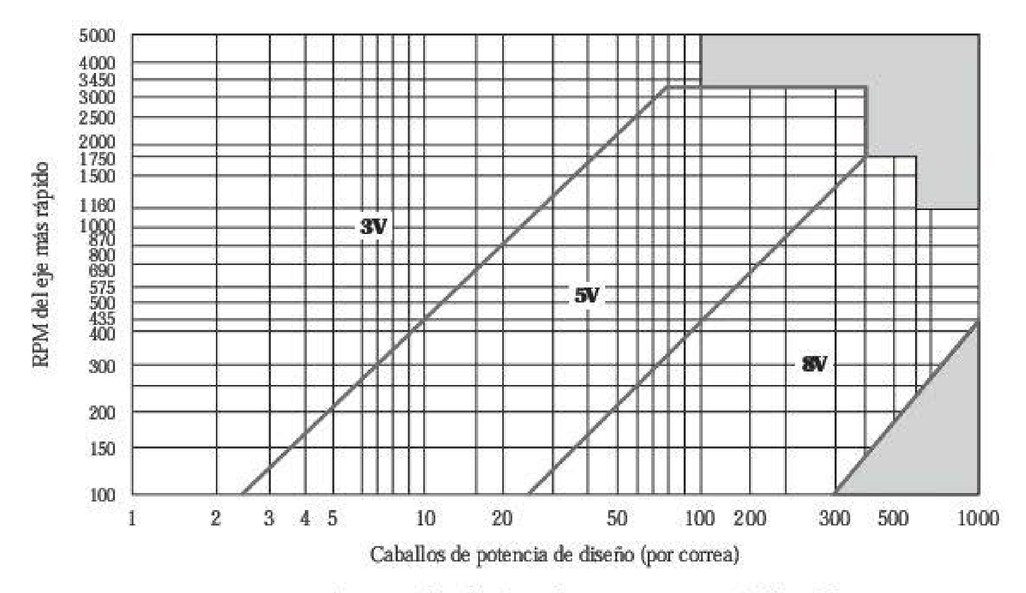


FIGURA 11.4 Diagrama de selección de una correa en V industrial.

correa. En la figura 11.4 se presenta una guía para la selección de una correa en V. Los valores de potencia se listan "por cada correa". Cuando la transmisión de correa debe transmitir 6 hp con una correa de tres ranuras, cada una de las tres correas debe ser capaz de transmitir 2 hp.

Cabe aclarar que la figura 11.4 sólo es una guía aproximada para seleccionar el tamaño adecuado de la correa. Es importante seleccionar la transmisión de correa más adecuada, con base en un estudio minucioso de la aplicación y los requerimientos de transmisión de potencia. Estos procedimientos de selección detallada se encuentran en los catálogos de los fabricantes.

11.3 GEOMETRÍA DE LA TRANSMISIÓN DE CORREA

Una transmisión de correa está hecha para suministrar una razón de velocidad constante entre los ejes respectivos. En la figura 11.5 se observa un diagrama de la geometría básica de una transmisión de correa.

Como ya se mencionó, el *diámetro de paso d* de la polea se mide en el punto de la ranura donde se asienta el centro de la correa. Este es ligeramente más pequeño que el diámetro exterior de la polea. Observe que los diámetros mostrados de las poleas de las figuras 11.2 y 11.5 son los diámetros de paso.

La *distancia entre centros C* es la distancia entre el centro de las poleas impulsora e impulsada. Desde luego, esta también es la distancia entre los dos ejes acoplados por la transmisión de correa. Las distancias pequeñas entre centros podrían causar fatiga con carga máxima frecuente sobre las secciones de la correa cuando entra a la polea pequeña. Las distancias grandes entre centros, con una larga distancia por sostener, suelen causar latigazos y vibraciones en la correa. La distancia normal entre centros para correas en V debería estar en el rango de

$$d_2 < C < 3(d_1 + d_2)$$

La *longitud de la correa L* es la longitud total de la correa. En resumen, se especifica por lo general la longitud exterior. Esta es la dimensión que se obtiene al enrollar una cinta métrica alrededor del lado exterior de la correa en posición de operación. Las correas están disponibles comercialmente en longitudes específicas. La tabla 11.2 incluye las longitudes disponibles de correas en V industriales. La distancia entre centros y los diámetros de paso se relacionan matemáticamente por [ref. 2].

$$L = 2C + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4C} \qquad (11.1)$$

y

$$C = \frac{B + \sqrt{B^2 - 32(d_2 - d_1)^2}}{16} \qquad (11.2)$$

donde

$$B = 4L - 2\pi(d_2 + d_1) \qquad (11.3)$$

El *ángulo de contacto θ* es la medida del acoplamiento angular de la correa sobre cada polea. Se calcula para cada polea como:

$$\theta_1 = 180° - 2\,\text{sen}^{-1}\left\{\frac{d_2 - d_1}{2C}\right\} \qquad (11.4)$$

$$\theta_2 = 180° + 2\,\text{sen}^{-1}\left\{\frac{d_2 - d_1}{2C}\right\} \qquad (11.5)$$

Las clasificaciones de potencia de las correas disponibles comercialmente, como las mostradas en la figura 11.4, son para transmisiones con poleas del mismo tamaño. Por lo tanto, el ángulo de contacto "nominal" es de 180°. Para ángulos más pequeños, se reduce la cantidad de fricción que se desarrollaría

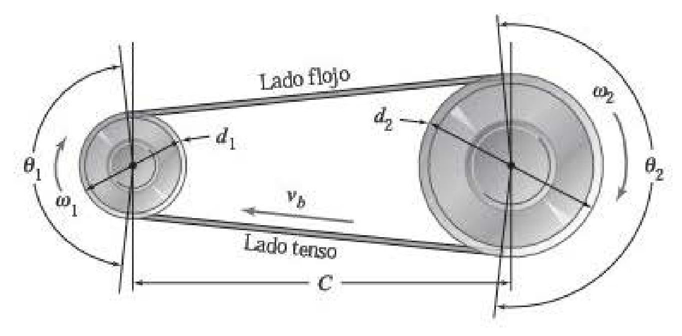


FIGURA 11.5 Geometría de una transmisión de correa.

TABLA 11.2 Longitudes de correas en V disponibles comercialmente (in)

Longitudes de la correa 3V			
25.0	40.0	63.0	100.0
26.5	42.5	67.0	106.0
28.0	45.0	71.0	112.0
30.0	47.5	75.0	118.0
31.5	50.0	80.0	125.0
33.5	53.0	85.0	132.0
35.5	56.0	90.0	140.0
37.5	60.0	95.0	
Longitudes de la correa 5V			
50.0	90.0	160.0	280.0
53.0	95.0	170.0	300.0
56.0	100.0	180.0	315.0
60.0	106.0	190.0	335.0
63.0	112.0	200.0	355.0
67.0	118.0	212.0	
71.0	125.0	224.0	
75.0	132.0	236.0	
80.0	140.0	250.0	
85.0	150.0	265.0	
Longitudes de la correa 8V			
100.0	160.0	236.0	355.0
112.0	170.0	250.0	400.0
118.0	180.0	265.0	450.0
125.0	190.0	280.0	
132.0	200.0	300.0	
140.0	212.0	315.0	
150.0	224.0	335.0	

alrededor de la polea; por lo tanto, disminuye la cantidad de potencia que la correa transmite. La tabla 11.3 muestra el porcentaje de potencia nominal real que se puede transmitir por una correa que funciona sobre una polea con un ángulo de contacto menor de 180°. Los fabricantes de correas sugieren mantener el ángulo de contacto mayor de 120° cuando sea posible.

11.4 CINEMÁTICA DE UNA TRANSMISIÓN DE CORREA

Al igual que en las transmisiones de engranes, la *razón de velocidad VR* se define como la velocidad angular de la polea impulsora (polea 1) dividida entre la velocidad angular de la polea impulsada (polea 2).

$$VR = \frac{\omega_{\text{impulsora}}}{\omega_{\text{impulsada}}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad \textbf{(11.6)}$$

Como una razón es válida independientemente de las unidades, la razón de velocidad se define en términos de revoluciones por minuto, radianes por unidad de tiempo, o cualesquiera otros grupos convenientes de unidades de velocidad angular. Usando la misma lógica de deducción de la ecuación (10.19), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = VR$$

Al introducir los diámetros de paso,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{2r_2}{2r_1} = \frac{r_2}{r_1} = VR$$

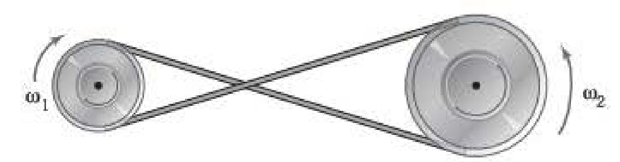
Entonces, una definición general de la razón de velocidad está dada por:

$$VR = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \textbf{(11.7)}$$

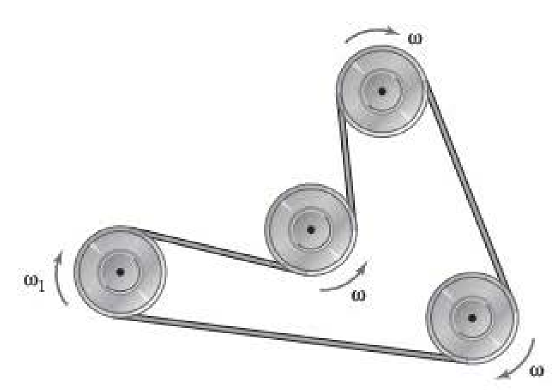
Note que para una configuración típica, como las mostradas en la figura 11.5, las poleas giran en la misma dirección. Las transmisiones cruzadas o de serpentina, como las que se ilustran en la figura 11.6, se utilizan para invertir la dirección del giro de la polea.

Muchas aplicaciones industriales requieren poleas para reducir la velocidad de una fuente de potencia. Por lo tanto, es usual tener razones de velocidad mayores que 1. Como se observa en la ecuación (11.6), lo anterior indica que la polea impulsora gira más rápido que la polea impulsada, lo cual es el caso en las reducciones de velocidad.

La *velocidad de la correa* v_b se define como la velocidad lineal de la correa. La magnitud de esta velocidad corresponde a la magnitud de la velocidad lineal de un punto sobre el diámetro de paso de cada polea. Por lo tanto, la velocidad de la correa está



a) Transmisión cruzada



b) Transmisión de serpentina

FIGURA 11.6 Formas alternas de transmisiones de correa.

TABLA 11.3 Reducción de la capacidad de potencia por el ángulo de contacto

Ángulo de contacto, θ	180°	160°	140°	120°	100°	80°
Capacidad real (% de potencia nominal)	100	95	89	82	74	63

relacionada con las velocidades de giro de las poleas y sus radios de paso mediante la ecuación (6.5).

$$v_b = r_1\omega_2 = \frac{d_1}{2}\omega_1 = r_2\omega = \frac{d_2}{2}\omega_2 \qquad \textbf{(11.8)}$$

Advierta que, como en el capítulo 6, la velocidad angular en esta ecuación se debe especificar en radianes por unidad de tiempo.

Una correa transmite la máxima potencia a velocidades de 4000 a 5000 fpm (ft/min), de manera que es mejor diseñar una transmisión de correa para que opere en este rango. Las poleas grandes de uso industrial están fabricadas con hierro colado y generalmente tienen una velocidad límite máxima de la correa de 6500 fpm. Esto se debe a que las fuerzas de inercia creadas por la aceleración normal se vuelven excesivas. Quizá sea necesario un equilibrio especial para velocidades por arriba de 5000 fpm, cuando la vibración es provocada por la aceleración centrífuga. Finalmente, es deseable otro tipo de transmisión, sobre todo de cadena, para velocidades por debajo de 1000 fpm.

PROBLEMA DE EJEMPLO 11.1

Se usa una transmisión de correa para transmitir potencia de un motor eléctrico al compresor de un camión refrigerador. El compresor debe funcionar aun cuando el camión esté detenido sin el motor encendido. El motor eléctrico de 10 hp tiene una velocidad nominal de 3550 rpm, mientras el diámetro de la polea del motor es de 5 in. La polea del compresor tiene 7.5 in de diámetro. Determine el tamaño adecuado de una correa industrial, la velocidad de operación del compresor y la velocidad de la correa.

SOLUCIÓN:

1. ***Seleccione el tamaño adecuado de la correa***

   La figura 11.4 sugiere que para un motor de 10 hp que funciona a 3550 rpm, se utilice una correa 3V.

2. ***Calcule la velocidad de la polea impulsora***

   Con la ecuación (11.8), la razón de velocidad se determina como:

$$VR = \frac{d_2}{d_1} = \frac{7.5\,\text{in}}{5\,\text{in}} = 1.5$$

   La velocidad del compresor se calcula replanteando la ecuación (11.8).

$$\omega_2 = \frac{d_1\omega_1}{d_2} = \frac{(5\,\text{in})(3550\,\text{rpm})}{(7.5\,\text{in})} = 2367\,\text{rpm}$$

   Las unidades de la velocidad angular del eje del motor se convierten a radianes por unidad de tiempo.

$$\omega_1 = 3550\,\text{rev/min}\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}}\right) = 22305\,\text{rad/min}$$

3. ***Calcule la velocidad de la correa***

   La velocidad de la correa se obtiene con la ecuación (11.7).

$$v_b = \left(\frac{d_1}{2}\right)\omega_1 = \frac{5\,\text{in}}{2}(22305\,\text{rad/min}) = 55762\,\text{in/min} = 4647\,\text{fpm}$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 11.2

Se requiere una transmisión de correa para reducir la velocidad del motor eléctrico de una rueda de esmeril, como en la figura 11.7. El motor eléctrico de 50 hp tiene una velocidad nominal de 1725 rpm, por lo que se requiere una velocidad en la rueda de esmeril de 600 rpm aproximadamente. Determine el tamaño adecuado de la correa y calcule diámetros adecuados de la polea del inventario de poleas listado en la tabla 11.1. Seleccione, asimismo, una longitud adecuada de la correa de la tabla 11.2 y calcule la distancia entre centros correspondiente.

SOLUCIÓN:

1. ***Determine el tamaño adecuado de la correa***

   La figura 11.4 sugiere que para un motor de 50 hp que funciona a 1725 rpm, se use una correa 5V.

2. ***Calcule el diámetro ideal de la polea impulsora***

   Las velocidades angulares de los ejes respectivos son como sigue:

$$\omega_1 = 1725\,\text{rev/min}\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}}\right) = 10838\,\text{rev/min}$$

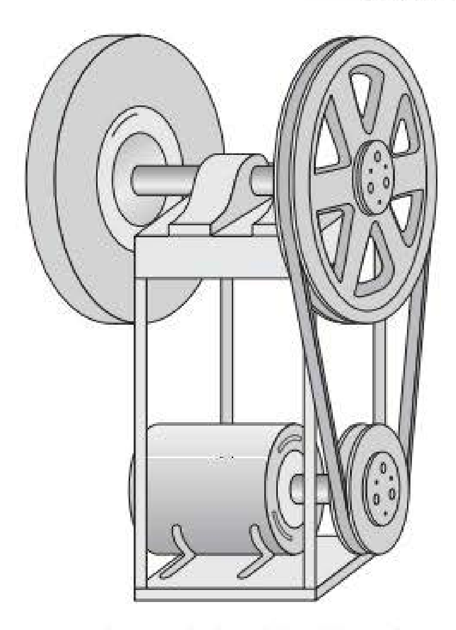


FIGURA 11.7 Rueda esmeriladora del problema de ejemplo 11.2.

$$\omega_2 = 600 \text{ rev/min}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 3770 \text{ rev/min}$$

La velocidad óptima de la correa se encuentra entre 4000 y 5000 fpm. Al replantear la ecuación (11.7),

$$d_1 = 2\left(\frac{v_b}{\omega_1}\right) = 2\left(\frac{4500 \text{ ft/min}}{10838 \text{ rad/min}}\right)$$

$$= 0.83 \text{ ft} = 9.96 \text{ in}$$

3. ***Seleccione una polea de inventario***

La elección de una polea impulsora de 10.20 in de la tabla 11.1 produce una velocidad de:

$$v_b = \frac{d_1}{2}\omega_1 = \frac{10.20 \text{ in}}{2}(10838 \text{ rad/min}) = 55274 \text{ in/min} = 4606 \text{ fpm}$$

4. ***Elija una polea impulsada de inventario***

Partiendo de la ecuación (11.8), la razón de velocidad deseada se determina por:

$$VR = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10838 \text{ rad/min}}{3770 \text{ rad/min}} = 2.87$$

El diámetro resultante de la polea impulsada se calcula como:

$$d_2 = (VR)(d_1) = 2.87(10.2 \text{ in}) = 29.3 \text{ in}$$

Se elige la polea de inventario más cercana de 27.9 in. Replanteando la ecuación (11.8), la velocidad real de la esmeriladora es

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 d_1}{d_2} = \frac{(1725 \text{ rpm})(10.2 \text{ in})}{27.9 \text{ in}} = 630 \text{ rpm}$$

5. ***Seleccione una correa disponible***

La distancia entre centros recomendada para transmisiones de correa está dentro del siguiente rango:

$$d_2 < C < 3(d_1 + d_2)$$

$$27.9 \text{ in} < C < 114.3 \text{ in}$$

Se selecciona tentativamente el valor medio de 72 in. Al sustituir en la ecuación (11.1),

$$L = 2C + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4C}$$

$$= 2(72\text{ in}) + \frac{\pi}{2}(27.9 + 10.2) + \frac{(27.9 - 10.2)^2}{4(72)} = 204.9\text{ in}$$

Como se busca una longitud estándar de correa, se elige una de 212 in de la tabla 11.2. Con las ecuaciones (11.3) y (11.4), se calcula la distancia real entre centros requerida.

$$C = \frac{B + \sqrt{B^2 - 32(d_2 - d_1)^2}}{16}$$

$$= \frac{580.2 + \sqrt{(580.2)^2 - 32(27.9 - 10.2)^2}}{16} = 71.98\text{ in}$$

donde

$$B = 4L - 2\pi(d_2 + d_1)$$

$$= 4(204.9) - 2\pi(27.9 + 10.2) = 580.2\text{ in}$$

11.5 CADENAS

Como las correas, las transmisiones de cadena se emplean para transmitir movimiento giratorio y torque de un eje a otro, suave y silenciosamente, así como a bajo costo. Las transmisiones de cadena proporcionan la flexibilidad de una transmisión de correa con la característica de acoplamiento positivo de una transmisión de engranes. Por consiguiente, las transmisiones de cadena están bien adaptadas para aplicaciones con distancias grandes entre los ejes, baja velocidad y torques grandes.

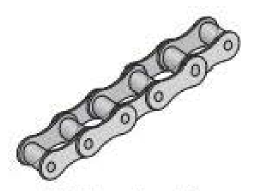
Comparadas con otras formas de transmisión de potencia, las transmisiones de cadena tienen las siguientes ventajas:

- Son menos costosas que las transmisiones de engranes.
- No sufren deslizamiento, como las correas, y brindan una transmisión de potencia más eficiente.
- Tienen distancias flexibles entre los centros de los ejes, mientras que en las transmisiones de engrane tales distancias están restringidas.
- Son más eficientes a bajas velocidades que las correas.
- Sus cargas sobre los cojinetes de los ejes son más pequeñas, porque no se requiere tensión inicial, como en el caso de las correas.
- Ofrecen una mayor vida útil y no se deterioran con el calor, el aceite o la antigüedad, como sucede con las correas.
- Requieren poco ajuste, mientras que las correas necesitan ajustes frecuentes.

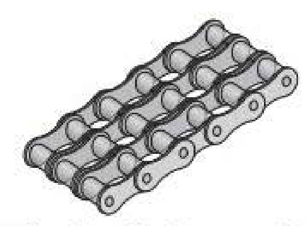
11.5.1 Tipos de cadenas

Las cadenas están hechas de una serie de eslabones interconectados. Comercialmente, hay muchos tipos de diseño de cadenas, que se listan a continuación.

1. En la figura 11.8a se muestra una *cadena de rodillos*. Es el tipo más común de cadena que sirve para transmitir potencia. Las cadenas más grandes de rodillos tienen una potencia nominal de más de 600 hp. El diseño de una cadena de rodillos brinda una operación silenciosa y eficiente, pero debe lubricarse.
2. En la figura 11.8b se ilustra una *cadena de rodillos de tramos múltiples*. Este diseño utiliza múltiples cadenas estándar de rodillos construidas en tramos paralelos, lo cual incrementa la capacidad de potencia de la transmisión de cadena.



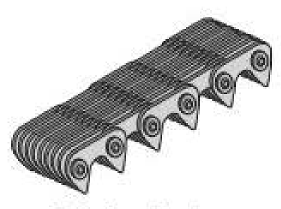
a) Cadena de rodillos



b) Cadena de rodillos de tramos múltiples



c) Cadena de rodillos con barra lateral descentrada



d) Cadena silenciosa

FIGURA 11.8 Tipos de cadenas.

3. En la figura 11.8c se ilustra una *cadena de rodillos con barra lateral descentrada*. Es menos costosa que una cadena de rodillos, pero tiene ligeramente menor capacidad de potencia. También muestra una construcción abierta que le permite soportar suciedad y contaminantes, los cuales suelen desgastar otras cadenas. Tales cadenas se usan con frecuencia en equipo de construcción.
4. La figura 11.8d presenta una *cadena silenciosa de diente invertido*. Es la cadena más costosa de fabricar y se utiliza eficientemente en aplicaciones que requieren alta velocidad, suavidad y transmisión de potencia silenciosa. Se necesita lubricación para mantener las cadenas en operación confiable. Son comunes en máquinas herramientas, bombas y unidades de transmisión de potencia.

11.5.2 Paso de cadena

Algunas organizaciones técnicas tienen estándares (p.ej. el estándar ANSI B29-1) para el diseño y las dimensiones de cadenas de transmisión de potencia para permitir los intercambios. Las cadenas de rodillos se clasifican por el *paso p*, que es la distancia entre los pernos que unen los eslabones adyacentes. En la figura 11.9 se muestra el paso. Las cadenas de rodillos tienen denominaciones del tamaño que van de 25 a 240. La denominación del tamaño se refiere al paso de la cadena, en ochentavos de pulgada, de modo que una cadena 120 tiene un paso de 120/80 o $1\frac{1}{2}$ in. Las cadenas

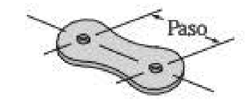


FIGURA 11.9 Paso de una cadena.

con pasos más grandes ofrecen mayor capacidad de potencia. La selección del paso de una cadena de rodillos depende tanto de la potencia transmitida como de la velocidad del sistema. En la figura 11.10 se ilustra una guía general para la selección del paso adecuado de una cadena. Los catálogos de los fabricantes señalan procedimientos detallados para elegir las transmisiones de cadena más adecuadas, con base en un estudio detallado de la aplicación y los requerimientos de transmisión de potencia.

11.5.3 Cadenas multitramos

De modo parecido a las correas, las cadenas multitramos sirven para incrementar la cantidad de potencia transmitida por la transmisión de cadena. Sin embargo, una cadena multitramo no proporciona un múltiplo exacto de la capacidad de un tramo individual. Cuando la transmisión de cadena requiere tramos múltiples, se utiliza la ecuación (11.9) para calcular la potencia transmitida a través de cada cadena. Se ha determinado experimentalmente un factor multitramo, que se tabula en la tabla 11.4.

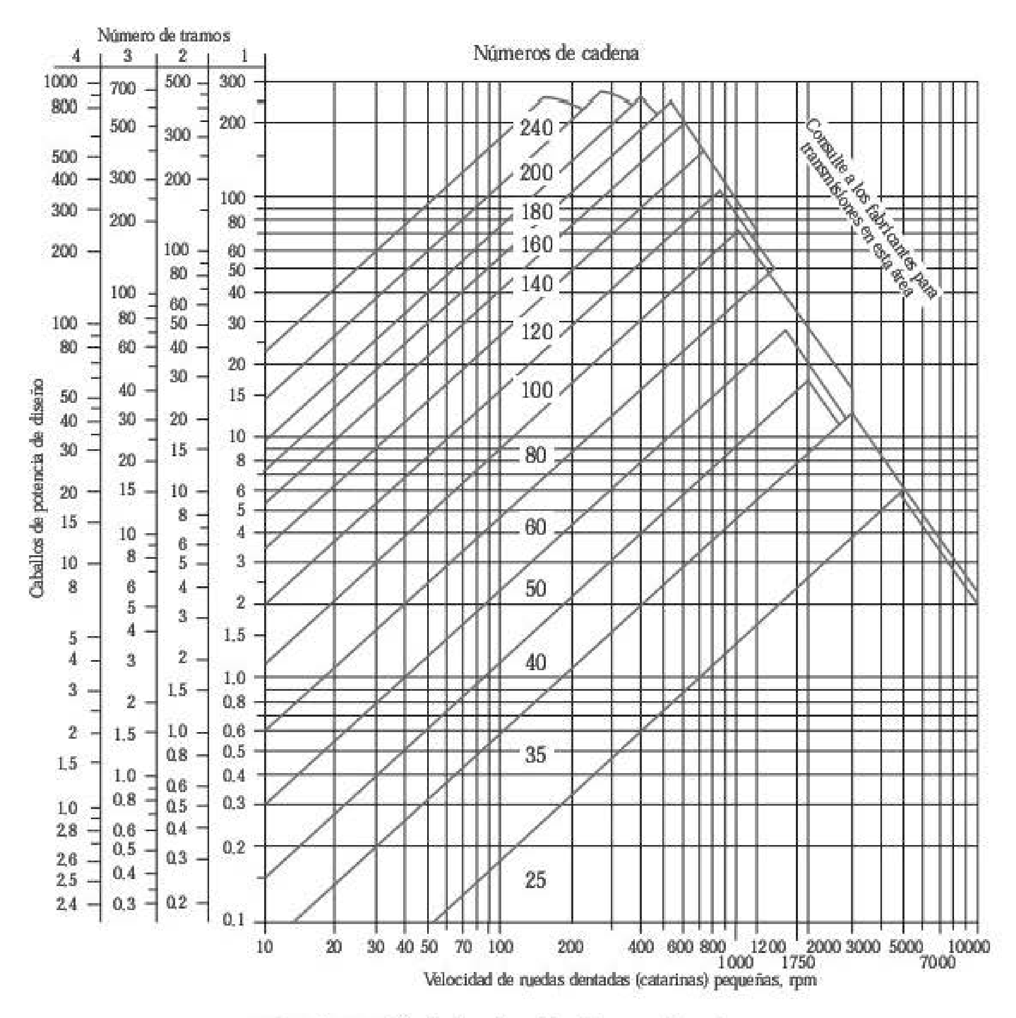


FIGURA 11.10 Guía de selección del paso de cadena.

TABLA 11.4 Factor multitramo

Número de tramos de la cadena de rodillos	2	3	4	5	6	8	10
Factor multitramo	1.7	2.5	3.3	3.9	4.6	6.2	7.5

$$\text{Potencia por tramo de la cadena} = \frac{\text{potencia total transmitida}}{\text{factor multitramo}} \quad \textbf{(11.9)}$$

El eje vertical de la figura 11.10 corresponde a la capacidad de potencia con base en el número de tramos. La ecuación 11.9 ya lo tenía implementado cuando se generó la figura 11.10.

11.5.4 Ruedas dentadas (catarinas)

Las *ruedas dentadas* son ruedas con dientes unidas al eje y se acoplan con la cadena. Los dientes de la rueda dentada se diseñan con una geometría para ajustarse al perno y al eslabón de la cadena. La forma de los dientes varía según el tamaño de la cadena y el número de dientes. En la figura 11.11 se muestra una rueda dentada diseñada para acoplarse con una cadena de rodillos.

Las ruedas dentadas se identifican por lo general mediante el tamaño correspondiente de la cadena y el número de dientes. En la tabla 11.5 se listan las ruedas dentadas comercialmente disponibles. Como en los engranes y las poleas, el diámetro de paso es una propiedad cinemática importante. El diámetro de paso es el diámetro que pasa a través de la mitad de los dientes de la rueda dentada, el cual corresponde con la línea central de la cadena. Se determina a partir del tamaño de la cadena y del número de dientes, tal como se indica en la siguiente sección.

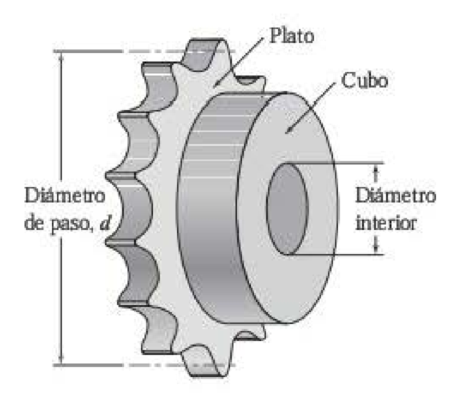


FIGURA 11.11 Rueda dentada de una cadena de rodillos.

11.6 GEOMETRÍA DE UNA TRANSMISIÓN DE CADENA

La geometría básica de una transmisión de cadena es prácticamente idéntica a la de una transmisión de correa, como se indica en la figura 11.12.

El *número de dientes N* de la rueda dentada es por lo general una propiedad de referencia. Se suele recomendar que las ruedas dentadas tengan por lo menos 17 dientes, a menos que operen a velocidades muy bajas: por debajo de 100 rpm. Desde luego, un mayor número de dientes resultará en una rueda dentada más grande. La rueda dentada más grande no debería tener comúnmente más de 120 dientes.

Como ya se mencionó, el *diámetro de paso d* de una rueda dentada se mide en el punto sobre los dientes donde se mueve el centro de la cadena. Este es ligeramente más pequeño que el

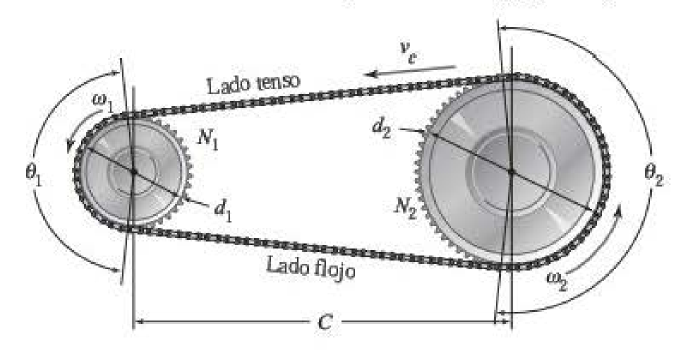


FIGURA 11.12 Geometría de la transmisión de cadena.

TABLA 11.5 Ruedas dentadas de un tramo simple disponibles comercialmente

Tamaño de la cadena	Número de dientes de la rueda dentada
25	8 a 30, 32, 34, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
35	4 a 45, 48, 52, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
40	8 a 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
50	8 a 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
60	8 a 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
80	8 a 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 78, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
100	8 a 60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 74, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
120	9 a 45, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 57, 60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 96, 102, 112, 120
140	9 a 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 96
160	8 a 30, 32 a 36, 38, 40, 45, 46, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 73, 80, 84, 96
180	13 a 25, 28, 35, 39, 40, 45, 54, 60
200	9 a 30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 51, 54, 56, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 68, 70, 72
240	9 a 30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 52, 54, 60

diámetro exterior de la rueda dentada. Note que los diámetros mostrados de las ruedas en la figura 11.11 son los diámetros de paso. El diámetro de paso de una rueda dentada con N dientes para una cadena con un diámetro de paso p se determina por

$$d = \frac{p}{\text{sen}\,(180°/N)} \qquad (11.10)$$

La *distancia entre centros* C es la distancia entre el centro de la rueda dentada impulsora y la rueda dentada impulsada. Desde luego, esta también es la distancia entre los dos ejes acoplados por la transmisión de cadena. En aplicaciones típicas, la distancia entre centros debería estar en el siguiente rango:

$$30p < C < 50p$$

La *longitud de cadena* es la longitud total de la cadena. Como la cadena está formada por eslabones interconectados, la longitud de la cadena debe ser un múltiplo entero del paso. Es preferible tener un número impar de dientes en la rueda dentada impulsora (17, 19, etc.) y un número par de pasos (eslabones) en la cadena para evitar un eslabón especial. La longitud de la cadena L, expresada en el número de eslabones o pasos, se calcula como:

$$L = \frac{2C}{p} + \frac{(N_2 + N_1)}{2} + \left\{\frac{p(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2 C}\right\} \qquad (11.11)$$

La distancia entre centros para una longitud de cadena determinada se calcula como:

$$C = \frac{p}{4}\left[L - \frac{(N_2 + N_1)}{2} + \sqrt{\left\{L - \frac{(N_2 + N_1)}{2}\right\}^2 - \frac{8(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2}}\right] \qquad (11.12)$$

Se debería decir nuevamente que la longitud de la cadena L en la ecuación (11.12) tiene que plantearse en número de eslabones.

El *ángulo de contacto* θ es la medida del acoplamiento angular de la cadena en cada diente. Se calcula como:

$$\theta_1 = 180° - 2\,\text{sen}^{-1}\left\{\frac{p(N_2 - N_1)}{2C}\right\} \qquad (11.13)$$

$$\theta_2 = 180° + 2\,\text{sen}^{-1}\left\{\frac{p(N_2 - N_1)}{2C}\right\} \qquad (11.14)$$

Los fabricantes de cadenas recomiendan mantener el ángulo de contacto por arriba de 120° cuando sea posible.

Finalmente, cuando operan, las cadenas tienen un lado tenso y un lado flojo. En la mayoría de aplicaciones, las transmisiones de cadena se deberían diseñar de modo que el lado flojo quede en la parte inferior. Ya que la dirección del giro del eje y a las posiciones relativas de los ejes impulsor e impulsado, la configuración de la figura 11.12 tiene el lado flojo en la parte inferior.

11.7 CINEMÁTICA DE LA TRANSMISIÓN DE CADENA

De nuevo, la *razón de velocidad VR* se define como la velocidad angular de la rueda dentada impulsora (rueda 1) dividida entre la velocidad angular de la rueda dentada impulsada (rueda 2). Con el uso de las mismas deducciones de las transmisiones de engrane y de correa, la razón de velocidad es:

$$VR = \frac{\omega_{\text{impulsora}}}{\omega_{\text{impulsada}}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (11.15)$$

Como una razón es válida independientemente de las unidades, la razón de velocidad se define en términos de revoluciones por minuto, radianes por unidad de tiempo o cualquier otro grupo conveniente de unidades de velocidad angular. Muchas aplicaciones industriales necesitan cadenas para reducir la velocidad de una fuente de potencia. Por lo tanto, es normal tener razones de velocidad mayores que 1. Como se observa en la ecuación (11.15), esto indica que la rueda dentada impulsora gira más rápido que la rueda impulsada, lo cual es el caso en las reducciones de velocidad.

Como en las correas, la velocidad lineal de una cadena, o *velocidad de cadena*, se define como v_c. La magnitud de esta velocidad corresponde a la magnitud de la velocidad lineal de un punto sobre el diámetro de paso de cada rueda. Como la velocidad de una correa, la velocidad de una cadena se calcula como:

$$v_c = \frac{d_1}{2}\omega_1 = \frac{d_2}{2}\omega_2 \qquad (11.16)$$

En la ecuación (11.16), las velocidades angulares se deben establecer en radianes por unidad de tiempo.

La lubricación de las cadenas es importante para dar larga vida a la transmisión. Los métodos de lubricación adecuados se determinan principalmente por la velocidad de la cadena. La lubricación recomendada es como sigue:

- Baja velocidad ($v_c < 650$ fpm): lubricación manual, donde el lubricante se aplica periódicamente a los eslabones de la cadena.
- Velocidad moderada ($650 < v_c < 1500$ fpm): baño lubricante, donde la parte inferior de la cadena está sumergida en un baño de lubricante.
- Alta velocidad (1500 fpm $< v_c$): lubricación a chorro, donde una bomba genera un chorro continuo sobre la cadena.

PROBLEMA DE EJEMPLO 11.3

Una transmisión de cadena de rodillos, de un tramo simple, conecta un motor de combustión interna de 10 hp a una trituradora de residuos de césped, como se indica en la figura 11.13. Cuando el motor opera a 1200 rpm, los dientes trituradores deberían girar a 240 rpm. La rueda impulsora tiene 18 dientes. Determine el paso adecuado de la cadena, el número de dientes de la rueda impulsada, los diámetros de paso de ambas ruedas y la velocidad de la cadena. Indique también el número de eslabones de una cadena razonable y especifique la distancia entre centros requerida.

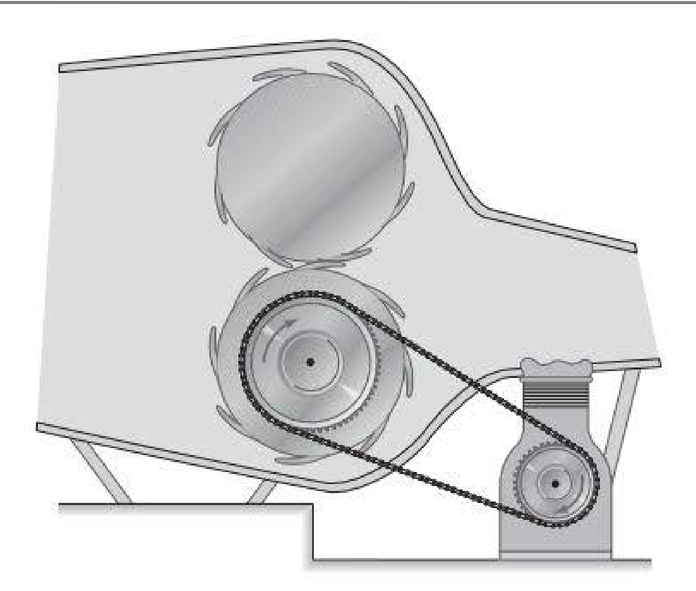


FIGURA 11.13 Trituradora del problema de ejemplo 11.3.

SOLUCIÓN:

1. ***Seleccione el paso adecuado de la cadena***

Para el motor de combustión interna de 10 hp que impulsa la rueda dentada a 1200 rpm, la figura 11.10 especifica que una cadena de un solo tramo, con paso igual a 40, es la cadena adecuada.

2. ***Determine el número de dientes de la rueda dentada impulsada***

Replanteando la ecuación (11.15), se calcula el número de dientes necesarios en la rueda dentada impulsada.

$$N_2 = N_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = 18\left\{\frac{1200 \text{ rpm}}{240 \text{ rpm}}\right\} = 90 \text{ dientes}$$

Note en la tabla 11.5 que comercialmente hay una rueda dentada de 90 dientes para una cadena del número 40.

3. ***Calcule el diámetro de paso de las ruedas dentadas***

Una cadena de rodillos del número 40 tiene un paso de:

$$p = \frac{40}{80} = 0.5 \text{ in}$$

De la ecuación (11.10), los diámetros de paso de las ruedas dentadas son:

$$d_1 = \frac{p}{\text{sen}\left(\frac{180°}{N_1}\right)} = \frac{0.5 \text{ in}}{\text{sen}\left(\frac{180°}{18 \text{ dientes}}\right)} = 2.88 \text{ in}$$

$$d_2 = \frac{p}{\text{sen}\left(\frac{180°}{N_2}\right)} = \frac{0.5 \text{ in}}{\text{sen}\left(\frac{180°}{90 \text{ dientes}}\right)} = 14.33 \text{ in}$$

4. ***Determine la velocidad de la cadena***

La velocidad de la cadena se calcula con la ecuación (11.16):

$$\omega_1 = 1200 \text{ rev/min}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 10838 \text{ rad/min}$$

$$v_c = \left(\frac{d_1}{2}\right)\omega_1 = \left(\frac{2.88 \text{ in}}{2}\right)10833 \text{ rad/min} = 15603 \text{ in/min} = 1300 \text{ fpm}$$

Con una velocidad de la cadena igual a 1300 fpm, se recomienda un sistema de baño de lubricante.

5. ***Calcule la distancia adecuada entre centros***

La distancia entre centros sugerida para la transmisión de cadena es

$$30p < C < 50p$$

$$15 \text{ in} < C < 25 \text{ in}$$

Se elige tentativamente un valor medio de 20 in. Si se sustituye en la ecuación (11.11):

$$L = \frac{2C}{P} + \frac{(N_2 + N_1)}{2} + \left\{\frac{p(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2 C}\right\}$$

$$= \frac{2(20\text{ in})}{(0.5\text{ in})} + \frac{(90 + 18)}{2} + \left\{\frac{0.5\text{in}(90 - 18)^2}{4\pi^2(20\text{ in})}\right\} = 137.28\text{ eslabones}$$

Se especifica un número par de eslabones igual a 138. La correspondiente distancia real entre centros se calcula con la ecuación (11.12).

$$C = \frac{p}{4}\left[L - \frac{(N_2 + N_1)}{2} + \sqrt{\left\{L - \frac{(N_2 + N_1)}{2}\right\}^2 - \frac{8(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2}}\right]$$

$$= \frac{(0.5\text{ in})}{4}\left[(138) - \frac{(90 + 18)}{2} + \sqrt{\left\{(138) - \frac{(90 + 18)}{2}\right\}^2 - \frac{8(90 - 18)^2}{4\pi^2}}\right] = 20.187\text{ in}$$

PROBLEMAS

Cinemática de correas

11–1. Un motor que opera a 1725 rpm en sentido horario se acopla a través de una transmisión de correa para hacer girar la manivela de una máquina de coser industrial. El diámetro de la polea del motor es de 3.5 in y la polea de la manivela de la máquina de coser es de 8 in. Determine la velocidad de la polea impulsada y la velocidad de la correa.

11–2. Un motor que opera a 1150 rpm en sentido horario se acopla a través de una transmisión de correa para hacer girar el ventilador industrial de un escape. El diámetro de la polea del motor es de 5 in y el de la polea del ventilador es de 12 in. Determine la velocidad de la polea impulsada y la velocidad de la correa.

11–3. Un motor de combustión interna está acoplado a través de una transmisión de correa para hacer girar un compresor de aire, el cual debe operar a 1200 rpm en sentido horario. El diámetro de la polea del motor es de 4 in y el de la polea del compresor es de 10 in. Determine la velocidad requerida del motor de combustión interna y la velocidad de la correa.

11–4. Un motor que opera a 1125 rpm en sentido antihorario está acoplado a través de una transmisión de correa para hacer girar una prensa taladradora. El diámetro de la polea del motor es de 2.5 in y la polea del vástago del taladro es de 9 in. Determine la velocidad de la polea impulsada y la velocidad de la correa.

11–5. Un motor que opera a 1750 rpm en sentido antihorario está acoplado a través de una transmisión de correa para hacer girar el soplador de un horno de calefacción. El diámetro de la polea del motor es de 6.5 in y la polea del soplador es de 10.5 in. Determine la velocidad de la polea impulsada y la velocidad de la correa.

11–6. Un motor de combustión interna está acoplado a través de una transmisión de correa para hacer girar un generador, el cual debe girar a 1800 rpm en sentido antihorario. El diámetro de la polea del motor es de 6 in y el de la polea del generador es de 9 in. Determine la velocidad requerida de la polea del motor de combustión interna y la velocidad de la correa.

Geometría de una transmisión de correa

11–7. Dos poleas tienen diámetros de 3.5 in y 8 in, mientras la distancia entre centros es de 23 in. Compare la distancia entre centros con el rango ideal y determine la longitud correspondiente de la correa. Calcule, asimismo, el ángulo de contacto de la polea más pequeña.

11–8. Dos poleas tienen diámetros de 5 y 12 in. Determine la distancia entre centros de la transmisión, al utilizar una correa de 72 in, luego compare la distancia entre centros con el rango ideal. Determine también el ángulo de contacto de la polea más pequeña.

11–9. Dos poleas tienen diámetros de 8 y 12 in. Determine la distancia entre centros de la transmisión al utilizar una correa de 88 in, luego compare la distancia entre centros con el rango ideal. Determine, asimismo, el ángulo de contacto de la polea más pequeña.

11–10. Dos poleas tienen diámetros de 8 y 24 in. Determine la distancia entre centros de la transmisión al utilizar una correa de 104 in, luego compare la distancia entre centros con el rango ideal. Determine también el ángulo de contacto de la polea más pequeña.

Selección de una transmisión de correa

11–11. Mediante una transmisión de correa, se desea acoplar un motor con un mezclador para procesar jarabe de maíz. El motor eléctrico de 10 hp tiene una velocidad nominal de 3550 rpm y el mezclador debe operar tan cerca de 900 rpm como sea posible. Seleccione el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la correa comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule, asimismo, la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

11–12. Mediante una transmisión de correa se desea acoplar un motor con un mezclador para procesar jarabe de maíz. El motor eléctrico de 25 hp tiene una velocidad nominal de 950 rpm y el mezclador debe operar tan cerca de 250 rpm como sea posible. Elija el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la banda comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule también la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

11–13. Mediante una transmisión de correa se desea acoplar un motor con un transportador. El motor eléctrico de 5 hp

tiene una velocidad nominal de 1150 rpm y el eje impulsor del transportador debe operar tan cerca de 250 rpm como sea posible. Seleccione el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la banda comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule, asimismo, la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

11–14. Mediante una transmisión de correa se desea acoplar un motor de combustión interna con el eje de la cuchilla de una podadora de césped comercial. El motor de 10 hp tiene una velocidad nominal de 2000 rpm y el eje de la cuchilla debe operar tan cerca de 540 rpm como sea posible. Elija el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la banda comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule también la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

11–15. Mediante una transmisión de correa, se desea acoplar un motor de combustión interna con el sistema de transmisión de una motonieve. El motor de 70 hp funciona a 3000 rpm y el eje de transmisión debe operar tan cerca de 750 rpm como sea posible. Seleccione el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la banda comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule, asimismo, la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

11–16. Mediante una transmisión de correa, se desea acoplar un motor eléctrico con el cabezal de un torno. El motor eléctrico de 2 hp opera a 200 rpm y el cabezal debe funcionar tan cerca de 60 rpm como sea posible. Elija el tamaño adecuado de la correa, las poleas y la banda comercialmente disponibles para esta aplicación. Calcule también la velocidad real de la correa y la distancia entre centros.

Cinemática de una cadena

11–17. El eje de una caja de transmisión de engranes está acoplada a través de una transmisión de cadena del número 60, mientras hace girar una mezcladora de concreto a 180 rpm en sentido horario. La rueda dentada impulsora tiene 19 dientes y la rueda dentada de la mezcladora tiene 84. Determine la velocidad de la rueda dentada impulsora, la velocidad de la cadena y el método de lubricación recomendado.

11–18. Un motor de engranes, que opera a 220 rpm en sentido horario, está acoplado a un agitador de líquidos mediante una transmisión de cadena del número 40. La rueda dentada impulsora tiene 19 dientes y la rueda dentada del agitador tiene 50. Determine la velocidad de la rueda dentada impulsada, la velocidad de la cadena y el método de lubricación recomendado.

11–19. Un motor de engranes, que opera a 180 rpm en sentido horario, está acoplado a una escaladora mediante una transmisión de cadena del número 80. La rueda dentada impulsora tiene 27 dientes y la rueda dentada del escalador tiene 68. Determine la velocidad de la rueda dentada impulsada, la velocidad de la cadena y el método de lubricación recomendado.

11–20. El eje de una caja de transmisión de engranes está acoplada a través de una transmisión de cadena del número 100, por lo que hace girar al eje de un aplastador de pulpa en una planta productora de papel. El eje del aplastador gira a 250 rpm en sentido horario. La rueda dentada impulsora tiene 25 dientes y la rueda dentada del aplastador tiene 76. Determine la velocidad de la rueda dentada impulsora, la velocidad de la cadena y el método de lubricación recomendado.

Geometría de una transmisión de cadena

11–21. Dos ruedas dentadas para una cadena del número 60 tienen 17 y 56 dientes. La cadena tiene 120 eslabones. Determine el diámetro de paso de cada rueda dentada, su distancia entre centros y el ángulo de contacto de la rueda dentada más pequeña. También compare la distancia entre centros con el rango ideal.

11–22. Dos ruedas dentadas para una cadena del número 80 tienen 19 y 64 dientes. La cadena tiene 140 eslabones. Determine el diámetro de paso de cada rueda dentada, su distancia entre centros y el ángulo de contacto de la rueda dentada más pequeña. También compare la distancia entre centros con el rango ideal.

11–23. Dos ruedas dentadas para una cadena del número 40 tienen 21 y 84 dientes. La cadena tiene 200 eslabones. Determine el diámetro de paso de cada rueda dentada, su distancia entre centros y el ángulo de contacto de la rueda dentada más pequeña. También compare la distancia entre centros con el rango ideal.

11–24. Dos ruedas dentadas para una cadena del número 120 tienen 25 y 72 dientes. La cadena tiene 150 eslabones. Determine el diámetro de paso de cada rueda dentada, su distancia entre centros y el ángulo de contacto de la rueda dentada más pequeña. También compare la distancia entre centros con el rango ideal.

Selección de una transmisión de cadena

11–25. Se desea acoplar un motor de engranes al cubo de un elevador, a través de una transmisión de cadena. El motor de engranes de 40 hp operará a 350 rpm y la transmisión del elevador debe funcionar tan cerca de 60 rpm como sea posible. Seleccione el tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

11–26. Se desea una transmisión de cadena en un recolector de maíz para acoplar un motor hidráulico con un eje impulsor. El motor de 30 hp operará a 550 rpm y el eje impulsor debe funcionar tan cerca de 100 rpm como sea posible. Seleccione un tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

11–27. Se desea una transmisión de cadena para acoplar un motor de gasolina y la caja de transmisión con las ruedas impulsoras de un vehículo todo terreno. Cuando el sistema motor/transmisión de 130 hp funcione a 600 rpm, el eje impulsor debe operar tan cerca de 140 rpm como sea posible. Seleccione un tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

11–28. Se desea una transmisión de cadena para acoplar un motor de engranes con la transmisión de tornillo de una prensa. El motor de engranes de 50 hp operará a 600 rpm y la transmisión de tornillo debe funcionar tan cerca de 100 rpm como sea posible. Seleccione un tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

11–29. Se desea una transmisión de cadena para acoplar un motor de gasolina y la caja de transmisión con el taladro

de una removedora de nieve. Cuando el sistema motor/caja de transmisión de 8 hp opere a 300 rpm, el taladro debe funcionar tan cerca de 40 rpm como sea posible. Seleccione un tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

11–30. Se desea una transmisión de cadena para acoplar un motor de engranes con un carrusel de almacenamiento de partes. El motor de engranes de 10 hp operará a 425 rpm y la flecha del carrusel debe operar tan cerca de 75 rpm como sea posible. Elija un tamaño adecuado de la cadena, las ruedas dentadas y el número de eslabones de la cadena comercialmente disponibles. Calcule también la velocidad real de la cadena y la distancia entre centros.

ESTUDIOS DE CASO

11–1. El dispositivo mostrado en la figura E11.1 impulsa una rampa que canaliza botellas individuales de bebida gaseosa hacia contenedores de 12 piezas. El perno *C* está sujeto rígidamente a un eslabón de la cadena. El yugo *D* está soldado rígidamente a la varilla *E*, la cual se extiende hacia la rampa (que no se muestra). Examine cuidadosamente los componentes del mecanismo, luego conteste las preguntas siguientes para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

1. Determine el movimiento de la rueda dentada *B*, conforme la rueda dentada *A* impulsa en sentido horario.
2. Especifique el movimiento instantáneo del perno *C*, conforme la rueda dentada *A* impulsa en sentido horario.
3. Especifique el movimiento instantáneo del yugo *D*, conforme la rueda dentada *A* impulsa en sentido horario.
4. ¿Cuánto debe girar la rueda dentada *A* para mover el perno *C* sobre la rueda?
5. ¿Qué le sucede al movimiento de la varilla *E* cuando el perno se mueve sobre la rueda?
6. ¿Qué le sucede a la varilla *E* cuando el perno *C* está sobre la parte superior de la transmisión de cadena?
7. Comente las características del movimiento general de la varilla *E*.

11–2. La polea mostrada en la figura E11.2 impulsa la flecha *A*, la cual a la vez impulsa un cortador de leña (que no se incluye). Observe que la polea se divide en dos mitades, identificadas como *B* y *C*. Las dos mitades están enroscadas en *D*. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo, luego conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

1. Cuando gira el mango *H*, ¿cuál es el movimiento del eje *I*?
2. Cuando gira el mango *H*, ¿cuál es el movimiento de la mitad derecha *C* de la polea?

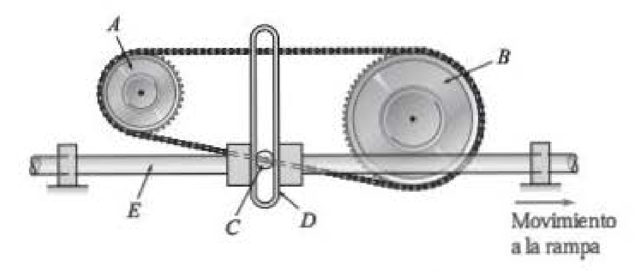


FIGURA E11.1 (Cortesía de Industrial Press).

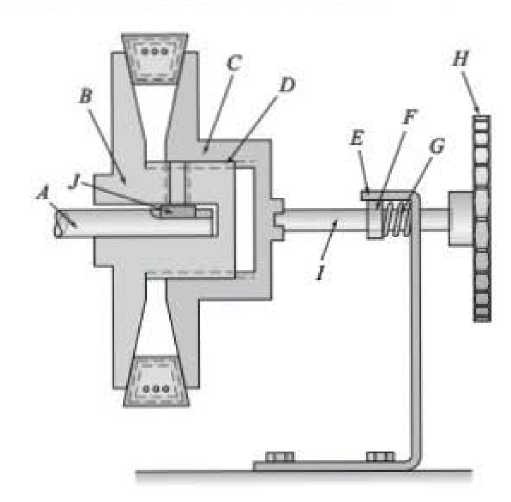


FIGURA E11.2 (Cortesía de Industrial Press).

3. ¿Cuál es el efecto resultante sobre la polea al girar el mango *H*?
4. ¿Qué es la pieza *J* y cuál es su función?
5. ¿Cuál es el propósito de la pieza *F*? ¿Debe ésta permanecer en contacto con la pieza *E*?
6. ¿Qué es la pieza *G* y cuál es su función?
7. ¿Qué nombre daría a este dispositivo?

11–3. La polea mostrada en la figura E11.3 impulsa un mecanismo (que no se incluye) en una máquina que agita latas de pintura. Estas máquinas se usan para mezclar completamente la pintura en el momento de la compra y son comunes en la mayoría de las tiendas de pintura minoristas. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo, luego conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

1. Determine el movimiento de la pieza *D*, conforme la ceja *B* se fuerza hacia arriba hacia la palanca *C*.
2. Determine la acción resultante de la polea *G*, conforme la ceja *B* se fuerza hacia arriba hacia la palanca *C*.
3. Determine la acción resultante del mecanismo agitador de pintura, conforme la ceja *B* se fuerza hacia arriba hacia la palanca *C*.
4. La pieza *A* es la puerta del compartimiento agitador de pintura; comente el propósito de este mecanismo.
5. Comente la razón de tantas muescas, *E*, en la polea *G*.
6. Comente el objetivo del resorte *H*.
7. ¿Qué nombre daría a este dispositivo?

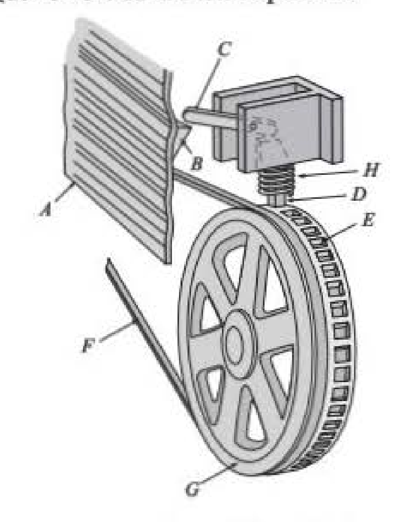


FIGURA E11.3 Mecanismo del estudio de caso 11.3.

MECANISMOS DE TORNILLO

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Describir la operación de un mecanismo de tornillo.**
2. **Familiarizarse con las características de las cuerdas y las formas estándar de estas.**
3. **Conocer la función del tornillo de bolas.**
4. **Determinar si una cuerda es de autobloqueo.**
5. **Calcular el torque requerido para hacer girar un tornillo y la eficiencia de una unión de tornillo.**
6. **Calcular las relaciones cinemáticas de un mecanismo de tornillo en general.**
7. **Entender la operación de un tornillo diferencial y calcular sus relaciones cinemáticas.**
8. **Entender la operación de un taladro y calcular sus relaciones cinemáticas.**

12.1 INTRODUCCIÓN

En general, los mecanismos de tornillo están diseñados para convertir movimiento giratorio en movimiento lineal. Considere la barra de un desodorante sólido. Conforme gira la perilla, la barra de desodorante se extiende o se retrae dentro del envase. En el interior del envase gira un tornillo que empuja una tuerca y la barra de desodorante a lo largo de la cuerda. De este modo, se emplea un mecanismo "desechable" de tornillo en el envase del desodorante. El mismo concepto se utiliza generalmente en los gatos mecánicos automotrices, en algunos mecanismos de apertura de puertas, en mecanismos de ajuste en asientos de automóviles y en las mesas de trabajo de las fresadoras.

El objetivo de este capítulo es la determinación de la cinemática y de las fuerzas en un mecanismo de tornillo. Como el movimiento de una tuerca sobre una cuerda es estrictamente lineal, las soluciones gráficas no aportan mayor comprensión. Por lo tanto, solamente las técnicas analíticas son útiles y se presentan en este capítulo.

12.2 CARACTERÍSTICAS DE LAS CUERDAS

Para que un tornillo funcione, debe haber dos partes acopladas: una con cuerda interna y otra con cuerda externa. Las cuerdas externas están superpuestas en la superficie de un eje o un prisionero, como en un perno o en un tornillo. Las cuerdas internas están roscadas en el interior de una pieza, como una carcasa fundida, o más comúnmente, dentro de una tuerca. Siempre que sea posible, se debería elegir una cuerda estándar para mejorar el intercambio en el mantenimiento o la sustitución. Las cuerdas, internas o externas, se clasifican de acuerdo con las siguientes características.

Las dos características más comunes de una cuerda son el paso y el diámetro de paso. El *paso p* es la distancia paralela al eje del tornillo, medida desde un punto sobre un hilo, hasta el punto correspondiente del hilo adyacente. El *diámetro de paso d* es la distancia medida desde el punto medio entre la punta y la raíz del perfil de la cuerda, pasando por la línea del eje, hasta el punto correspondiente del lado opuesto. La figura 12.1 ilustra tales propiedades.

Otras propiedades de la cuerda de un tornillo (figura 12.1) incluyen el *diámetro mayor*, el *diámetro menor*, el *ángulo de avance* y el *ángulo incluido*. En el sistema tradicional estadounidense, es más común usar el número de *cuerdas por pulgada n*, a lo largo de la longitud del tornillo, que el paso. El valor de los hilos por pulgada está relacionado con el paso mediante la siguiente ecuación:

$$n = \frac{1}{p} \tag{12.1}$$

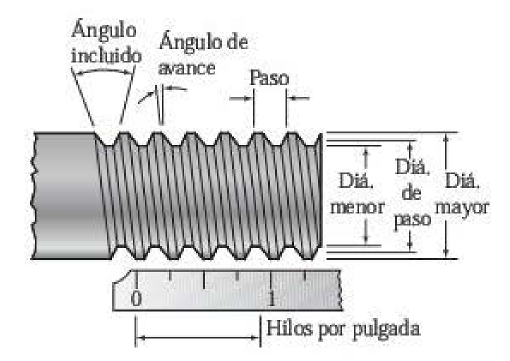


FIGURA 12.1 Perfil de una cuerda.

12.3 FORMAS DE CUERDA

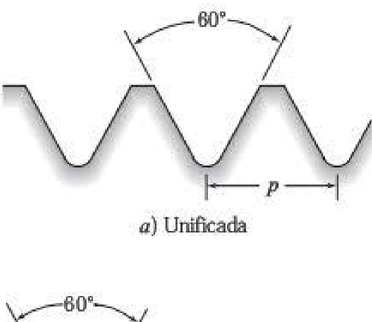
La forma del hilo define la forma de la cuerda. Las características de la cuerda presentadas en la sección anterior corresponden a una forma de cuerda unificada. No obstante, esas definiciones son aplicables a todas las formas de cuerdas. Las formas de cuerda más populares incluyen la unificada, la métrica, la cuadrada y la ACME.

12.3.1 Cuerdas unificadas

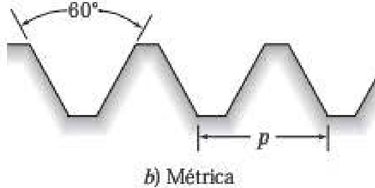
Las *cuerdas unificadas* son las cuerdas más comunes que se emplean en sujetadores y mecanismos pequeños. También se utilizan generalmente en mecanismos de posicionamiento. La figura 12.2a ilustra el perfil de una cuerda unificada, la cual se presenta como un diente triangular puntiagudo. Las dimensiones de una cuerda unificada se han estandarizado y se observan en la tabla 12.1. Las cuerdas unificadas se denominan como de paso grueso (UNC) o de paso fino (UNF).

Una cuerda unificada estándar se especifica por tamaño, hilos por pulgada, y paso fino o paso grueso. Las denominaciones de cuerdas estándar se presentan como:

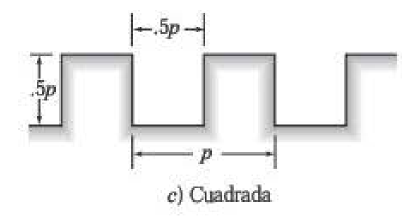
10–32 UNF
1/2–13 UNC



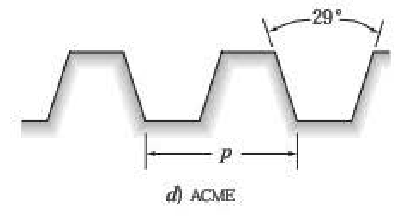
a) Unificada



b) Métrica



c) Cuadrada



d) ACME

FIGURA 12.2 Formas de cuerda.

12.3.2 Cuerdas métricas

Las *cuerdas de forma métrica* también están definidas como formas triangulares y puntiagudas, pero con la raíz plana. Sin embargo, las dimensiones estándar son valores métricos convenientes y supervisados por la Organización Internacional de Estandarización (ISO, por las siglas de International Organization for Standarization). La forma de esta cuerda se presenta en la figura 12.2b. Las dimensiones estándar de la cuerda métrica se observan en la tabla 12.2.

Una cuerda métrica estándar se especifica con la denominación métrica "M", el diámetro nominal mayor y el paso. La denominación de la cuerda estándar se presenta como:

M10 × 1.5

12.3.3 Cuerdas cuadradas

Las *cuerdas cuadradas*, como su nombre lo indica, son cuerdas cuadradas y planas en la parte superior. Son resistentes y se diseñaron originalmente para transmitir potencia. En la figura 12.2c se muestra una cuerda de forma cuadrada. Aun cuando transmiten con eficiencia cargas grandes, estas cuerdas son difíciles de maquinar por sus lados perpendiculares. En general, las cuerdas ACME han sustituido las cuerdas cuadradas.

12.3.4 Cuerdas ACME

Las *cuerdas ACME* son parecidas a las cuerdas cuadradas, pero con lados inclinados. Se usan generalmente cuando se requieren movimientos rápidos o la transmisión de fuerzas grandes. En la figura 12.2d se ilustra una cuerda ACME. Las dimensiones estándar de la cuerda ACME de un tornillo se listan en la tabla 12.3. Esta cuerda es la forma más usual utilizada en mecanismos de tornillo en máquinas industriales. Sus ventajas son un costo bajo y fácil manufactura. Sus desventajas son una eficiencia baja, como se verá más adelante, y la dificultad para determinar su vida útil.

12.4 TORNILLOS DE BOLAS

Los tornillos de bolas están diseñados también para convertir el movimiento giratorio del tornillo o la tuerca en movimiento lineal relativamente lento, del miembro acoplado, a lo largo del eje del tornillo. No obstante, un tornillo de bolas tiene, por mucho, menos fricción que un tornillo de configuración tradicional. El contacto de deslizamiento entre el tornillo y la tuerca se ha sustituido por contacto de rodamiento de las bolas en las ranuras a lo largo del tornillo. Por consiguiente, un tornillo de bolas requiere menos potencia para impulsar una carga. En la figura 12.3 se observa un tornillo de bolas.

La operación de un tornillo de bolas es suave porque el rodamiento de las bolas elimina el movimiento de "deslizamiento de la cuña", causado por la fricción de un tornillo y la tuerca tradicionales. Sin embargo, debido a la baja fricción de un tornillo de bolas, se suele usar un freno para mantener la carga en su lugar.

La cinemática de un tornillo de bolas es idéntica a la de un tornillo tradicional, de manera que no hay diferencia cuando se realiza su análisis cinemático. Los conceptos siguientes se aplican tanto a tornillos tradicionales como a tornillos de bolas.

12.5 AVANCE

En la determinación del movimiento de un mecanismo de tornillo, el avance del tornillo es un parámetro crítico y debe entenderse. El *avance* L es la distancia que viaja la tuerca a lo largo del eje del tornillo con una revolución del tornillo. En la mayoría de los tornillos, el avance es igual al paso. No obstante, los tornillos se fabrican con una o dos cuerdas. Entonces, el *número de cuerdas* N_t superpuestas en un tornillo es una propiedad importante. En la figura 12.4 se ilustra el concepto de cuerdas múltiples superpuestas en un tornillo.

TABLA 12.1 Dimensiones estándar de una cuerda unificada

		Cuerdas gruesas			Cuerdas finas		
Tamaño	Diámetro mayor nominal (in)	Hilos por pulgada, n	Paso (in) $p = \frac{1}{n}$	Diámetro nominal de paso (in)	Hilos por pulgada, n	Paso (in) $p = \frac{1}{n}$	Diámetro de paso nominal (in)
0	0.0600	—	—	—	80	0.0125	0.0519
1	0.0730	64	0.0156	0.0629	72	0.0139	0.0640
2	0.0860	56	0.0179	0.0744	64	0.0156	0.0759
3	0.0990	48	0.0208	0.0855	56	0.0179	0.0874
4	0.1120	40	0.0250	0.0958	48	0.0208	0.0985
5	0.1250	40	0.0250	0.1088	44	0.0227	0.1102
6	0.1380	32	0.0313	0.1177	40	0.0250	0.1218
8	0.1640	32	0.0313	0.1437	36	0.0278	0.1460
10	0.1900	24	0.0417	0.1629	32	0.0313	0.1697
12	0.2160	24	0.0417	0.1889	28	0.0357	0.1928
1/4	0.2500	20	0.0500	0.2175	28	0.0357	0.2268
5/16	0.3125	18	0.0556	0.2764	24	0.0417	0.2854
3/8	0.3750	16	0.0625	0.3344	24	0.0417	0.3479
7/16	0.4375	14	0.0714	0.3911	20	0.0500	0.4050
1/2	0.5000	13	0.0769	0.4500	20	0.0500	0.4675
9/16	0.5625	12	0.0833	0.5084	18	0.0556	0.5264
5/8	0.6250	11	0.0909	0.5660	18	0.0556	0.5889
3/4	0.7500	10	0.1000	0.6850	16	0.0625	0.7094
7/8	0.8750	9	0.1111	0.8028	14	0.0714	0.8286
1	1.0000	8	0.1250	0.9188	12	0.0833	0.9459
1 1/4	1.2500	7	0.1429	1.1572	12	0.0833	1.1959
1 1/2	1.5000	6	0.1667	1.3917	12	0.0833	1.4459
1 3/4	1.7500	5	0.2000	1.6201	—	—	—
2	2.0000	4 1/2	0.2222	1.8557	—	—	—

El avance se calcula como:

$$L = N_t p \qquad (12.2)$$

En la figura 12.1 se muestra el *ángulo de avance* λ y se define como el ángulo de inclinación de las cuerdas. Se calcula a partir de relaciones trigonométricas con otras características del tornillo.

$$\tan\lambda = \frac{N_t p}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \qquad (12.3)$$

Cuando la cuerda de un tornillo es muy pronunciada y tiene ángulos de avance grandes, puede ser grande el torque requerido para empujar una carga a lo largo del tornillo. Los tornillos típicos tienen ángulos de avance que van aproximadamente de 2° a 6°. Además, los ángulos de avance pequeños evitan que una carga se "deslice hacia abajo del tornillo" por la gravedad. La fuerza de fricción y la escasa inclinación de la cuerda se combinan para mantener la carga en su lugar. Esto se conoce como autobloqueo y es deseable en dispositivos levadizos. Por ejemplo, el gato mecánico de un automóvil requiere que la carga se mantenga a cierta altura, incluso cuando la fuente de potencia cesa. Cuando la cuerda es de autobloqueo, la carga se bloquea en cierta posición vertical. Esta característica de frenado se usa en varios dispositivos mecánicos, pero se deben analizar la resistencia de la cuerda y la fuerza de fricción para garantizar la seguridad. Matemáticamente, la condición que se debe cumplir para obtener el autobloqueo es:

$$\mu > \tan\lambda \qquad (12.4)$$

En la ecuación 12.4, μ es el coeficiente de fricción de la interfase tuerca-cuerda. En cuerdas tradicionales, los valores comunes del coeficiente de fricción son:

$\mu = 0.10$ para superficies muy lisas, bien lubricadas

$\mu = 0.15$ para tornillos con maquinado normal, con superficies bien lubricadas

$\mu = 0.20$ para tornillos con maquinado normal, con superficies ordinarias

Los tratamientos superficiales especiales y los recubrimientos suelen reducir estos valores, por lo menos, a la mitad. Los tornillos de bolas, con baja fricción intrínseca, prácticamente nunca se autobloquean.

12.6 CINEMÁTICA DE TORNILLOS

Desde un punto de vista cinemático, la unión de tornillo une dos cuerpos y los acopla con dos grados de libertad. Generalmente,

TABLA 12.2 Dimensiones estándar de una cuerda métrica

	Cuerdas gruesas		Cuerdas finas	
Diámetro mayor nominal (mm)	Paso (mm) $p = \frac{1}{n}$	Diámetro de paso nominal (mm)	Paso (mm) $p = \frac{1}{n}$	Diámetro de paso nominal (mm)
1	0.25	0.84	—	—
1.6	0.35	1.37	0.20	1.47
2	0.40	1.74	0.25	1.84
2.5	0.45	2.20	0.35	2.27
3	0.50	2.67	0.35	2.77
4	0.70	3.54	0.50	3.67
5	0.80	4.47	0.50	4.67
6	1.00	5.34	0.75	5.51
8	1.25	7.18	1.00	7.34
10	1.50	9.01	1.25	9.18
12	1.75	10.85	1.25	11.18
16	2.00	14.68	1.50	15.01
20	2.50	18.35	1.50	19.01
24	3.00	22.02	2.00	22.68
30	3.50	27.69	2.00	28.68
36	4.00	33.36	3.00	34.02
42	4.50	39.03	—	—
48	5.00	44.70	—	—

la unión se configura de modo tal que un cuerpo se trasladará con el movimiento de giro del otro cuerpo. Dependiendo de las restricciones de los dos cuerpos, son posibles los siguientes movimientos relativos:

I. *Traslación de la tuerca conforme gira el tornillo:* Sucede cuando el tornillo está impedido para trasladarse y la tuerca no puede girar.

II. *Traslación del tornillo conforme gira la tuerca:* Ocurre cuando la tuerca está impedida para trasladarse y el tornillo no puede girar.

III. *Traslación del tornillo mientras gira:* Sucede cuando la tuerca está completamente impedida para moverse.

IV. *Traslación de la tuerca mientras gira:* Ocurre cuando el tornillo está completamente impedido para moverse.

Independientemente de la configuración real del sistema, el movimiento relativo es el mismo. Un giro específico produce una traslación. Por consiguiente, se han desarrollado ecuaciones para describir el movimiento relativo, en tanto que el movimiento absoluto se determina examinando la configuración real del sistema. Se usa la notación siguiente:

A es la parte que puede girar.

B es la otra parte unida por la unión de tornillo.

Como ya se definió, el avance de un tornillo es la distancia que viaja la tuerca a lo largo del eje del tornillo con una revolución del tornillo. Entonces, la magnitud del desplazamiento de B en relación con A se calcula como:

$$\Delta R_{B/A} = L \Delta \theta_A \qquad (12.5)$$

TABLA 12.3 Dimensiones estándar de una cuerda ACME

Diámetro mayor nominal (in)	Hilos por pulgada, n	Paso (in) $p = \frac{1}{n}$	Diámetro de paso nominal (in)
1/4	16	0.0625	0.2043
5/16	14	0.0714	0.2614
3/8	12	0.0833	0.3161
7/16	12	0.0833	0.3783
1/2	10	0.1000	0.4306
5/8	8	0.125	0.5408
3/4	6	0.1667	0.6424
7/8	6	0.1667	0.7663
1	5	0.2000	0.8726
1 1/8	5	0.2000	0.9967
1 1/4	5	0.2000	1.1210
1 3/8	4	0.2500	1.2188
1 1/2	4	0.2500	1.3429
1 3/4	4	0.2500	1.5916
2	4	0.2500	1.8402
2 1/4	3	0.3333	2.0450
2 1/2	3	0.3333	2.2939
2 3/4	3	0.3333	2.5427
3	2	0.5000	2.7044
3 1/2	2	0.5000	3.2026
4	2	0.5000	3.7008
4 1/2	2	0.5000	4.1991
5	2	0.5000	4.6973

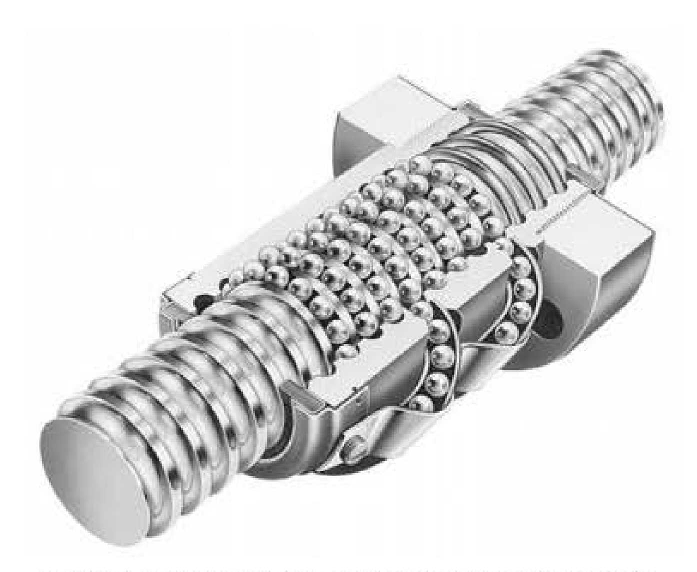


FIGURA 12.3 Tornillo de bolas. (Cortesía de Warner Electric).

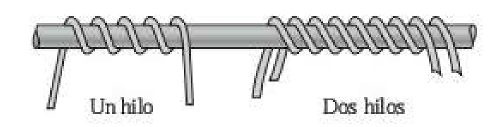


FIGURA 12.4 Concepto de cuerda múltiple.

La diferenciación produce las ecuaciones de la magnitud de la velocidad y de la aceleración.

$$v_{B/A} = L\omega_A \tag{12.6}$$

$$a_{B/A} = L\alpha_A \tag{12.7}$$

Advierta que el avance L se especifica como el desplazamiento relativo por revolución. Por ello, en esta instancia, el movimiento angular se debe especificar en revoluciones, de manera que ω_A tendría que especificarse en revoluciones por minuto (o segundo), y α_A en revoluciones por minuto al cuadrado (o segundo al cuadrado).

La dirección del movimiento relativo depende de la *orientación de la cuerda*. Los tornillos y las tuercas acopladas se clasifican como hacia la derecha o hacia la izquierda. La cuerda derecha es la más común. En esta unión roscada, el tornillo avanza hacia la tuerca cuando el tornillo gira en sentido horario. La cuerda derecha se inclina hacia abajo a la izquierda en una cuerda externa, cuando el eje es horizontal. La inclinación es opuesta en una cuerda interna. Por el contrario, una configuración hacia la izquierda genera el movimiento opuesto.

Los siguientes ejemplos ilustran la determinación de la cinemática de un tornillo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 12.1

En la figura 12.5 se muestra una corredera impulsada por un tornillo, que se utiliza en una máquina de producción que mueve la hoja de una sierra para cortar el material sobrante en una línea de partes fundidas. Un eje roscado con una cuerda ¾-6 ACME mueve la corredera. El tornillo gira a 80 rpm, moviendo la corredera hacia la derecha. Determine la velocidad de la corredera. Calcule asimismo el número de revoluciones para mover la corredera 3.5 in.

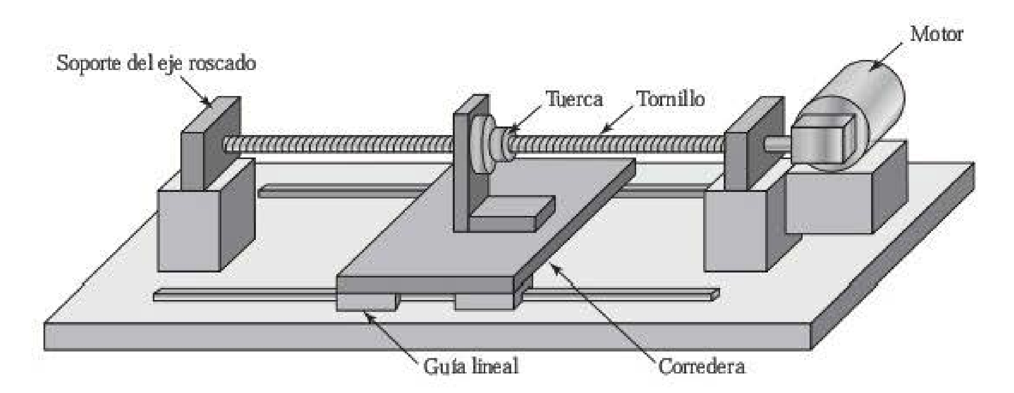


FIGURA 12.5 Corredera del problema de ejemplo 12.1.

SOLUCIÓN:

1. ***Determine el movimiento relativo***

En esta configuración, el motor gira el tornillo sobre los cojinetes, pero los hombros del eje evitan la traslación del tornillo. La tuerca está impedida para la rotación, aunque se le permite la traslación a lo largo de las guías lineales. Este es el caso I previamente descrito. Se usará la siguiente notación:

La parte A es el tornillo.
La parte B es la tuerca.

2. ***Calcule la geometría del tornillo***

Una cuerda ¾-6 ACME de tornillo tiene las siguientes propiedades:

Número de hilos: $N_t = 1$ hilo/rev
Número de hilos por pulgada: $n = 6$

Paso: $p = \frac{1}{n} = \frac{1}{6} = 0.167$ in/hilo

Avance: $L = N_t\, p = 0.167$ in/rev

3. ***Determine el desplazamiento del tornillo***

El desplazamiento angular del tornillo para producir un desplazamiento lineal de 3.5 in de la tuerca y la corredera se calcula replanteando la ecuación (12.5).

$$\Delta\theta_A = \frac{\Delta R_{B/A}}{L} = \frac{3.5 \text{ in}}{0.167 \text{ in/rev}} = 20.96 \text{ rev}$$

En ausencia de mayor información, se supone que esta es una cuerda derecha estándar. Por lo tanto, el tornillo gira en sentido antihorario, visto del extremo derecho, para mover la tuerca a la derecha.

4. ***Calcule la velocidad de la tuerca***

La velocidad lineal de la tuerca se determina con la ecuación (12.6).

$$\mathbf{V}_{B/A} = L\omega_A = (0.167\,\text{in/rev})(80\,\text{rev/min}) = 13.36\,\text{in/min} \rightarrow$$

Como el tornillo está impedido para la traslación, la velocidad calculada es la velocidad absoluta de la tuerca.

PROBLEMA DE EJEMPLO 12.2

En la figura 12.6 se ilustra una prensa operada por un tornillo. El tornillo tiene una cuerda ½ × 10 ACME, con orientación tanto a la derecha como a la izquierda, como se indica. El mango gira en sentido antihorario a 45 rpm, para impulsar la placa de presión hacia abajo. En la posición mostrada, con $\beta = 25°$, determine la velocidad de la placa de presión.

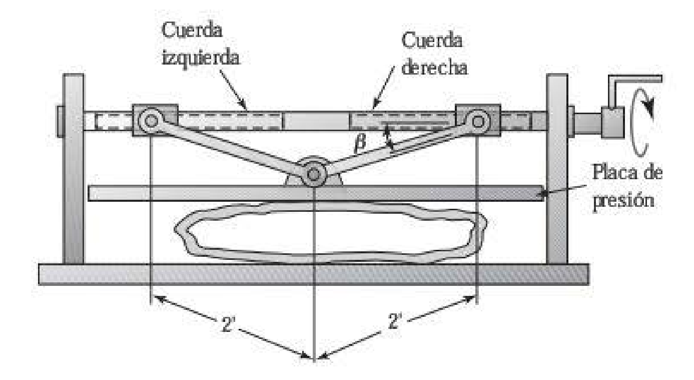


FIGURA 12.6 Prensa del problema de ejemplo 12.2

SOLUCIÓN: 1. ***Liste las propiedades del tornillo***

Una cuerda ½ × 10 ACME tiene las siguientes propiedades:

Número de dientes por pulgada: $n = 10$

Paso: $p = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{10} = 0.10\,\text{in}$

Número de hilos: $N_t = 1$

Avance: $L = N_t\, p = 0.10$ in/rev

2. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

En la figura 12.7 se ilustra el diagrama cinemático de este mecanismo. Al calcular la movilidad de este mecanismo, se identifican cinco eslabones. También existen cinco uniones de perno. Por lo tanto,

$$n = 5 \quad j_p = 5\,(3\,\text{pernos y 2 uniones de corredera}) \quad j_b = 0$$

y

$$M = 3(n-1) - 2j_p - j_b = 3(5-1) - 2(5) - 0 = 12 - 10 = 2$$

Con dos grados de libertad, ambas tuercas se mueven. La configuración del tornillo mostrada en la figura 12.6 impulsa ambas tuercas.

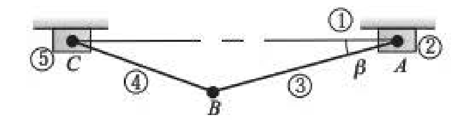


FIGURA 12.7 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 12.2.

3. ***Determine la velocidad de las tuercas***

Observando la figura 12.6, el tornillo es libre de girar pero está impedido para desplazamiento axial. Con las cuerdas en orientaciones opuestas, las dos tuercas se mueven también en direcciones opuestas. Por consiguiente, la velocidad relativa de la tuerca, con respecto a la ecuación (12.6) del tornillo, es la velocidad absoluta de cada tuerca. Cuando el tornillo gira a una velocidad de 45 rpm, la tuerca avanza a:

$$v_{\text{tuerca/tornillo}} = L\omega_{\text{tornillo}} = (0.10 \text{ in/rev})(45 \text{rev/min}) = 4.5 \text{ in/min}$$

Entonces:

$$\mathbf{V}_A = 4.5 \text{in/min} \leftarrow \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_C = 4.5 \text{in/min} \rightarrow$$

4. ***Calcule la velocidad de la placa***

La ecuación de velocidad se escribe como:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A +> \mathbf{V}_{B/A} = \mathbf{V}_C +> \mathbf{V}_{B/C}$$

Se forma un diagrama de velocidad a partir de ambas ecuaciones. Observe que debido a la simetría, el desplazamiento y la velocidad B son verticales (figura 12.8).

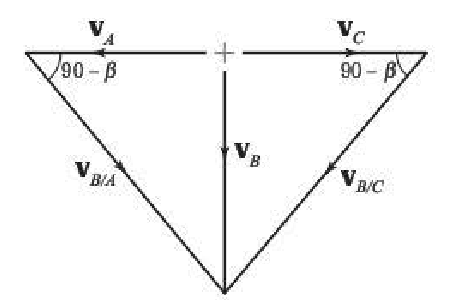


FIGURA 12.8 Diagrama de velocidad del problema de ejemplo 12.2.

Usando trigonometría, se obtiene la siguiente relación:

$$\tan(90 - \beta) = \frac{v_B}{v_A}$$

Para el caso mostrado,

$$\beta = 25°$$

$$\mathbf{V}_B = v_A \tan(90 - \beta) = (4.5 \text{ in/min})\tan(90° - 20°) = 12.4 \text{ in/min} \downarrow$$

12.7 FUERZAS Y TORQUES EN EL TORNILLO

En la figura 12.9 se presentan la fuerza y el torque que actúa sobre el tornillo y la tuerca.

Se han deducido las relaciones entre la fuerza y el torque [ref. 2], en las cuales el coeficiente de fricción μ, entre la cuerda y la tuerca, tiene una gran influencia. La fricción se analizó en la sección 12.5. Cuando se utilizan mecanismos roscados, se pierde una gran cantidad de energía por la fricción.

El primer caso a estudiar es aquel donde el movimiento de la tuerca ocurre en la dirección opuesta de la fuerza aplicada que actúa sobre la tuerca. Este es el caso comúnmente conocido como de elevación o empuje de una carga. El torque requerido para realizar este movimiento se calcula como:

$$T = \left(\frac{Fd}{2}\right)\left[\frac{(L + \pi\mu d)}{(\pi d - \mu L)}\right] \qquad \textbf{(12.8)}$$

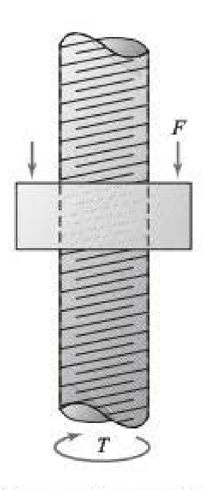


FIGURA 12.9 Fuerza y torque sobre un tornillo.

donde:

F = magnitud de la fuerza aplicada sobre la tuerca
d = diámetro de paso de las cuerdas
L = avance de las cuerda
μ = coeficiente de fricción entre la tuerca y las cuerda

El segundo caso a estudiar es aquel donde el movimiento de la tuerca está en la misma dirección que la fuerza que actúa sobre la tuerca. En esencia, la carga favorece el movimiento de la tuerca. Esto se conoce comúnmente como el caso de *descenso de una carga*. El torque requerido para realizar este movimiento es el siguiente:

$$T = \left(\frac{Fd}{2}\right)\left[\frac{(\pi\mu d - L)}{(\pi d + \mu L)}\right] \quad (12.9)$$

La *eficiencia e* se define como el porcentaje de potencia transferida a través de las cuerdas hacia la tuerca. Es la razón del torque requerido para elevar la carga, en ausencia de fricción, al torque requerido para elevar la carga con fricción. De nueva cuenta, se ha deducido una ecuación de forma cerrada para la eficiencia.

$$e = \left(\frac{L}{\pi d}\right)\left[\frac{(\pi d\cos\alpha - \mu L)}{(\pi\mu d + L\cos\alpha)}\right] \quad (12.10)$$

Además de las cantidades ya definidas, se emplea el *ángulo de cuerda incluido*, α. Este ángulo se ilustra en la figura 12.2. Los valores estándar son:

Cuerda unificada: $\alpha = 30°$
Cuerda métrica: $\alpha = 30°$
Cuerda cuadrada: $\alpha = 0°$
Cuerda ACME: $\alpha = 14.5°$

Los tornillos roscados suelen tener eficiencias entre 20 y 50%. Por lo tanto, se pierde una gran cantidad de energía por fricción. En oposición a los tornillos roscados, los tornillos de bolas tienen eficiencias por arriba de 90%. Para los tornillos de bolas, las ecuaciones de torque operativo se estiman como:

$$T = 0.177\,FL \text{(para elevar una carga)} \quad (12.11)$$

$$T = 0.143\,FL \text{(para bajar una carga)} \quad (12.12)$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 12.3

En la figura 12.10 se ilustra el mecanismo de tornillo de un gato mecánico. Para elevar el gato se utiliza un sistema de correa/polea para girar una tuerca acoplada con un tornillo con una cuerda 1-5 ACME. Observe el perno en una ranura sirve para evitar que el tornillo gire. La tuerca gira a 300 rpm. Determine la velocidad de elevación del gato, el torque requerido y la eficiencia del gato.

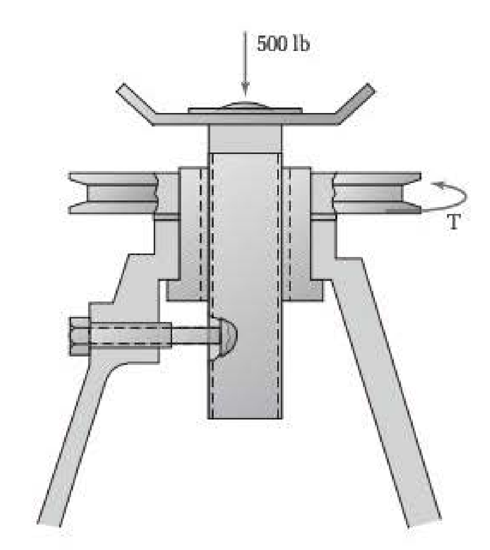


FIGURA 12.10 Gato mecánico del problema de ejemplo 12.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Liste las propiedades del tornillo***

Un tornillo con una cuerda 1 – 5 ACME tiene las siguientes propiedades:

Número de dientes por pulgada: $n = 5$

Paso: $p = \frac{1}{n} = \frac{1}{5} = 0.20$ in

Número de hilos: $N_t = 1$

Avance: $L = N_t p = 0.20$ in/rev

2. ***Calcule la velocidad del tornillo***

En la figura 12.10, la tuerca está impedida para la traslación. Por lo tanto, la velocidad calculada con la ecuación (12.6) es la de avance del tornillo. Conforme la tuerca gira con una velocidad de 300 rpm, la cuerda avanza a través de la tuerca a una velocidad de:

$$\mathbf{V}_{\text{tornillo}} = L\omega_{\text{tuerca}} = (0.20\,\text{in/rev})(300\,\text{rev/min}) = 60\,\text{in/min}\uparrow$$

3. ***Determine el torque requerido***

El torque requerido para elevar la carga depende del coeficiente estimado de fricción entre las cuerdas y la tuerca. Como esta configuración del gato se emplea en entornos industriales estándar, se supone un coeficiente de fricción de 0.2. En la tabla 12.3, el diámetro de paso nominal para cuerdas 1 – 5 ACME es de 0.8726 in. Asimismo, para las cuerdas ACME, el ángulo incluido es de 29°. Entonces, el torque se calcula con la ecuación (12.8).

$$T = \left(\frac{Fd}{2}\right)\frac{(L + \pi\mu d)}{(\pi d - \mu L)}$$

$$= \frac{(500\,\text{lb})(0.8726\,\text{in})}{2}\left\{\frac{[(0.20 + \pi(0.2)(0.8726)]}{[\pi(0.8726) - (0.2)(0.2)]}\right\} = 60.4\,\text{in} - \text{lb}$$

4. ***Calcule la eficiencia***

Finalmente, la eficiencia se calcula con la ecuación (12.10).

$$e = \left(\frac{L}{\pi d}\right)\left[\frac{(\pi d\cos\alpha - \mu L)}{(\pi\mu d + L\cos\alpha)}\right]$$

$$= \frac{(0.2)}{\pi(0.8726)}\left\{\frac{[\pi(0.8726)\cos(29) - (0.2)(0.2)]}{[\pi(0.2)(0.8726) + (0.2)(\cos 29°)]}\right\} = 0.24$$

Una eficiencia de 0.24 indica que tan solo el 24% de la potencia transferida por la tuerca se usa para elevar el peso. El restante 76% se pierde por fricción. Si estos valores no son aceptables, se debe sustituir la cuerda ACME por un tornillo de bolas. Este último no únicamente tiene una eficiencia aproximada de 90%, sino que también su costo es mucho más alto. Sin embargo, recuerde que un tornillo de bolas no es de autobloqueo y no mantiene la carga a una altura determinada.

12.8 TORNILLOS DIFERENCIALES

Un tornillo diferencial es un mecanismo diseñado para proporcionar movimientos muy finos. Aun cuando suelen tener varias formas, en la figura 12.11 se muestra una forma común. Esta configuración específica de tornillo diferencial consiste en dos cuerdas diferentes sobre el mismo eje y una unión de corredera.

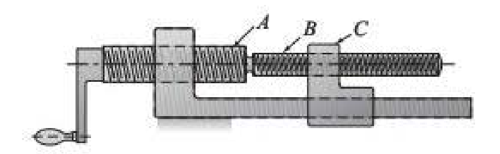


FIGURA 12.11 Tornillo diferencial.

En la figura 12.11, cuando el mango gira una revolución, la cuerda A gira una revolución y avanza una distancia igual al avance de la cuerda A. Desde luego, el movimiento de la cuerda B es idéntico al de la cuerda A porque está maquinada sobre el mismo eje que A. Entonces, la cuerda B también gira una revolución y avanza una distancia igual al avance de la cuerda A. Conforme la cuerda B gira una revolución, la tuerca C se retrae porque está impedida para girar. Específicamente, conforme la cuerda B gira una revolución, la tuerca C se retrae una distancia igual al avance de la cuerda B. Sin embargo, como la cuerda B ya avanzó una revolución, el movimiento neto de la tuerca C es la diferencia entre el avance de las cuerdas A y B. Por tal razón, esta configuración de tornillo con avances diferentes se conoce como *tornillo diferencial*.

Para los tornillos diferenciales, las relaciones cinemáticas entre la magnitud del movimiento angular y la magnitud del movimiento lineal se modifican como sigue:

$$\Delta R_{\text{tuerca}} = (L_A - L_B)\,\Delta\theta_{\text{tornillo}} \tag{12.13}$$

$$v_{\text{tuerca}} = (L_A - L_B)\,\omega_{\text{tornillo}} \tag{12.14}$$

$$a_{\text{tuerca}} = (L_A - L_B)\,\alpha_{\text{tornillo}} \tag{12.15}$$

Nuevamente observe que el avance L se especifica como el desplazamiento de la tuerca por revolución. Por lo tanto, en este caso extraño, el movimiento angular se debería especificar en revoluciones.

Cuando los avances de las dos cuerdas son más o menos de la misma magnitud, se pueden generar movimientos pequeños de la tuerca. Esta configuración es frecuente en ajustes finos o en equipo de precisión a un costo relativamente bajo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 12.4

Un dispositivo hecho para calibrar la longitud de partes se muestra en la figura 12.12. El diseño utiliza un tornillo diferencial, de modo que el giro de la perilla *A* desliza la tuerca *D* hasta que se presiona firmemente contra la pieza *E*. La tuerca *D* también tiene un apuntador que sirve para determinar la longitud de la pieza *E*. El objetivo es configurar el sistema, de modo que un giro de la perilla *A* cause que la tuerca *D* avance 0.1 mm. Seleccione las cuerdas *B* y *C* para llevar a cabo este requerimiento.

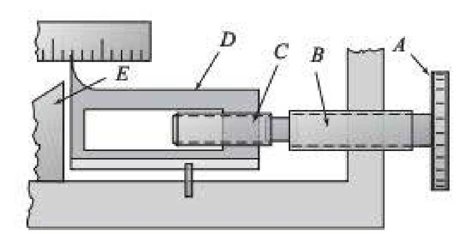


FIGURA 12.12 Dispositivo de medición del problema de ejemplo 12.4.

SOLUCIÓN: Use la siguiente ecuación cinemática diferencial del tornillo:

$$\Delta R_{\text{tuerca}} = (L_B - L_C)\Delta\theta_{\text{tornillo}}$$

$$0.1 \text{ mm} = (L_B - L_C)(1 \text{ rev})$$

$$(L_B - L_C) = 0.1 \text{ mm/rev}$$

Son factibles varias configuraciones. Se utilizan las cuerdas estándar listadas en la tabla 12.2. Estas tienen una sola cuerda, de modo que el avance y el paso son idénticos. Entonces, se necesitan seleccionar dos cuerdas que tengan una diferencia en el paso igual a 0.1 mm. Aun cuando son factibles algunas opciones, arbitrariamente se seleccionan cuerdas de paso grueso.

Para la cuerda *B*: M5 × 0.8

Para la cuerda *C*: M4 × 0.7

12.9 TORNILLOS DE TALADRO

Hace muchos siglos, Arquímedes usó ingeniosamente un mecanismo de tornillo para elevar agua, el cual ahora se conoce como "tornillo de Arquímedes" (figura 12.13). Cuando el tornillo gira, cada cuerda del tornillo transporta cierto volumen de agua. En este mecanismo de tornillo, la tuerca acoplada es realmente el líquido que se transporta. Esta forma aún se utiliza actualmente para transportar diferentes tipos de materiales. Las aplicaciones comunes incluyen el transporte de plástico fundido hacia moldes, mover sal a través de espátulas de los camiones recolectores hacia caminos cubiertos de hielo, excavar hoyos en la tierra para postes de cercas y abastecer el alimento del ganado a través de comederos largos. Este mecanismo de tornillo se conoce más comúnmente como *taladro*.

Se podrían usar las ecuaciones (12.16), (12.17) y (12.18) para determinar el movimiento del material que está se transporta, conociendo el movimiento del taladro. En congruencia con los tornillos estándar, se define el paso o avance de la cuchilla de un taladro. La cantidad de transporte volumétrico es, entonces, una función del espacio entre las cuchillas del taladro, las cuales atrapan el material que se está transportando. Esto se escribe matemáticamente como:

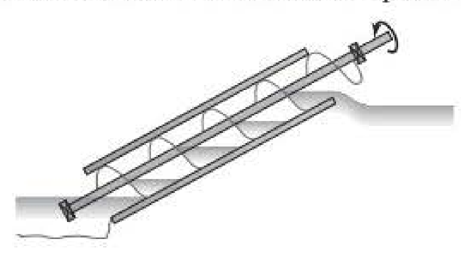


FIGURA 12.13 Tornillo de Arquímedes.

Volumen a través del taladro =
(volumen atrapado entre las cuchillas del taladro)
$(L_{\text{taladro}})\Delta\theta_{\text{tornillo}}$ **(12.16)**

Flujo volumétrico a través del taladro =
(volumen atrapado entre las cuchillas del taladro)
$(L_{\text{taladro}})\omega_{\text{tornillo}}$ **(12.17)**

Aceleración volumétrica a través del taladro =
(volumen atrapado entre las cuchillas del taladro)
$(L_{\text{taladro}})\alpha_{\text{tornillo}}$ **(12.18)**

PROBLEMAS

Geometría de la cuerda de un tornillo

12–1. Calcule el avance y el ángulo de avance de una cuerda de ¼ –20 UNC. Determine también si es de autobloqueo, cuando la cuerda tiene la calidad de un maquinado general.

12–2. Determine el avance y el ángulo de avance de una cuerda de ¼ –28 UNC. Determine asimismo si es de autobloqueo, cuando la cuerda tiene la calidad de un maquinado general.

12–3. Calcule el avance y el ángulo de avance de una cuerda M16 × 2.0. Determine también si es de autobloqueo, cuando la cuerda tiene la calidad de un maquinado general.

12–4. Determine el avance y el ángulo de avance de una cuerda de 1– ⅛ –5 ACME. Determine asimismo si es de autobloqueo, cuando la cuerda tiene la calidad de un maquinado general.

Desplazamiento con tornillo impulsado

12–5. El envase de un desodorante sólido utiliza un tornillo para extraer y retraer la barra del desodorante. La rueda manual gira una cuerda de ¼ –20 estándar que mueve la tuerca y la barra del desodorante. Calcule la distancia que avanza la barra cuando la rueda manual gira 3 revoluciones.

12–6. En la figura P12.16 se ilustra una máquina de pruebas a la tensión. Un tornillo de una sola cuerda de 2–4 ACME mueve la tuerca. Determine el desplazamiento del ariete levadizo que se eleva cuando el tornillo gira 10 revoluciones.

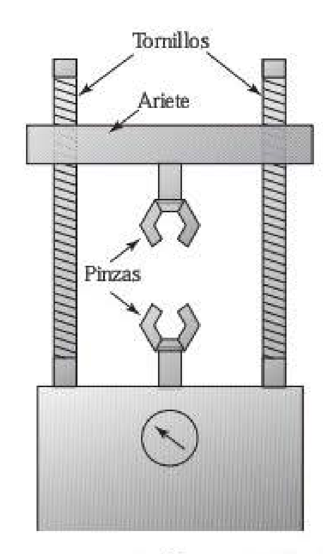


FIGURA P12.6 Problemas 6, 18 y 25.

12–7. En la figura P12.7 se muestra el mecanismo que abre la puerta de una cochera. Un tornillo de una sola cuerda de 1–5 ACME mueve la tuerca. Determine el desplazamiento de la parte inferior de la puerta que desciende cuando el tornillo gira 10 revoluciones.

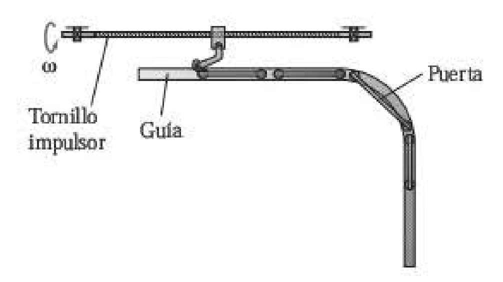


FIGURA P12.7 Problemas 7, 19 y 26.

12–8. En la figura P12.8 se presenta una mesa de trabajo ajustable. El eje de entrada está acoplado, a través de un conjunto de engranes cónicos, a una tuerca. La tuerca gira empujando un tornillo hacia arriba y hacia abajo. Los engranes cónicos tienen una razón de 5:1. El tornillo tiene una cuerda de ½ –13 UNC. Determine el desplazamiento de la mesa que se eleva cuando el eje de entrada gira 10 revoluciones.

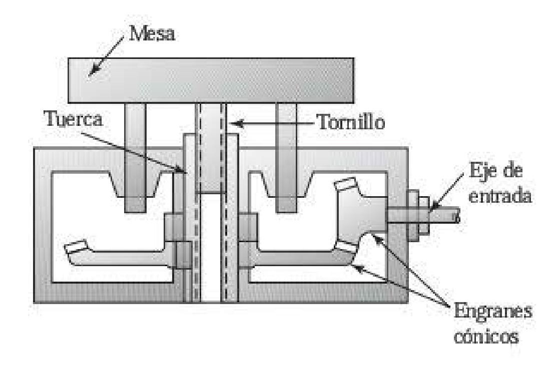


FIGURA P12.8 Problemas 8, 20 y 27.

12–9. En la figura P12.9 se muestra una prensa operada por un tornillo. El tornillo tiene una sola cuerda de ½ –10 ACME, con orientación tanto a la derecha como a la izquierda, como se indica. La prensa está configurada inicialmente con $\beta = 25°$. Determine gráficamente el desplazamiento de la placa de presión que desciende cuando la manivela gira 20 revoluciones.

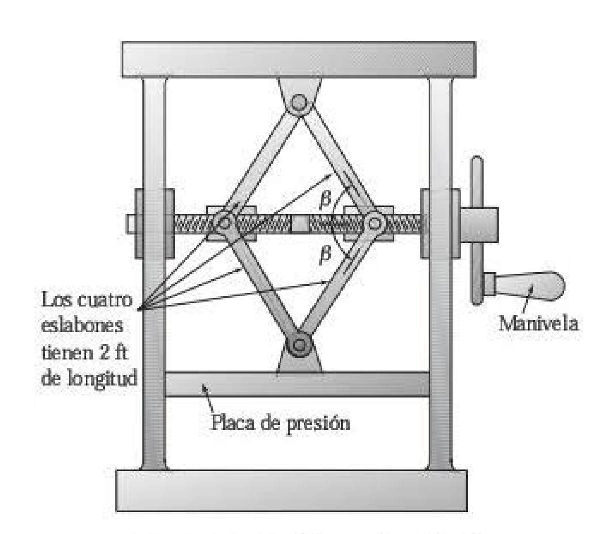


FIGURA P12.9 Problemas 9 a 11 y 21.

12–10. La prensa descrita en el problema 12-9 se configura inicialmente con $\beta = 45°$. Determine gráficamente el desplazamiento de la placa de presión que desciende, cuando la manivela gira 15 revoluciones.

12–11. La prensa descrita en el problema 12-9 se configura inicialmente con $\beta = 65°$. Determine gráficamente el desplazamiento de la placa de presión que desciende, cuando la manivela gira 30 revoluciones.

12–12. Una varilla con una cuerda de ¾ – 10 UNC impulsa una plataforma, como se indica en la figura P12.12. Determine gráficamente el desplazamiento de la plataforma que desciende, cuando la manivela gira 12 revoluciones.

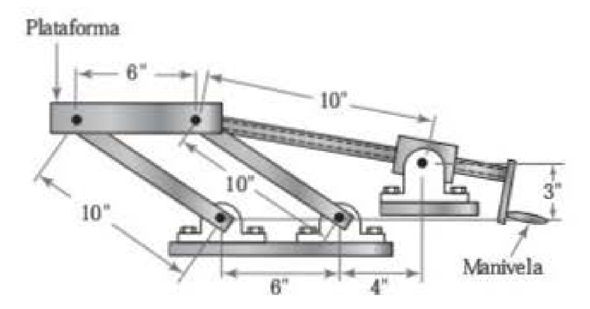


FIGURA P12.12 Problemas 12, 13 y 22.

12–13. Para la plataforma descrita en el problema 12-12, determine gráficamente el desplazamiento de la plataforma levadiza, cuando la manivela gira 8 revoluciones.

12–14. El motor mostrado en la figura P12.14 hace girar una varilla con una cuerda de ¾ –10 UNC para voltear una plataforma que se usa para llenar cajas de embalaje. Determine gráficamente el desplazamiento angular de la plataforma levadiza, así como el desplazamiento lineal del extremo superior, cuando el motor gira 25 revoluciones.

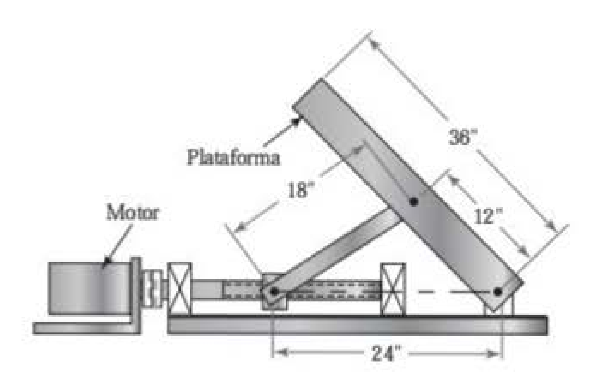


FIGURA P12.14 Problemas 14, 15, 23 y 28.

12–15. Para la plataforma descrita en el problema 12-14, determine gráficamente el desplazamiento angular de la plataforma que desciende, así como el desplazamiento lineal del borde superior, cuando el motor gira 15 revoluciones.

12–16. La altura y el ángulo de la mesa de dibujo mostrada en la figura P12.16 se ajusta girando la manivela la cual, a la vez, gira un tornillo moviendo la tuerca y modificando la distancia L. El tornillo tiene una cuerda de ⅞ –14 UNF. La mesa se configura inicialmente con

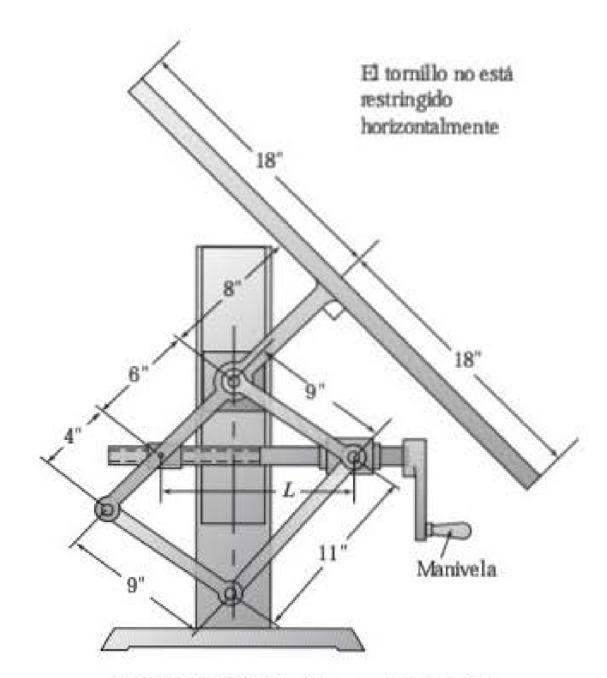


FIGURA P12.16 Problemas 16, 17 y 24.

$L = 9$ in. Determine gráficamente el desplazamiento de los bordes superior e inferior de la mesa levadiza, cuando la manivela gira 5 revoluciones.

12–17. La mesa de dibujo mostrada en la figura P12.16 se configura inicialmente con $L = 8$ in. El tornillo tiene una cuerda de ⅞ –14 UNF. Determine gráficamente el desplazamiento de los bordes superior e inferior de la mesa que desciende, cuando la manivela gira 30 revoluciones.

Velocidad con tornillo impulsado

12–18. El tornillo de la máquina de pruebas de tensión descrita en el problema 12-6 gira a 40 rpm, haciendo bajar el ariete. Determine la velocidad lineal del ariete.

12–19. El tornillo que abre la puerta de la cochera descrito en el problema 12-7 gira a 1200 rpm, abriendo la puerta. Determine la velocidad lineal de la parte inferior de la puerta.

12–20. El eje de entrada de la mesa de trabajo descrita en el problema 12-8 gira a 600 rpm, elevando la mesa. Determine la velocidad lineal de la mesa.

12–21. El tornillo de la prensa descrita en el problema 12-9 gira a 45 rpm, haciendo bajar la placa de presión. La prensa está configurada con $\beta = 25°$. Determine la velocidad lineal de la placa de presión.

12–22. La manivela de la plataforma descrita en el problema 12-12 gira a 30 rpm, elevando la plataforma. Determine la velocidad lineal de la plataforma.

12–23. El motor en el mecanismo de la plataforma de volteo descrito en el problema 12-14 gira a 1800 rpm, elevando la plataforma. Determine la velocidad angular de la plataforma.

12–24. La manivela de la mesa de dibujo descrita en el problema 12-16 gira a 20 rpm, haciendo descender la mesa, la cual se configura inicialmente con $L = 9$ in. Determine la velocidad de los bordes superior e inferior de la mesa.

Aceleración con tornillo impulsado

12–25. El tornillo de la máquina de pruebas de tensión descrita en el problema 12-6 gira a 40 rpm, haciendo bajar el ariete. El motor se apaga y le toma 1.7 s detenerse completamente. Calcule la aceleración lineal del ariete durante el periodo de apagado.

12–26. El tornillo que abre la puerta de la cochera descrito en el problema 12-7 se activa para abrir la puerta. Al motor le toma 0.7 s alcanzar su estado estable de funcionamiento a 1200 rpm. Determine la aceleración lineal de la parte inferior de la puerta, en el momento de la activación.

12–27. El motor de la mesa de trabajo descrita en el problema 12-8 se activa para elevar la tabla. Le toma 20 revoluciones del eje de entrada alcanzar su estado estable de funcionamiento a 1200 rpm. Determine la aceleración lineal de la mesa.

12–28. El motor en el mecanismo de la plataforma de volteo descrito en el problema 12-14 gira a 900 rpm, elevando la plataforma y, luego, se apaga. Le toma 4 revoluciones detenerse completamente. Calcule la velocidad y la aceleración angulares de la plataforma.

Fuerza y torque en el tornillo

12–29. Una cuerda ACME estándar de ½ in se emplea en una abrazadera-C. Esta cuerda tiene una calidad general de maquinado con lubricante mínimo. Para que la abrazadera ejerza una fuerza de 500 lb sobre los materiales que se sujetan, determine el torque requerido.

12–30. Calcule la eficiencia de la abrazadera-C descrita en el problema 12-29.

12–31. Un gato mecánico utiliza una cuerda ACME de dos hilos con el diámetro mayor igual a 25 mm y un paso de 5 mm. El gato está construido para levantar 4000 N. Determine
el ángulo de avance, si el gato es de autobloqueo,
el torque para elevar la carga,
el torque para bajar la carga
y la eficiencia del gato.

12–32. Un gato mecánico utiliza una cuerda ACME 1-5 de dos hilos. El gato está construido para levantar 2000 lb. Determine
el ángulo de avance, si el gato es de autobloqueo,
el torque para elevar la carga,
el torque para bajar la carga y la eficiencia del gato.

12–33. En la mesa del problema 12-8, la cuerda es de calidad general de maquinado con lubricante mínimo. La mesa soporta 75 libras; determine el torque transferido a la tuerca.

12–34. Calcule la eficiencia del tornillo que se usa en la mesa descrita en el problema 12-16.

Tornillos diferenciales

12–35. Se usa un tornillo diferencial en un dispositivo de medición similar al descrito en el problema de ejemplo 12.4. Seleccione dos cuerdas estándar tales que una rotación de la perilla dé como resultado 0.5 mm de avance de la tuerca.

12–36. Se usa un tornillo diferencial en un dispositivo de medición similar al descrito en el problema de ejemplo 12.4. Seleccione dos cuerdas estándar tales que una rotación de la perilla dé como resultado 0.25 in de avance de la tuerca.

12–37. Se usa un tornillo diferencial en un dispositivo de medición similar al descrito en el problema de ejemplo 12.4. Seleccione dos cuerdas estándar tales que una rotación de la perilla dé como resultado 0.05 in de avance de la tuerca.

ESTUDIOS DE CASO

12–1. El dispositivo mostrado en la figura E12.1 utiliza un mecanismo de tornillo. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

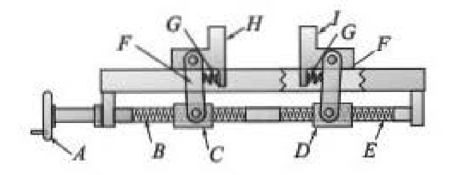


FIGURA E12.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. ¿Cuál es la orientación de la cuerda *B*?
2. ¿Cuál es la orientación de la cuerda *E*?
3. Cuando el mango *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la tuerca *C*?
4. Cuando el mango *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la corredera *H*?
5. Cuando el mango *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la tuerca *D*?
6. Cuando el mango *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la corredera *I*?
7. ¿Cuál es la función de los eslabones identificados como *F*?
8. ¿Qué es la componente *G* y cuál es su función?
9. ¿Cuál es la función de este dispositivo, y cómo lo llamaría?

12–2. El dispositivo mostrado en la figura E12.2 utiliza un mecanismo de tornillo. Examine cuidadosamente las

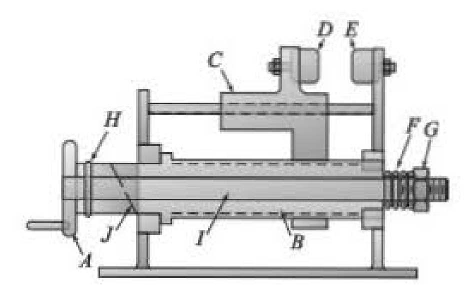


FIGURA E12.2 (Cortesía de Industrial Press).

componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

1. Cuando la manivela *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del eje *I*?
2. ¿Cuál es la función del perno *H*?
3. Cuando la manivela *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento del manguito roscado *B*?
4. ¿Qué provoca realmente el movimiento conjunto del eje *I* y el manguito roscado *B*?
5. El manguito roscado *B* tiene cuerdas derechas; cuando la manivela *A* gira en sentido antihorario, ¿cuál es el movimiento de la tuerca *C*?
6. ¿Qué sucede con este dispositivo cuando las almohadillas *D* y *E* entran en contacto?
7. ¿Qué clase de componente es *F* y cuál es su función?
8. ¿Cuál es la función de este dispositivo?
9. ¿Qué pasaría si se inmovilizara la tuerca *G*?
10. ¿Qué ocurriría con este dispositivo, si la interfase *J* se diseñara con una inclinación más vertical?

ANÁLISIS DE FUERZAS ESTÁTICAS

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Definir e identificar una fuerza.**
2. **Calcular el momento de una fuerza.**
3. **Comprender la diferencia entre masa y peso.**
4. **Entender y aplicar las tres leyes de Newton del movimiento.**
5. **Crear un diagrama de cuerpo libre de la componente de una máquina en general.**
6. **Identificar y usar las condiciones especiales de equilibrio de un elemento con dos fuerzas.**
7. **Calcular la fuerza de fricción de deslizamiento e identificar su dirección.**
8. **Determinar las fuerzas que actúan en todo un mecanismo.**

13.1 INTRODUCCIÓN

La función general de una máquina es transmitir movimiento y fuerzas de un actuador a las componentes que realizan la tarea deseada. Considere las escaleras mecánicas que se emplean en muchos edificios comerciales: la energía eléctrica se alimenta a los motores, los cuales impulsan mecanismos que mueven y despliegan los peldaños. La finalidad es mover a la gente hacia arriba y hacia abajo de los edificios de varios niveles, con seguridad y eficiencia.

Hasta esta parte del libro, el enfoque ha estado en el movimiento de una máquina. Este capítulo y el siguiente están dedicados a la presentación de las fuerzas en una máquina. Una tarea esencial en el diseño de máquinas consiste en garantizar que la resistencia de los eslabones y las uniones sea suficiente para soportar las fuerzas ejercidas sobre ellas. Por consiguiente, el conocimiento completo de las fuerzas sobre las diferentes componentes de la máquina es de vital importancia.

Como se señaló en el capítulo 7, una fuerza inercial es producto de la aceleración presente en un eslabonamiento. Este capítulo trata con el análisis de fuerzas en mecanismos sin aceleraciones, o donde las aceleraciones no sean significativas. Esta condición se conoce como *equilibrio estático*, que es aplicable a diversas máquinas en las cuales los cambios en el movimiento son graduales o la masa de las componentes es muy pequeña. Esto incluye abrazaderas, pasadores (pestillos), soporte de eslabonamientos y muchas otras herramientas manuales, como alicates y navajas.

El siguiente capítulo trata sobre el análisis de fuerzas en mecanismos con grandes aceleraciones. En muchas máquinas de alta velocidad, las fuerzas inerciales creadas por el movimiento de una máquina exceden las fuerzas requeridas para ejecutar la tarea asignada. Esta condición se conoce como *equilibrio dinámico*. En el análisis del equilibrio dinámico se utilizan muchos conceptos de equilibrio estático. Por ello, el equilibrio estático (capítulo 13) se presenta antes de proceder con el equilibrio dinámico (capítulo 14).

13.2 FUERZAS

Una *fuerza*, **F**, es una cantidad vectorial que representa la acción de empujar o jalar una pieza. Jalar a un niño en un carrito implica aplicar una fuerza (acción de jalar) al tirador del carrito. Al ser un vector, esta fuerza se define con la magnitud F y la dirección en que se jala. En el sistema tradicional estadounidense, la unidad común para la magnitud de una fuerza es la libra inglesa o simplemente libra (lb). En el sistema internacional, la principal unidad que se usa es el newton (N).

Una de las operaciones más comunes es la determinación del efecto neto de varias fuerzas. Dos o más fuerzas que se aplican a una pieza se pueden combinar para determinar el efecto resultante de las fuerzas. La combinación de fuerzas para calcular la resultante es un procedimiento idéntico a la suma de vectores de desplazamiento, velocidad o aceleración que se presentó en las secciones 3.9 y 3.11. Por el contrario, una fuerza se puede desglosar en dos componentes a lo largo de ejes perpendiculares. Esto se presentó en la sección 3.10. Con frecuencia, el uso de las componentes de una fuerza, junto con los ejes de coordenadas convenientes, facilitan el análisis. Tratándose de cantidades vectoriales, las fuerzas se logran manipular aplicando los métodos estudiados en el capítulo 3.

13.3 MOMENTOS Y TORQUES

Un momento, o torque, es la acción de torsión producida por una fuerza. El empuje sobre el mango de una llave produce una acción que tiende a hacer girar la tuerca de un perno. De modo que la fuerza causa una acción de torsión alrededor del centro del perno. El resultado de esta acción se conoce como *momento* o *torque*. La figura 13.1 ilustra una fuerza como esta, la cual genera una acción de torsión.

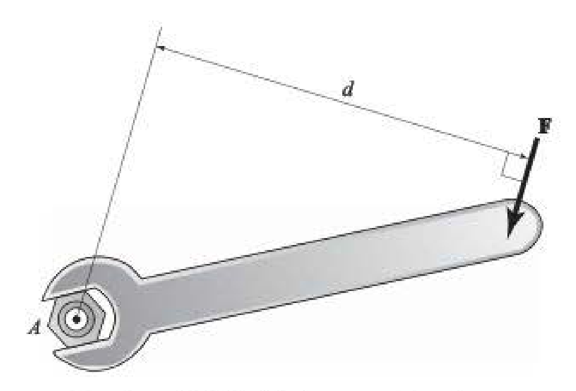


FIGURA 13.1 Definición de momento o torque.

En mecánica plana, el momento es una propiedad que se define en relación con un punto de referencia. En la llave de la figura 13.1, el objetivo de la fuerza es proporcionar una acción de torsión a la tuerca. Por lo tanto, un punto de referencia adecuado es el centro de la tuerca, el punto A. La magnitud del momento en relación con el punto A, M_A, creado por la fuerza, se calcula como:

$$M_A = (F)(d) \tag{13.1}$$

Donde F es la magnitud de la fuerza, d es la distancia perpendicular entre la fuerza y el punto de referencia A. Los momentos se expresan en unidades de fuerza multiplicadas por la distancia. En el sistema tradicional estadounidenses, las unidades comunes de los momentos son pulgada-libra (in-lb) o pie-libra (lb-ft). En el sistema internacional, las unidades comunes son newton-milímetro (Nmm) o newton-metro (Nm).

Además de magnitud, el momento de una fuerza tiene dirección, que depende de la posición relativa de la fuerza y del punto de referencia. La dirección de un momento, o acción de torsión, en relación con el punto de referencia se designa simplemente como sentido horario o sentido antihorario. Esta dirección debe ser congruente con la dirección de torsión de la fuerza alrededor del punto de referencia. La acción de torsión de la fuerza ilustrada en la figura 13.1, en relación con la tuerca, es un momento en sentido horario. Convencionalmente, los momentos se consideran positivos cuando actúan en sentido antihorario y negativos cuando actúan en sentido horario.

La diferencia entre un momento y un torque es muy sutil. El momento es cualquier acción de torsión de la fuerza. El torque es un tipo específico de momento. En las aplicaciones de máquinas, un torque es cualquier momento donde el punto de referencia está en el centro de un eje u otra conexión de tipo perno.

PROBLEMA DE EJEMPLO 13.1

Un mecanismo que abre automáticamente una puerta ejerce una fuerza de 37 lb sobre la puerta, aplicada en la dirección que se indica en la figura 13.2. Determine el momento creado por la fuerza, en relación con el pivote de la puerta.

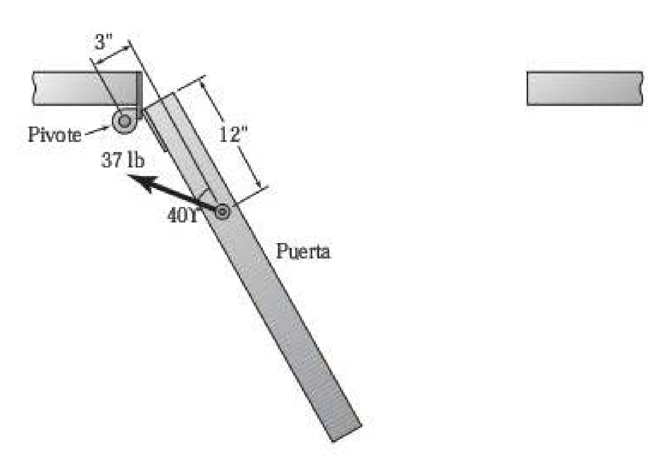


FIGURA 13.2 Puerta del problema de ejemplo 13.1.

SOLUCIÓN: 1. ***Calcule la distancia perpendicular***

El momento se calcula con la ecuación (13.1). Aun cuando se conoce la fuerza, se debe examinar la geometría de la puerta para determinar la distancia perpendicular d. En la figura 13.3 se aisló la geometría y se descompuso en dos triángulos. Observe que ambos triángulos se construyeron como triángulos rectángulos. El lado común a ambos triángulos, identificado como el lado c, se determina con los datos conocidos del triángulo superior. A partir del teorema de Pitágoras,

$$c = \sqrt{(12\,\text{in})^2 + (3\,\text{in})^2} = 12.37\text{ in}$$

El ángulo incluido β también se calcula a partir de relaciones trigonométricas.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3\text{ in}}{12\text{ in}}\right) = 14.0°$$

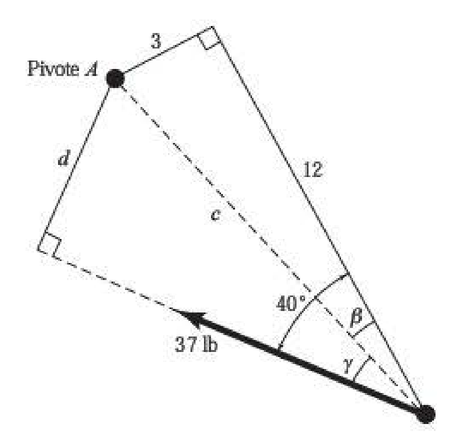


FIGURA 13.3 Geometría de la puerta del problema de ejemplo 13.1.

Al enfocarse en el triángulo inferior, el ángulo incluido γ puede calcularse porque se conoce el ángulo total de 40°; por lo tanto,

$$\gamma = 40° - \beta = 26°$$

Finalmente, la distancia perpendicular se determina a partir de relaciones trigonométricas del triángulo inferior.

$$d = c\,\text{sen}(\gamma) = (12.37\,\text{in})\,\text{sen}(26°) = 5.42\ \text{in}$$

2. ***Calcule el momento***

El momento en relación con el pivote A se calcula con la ecuación (13.1). La dirección debe ser congruente con la acción de torsión de la fuerza en relación con el pivote A, la cual es en sentido horario en este caso.

$$M_A = F(d) = 37\,\text{lb}\,(5.42\ \text{in}) = 200.5\ \text{in lb, en sentido horario}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

1. ***Descomponga la fuerza en sus componentes rectangulares***

En la solución anterior, el cálculo de la distancia perpendicular fue bastante complejo. Se podría aplicar una solución alternativa que implique la definición de un sistema de coordenadas conveniente alineado con las dimensiones dadas. Las componentes de la fuerza original **F** se identifican como $\mathbf{F}^1$ y $\mathbf{F}^2$, y se muestran en la figura 13.4.

La magnitud de $\mathbf{F}^1$ y $\mathbf{F}^2$ se calcula como:

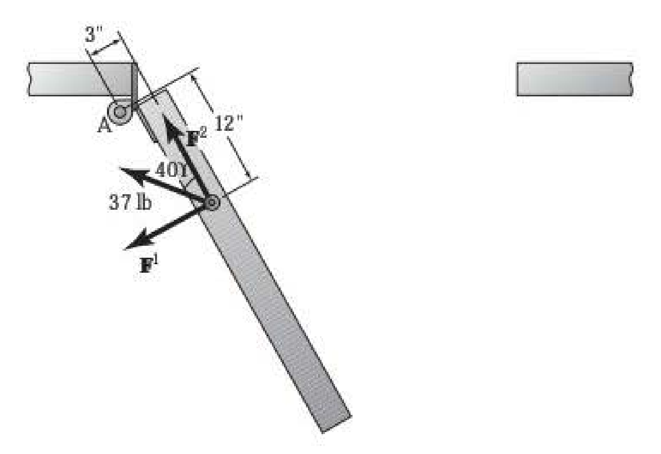


FIGURA 13.4 Componentes de fuerza del problema de ejemplo 13.1.

$$\mathbf{F}^1 = (37\,\text{lb})\,\text{sen}\,40° = 23.8\ \text{lb}$$

$$\mathbf{F}^2 = (37\ \text{lb})\cos 40° = 28.3\ \text{lb}$$

2. ***Identifique la distancia perpendicular de cada componente***

Observe que ambas componentes causan un momento en relación con el punto A. Sin embargo, la distancia perpendicular de cada momento es evidente. En la figura 13.4 se observa que la distancia perpendicular de $\mathbf{F}^1$ y $\mathbf{F}^2$ es de 12 y 3 in, respectivamente. Advierta también que $\mathbf{F}^1$ causa una acción de torsión alrededor del punto A en

sentido horario. El momento causado por F^2 es en sentido antihorario. La convención tradicional de signos es asignar un valor positivo a los momentos en sentido antihorario.

3. ***Calcule el momento***

Se calcula el momento en relación con el punto A,

$$\mathbf{M_A} = -\mathbf{F}^1(12\text{ in}) + \mathbf{F}^2(3\text{ in})$$

$$= -[(23.8\text{lb})(12\text{in})] + [(28.3\text{lb})(3\text{ in})]$$

$$= -200.5\text{ inlb}$$

$$= 200.5\text{ inlb, en sentido horario}$$

13.4 LEYES DEL MOVIMIENTO

Sir Isaac Newton postuló tres leyes de movimiento que sirven como base del análisis de las fuerzas que actúan sobre las máquinas y sus componentes. Estas leyes se establecen como sigue:

PRIMERA LEY: Todos los cuerpos permanecen en reposo, o en movimiento a velocidad constante, a menos que actúe sobre ellos una fuerza desequilibrante.

SEGUNDA LEY: Un cuerpo sometido a una fuerza desequilibrante tiene

a) Aceleración proporcional a la fuerza,

b) Aceleración en dirección a la fuerza y

c) Aceleración que es inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

TERCERA LEY: A cada acción corresponde una reacción igual y en sentido opuesto.

Las tres leyes se utilizan en el estudio de mecanismos. No obstante, en este capítulo donde se trata con el análisis de fuerzas estáticas, únicamente son aplicables la primera y la tercera leyes. En el siguiente capítulo la segunda ley se incorpora al análisis.

13.5 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Para entender cabalmente la seguridad de una máquina, se deberían examinar todas las fuerzas que actúan sobre los eslabones. Es ampliamente aceptado que la mejor forma de identificar estas fuerzas es mediante la construcción de un *diagrama de cuerpo libre*, que es una fotografía de un elemento aislado, como si estuviera flotando libremente. La pieza parece estar flotando porque se eliminan todos los soportes y contactos con otras piezas. Todos estos soportes y contactos se sustituyen luego con fuerzas que representan la acción de soporte. Por consiguiente, el diagrama de cuerpo libre del elemento muestra *todas* las fuerzas que actúan sobre él.

13.5.1 Elaboración de un diagrama de cuerpo libre

La figura 13.5 presenta un diagrama de cuerpo libre de un eslabón aislado. Observe que esta parte se designa como el eslabón 3. Es esencial que se muestren todas las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre. Una notación conveniente es identificar las fuerzas en congruencia con el número del eslabón sobre el que actúan y con el número del eslabón que impulsa la acción. Entonces, una fuerza designada como $\mathbf{F}_{34}$ es una fuerza que actúa sobre el eslabón 3 por el contacto con el eslabón 4.

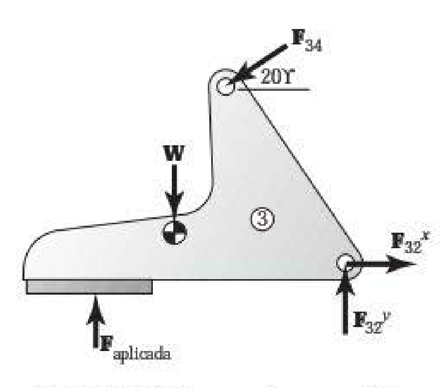


FIGURA 13.5 Diagrama de cuerpo libre.

Como las fuerzas son vectores, la determinación de una fuerza requiere que se conozcan la magnitud y la dirección de la fuerza. Si se conoce la dirección de la fuerza, se debería indicar sobre el diagrama de cuerpo libre. Este es el caso de $\mathbf{F}_{34}$ en la figura 13.5. Cuando no se conoce la dirección de una fuerza, es común dibujar las dos componentes perpendiculares de la fuerza desconocida. Estas dos componentes representan los dos datos que se necesitan determinar para conocer completamente la fuerza. Observe que este es el caso de $\mathbf{F}_{32}$ en la figura 13.5.

Los siguientes pasos ayudan al dibujo sistemático de un diagrama de cuerpo libre:

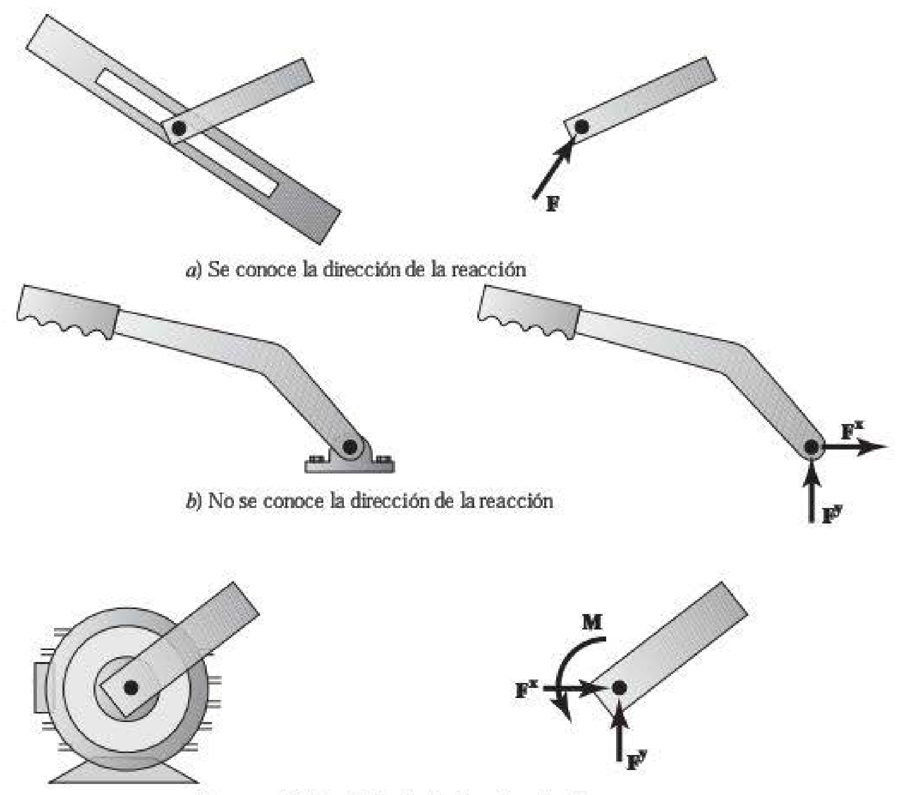
I. Aísle la(s) componente(s) que se vaya(n) a estudiar.

II. Dibuje la componente como si estuviera flotando libremente en el espacio, eliminando así todos los soportes visibles y el contacto físico que tiene con otros objetos.

III. Sustituya los soportes, o contactos físicos, con las fuerzas y/o los momentos adecuados, los cuales tienen el mismo efecto que los soportes.

13.5.2 Determinación de las fuerzas de contacto

El establecimiento de las fuerzas de soporte requiere de cuidado. Como regla general, si la naturaleza del contacto impide el movimiento en cierta dirección, debe haber una fuerza de



a) Se conoce la dirección de la reacción

b) No se conoce la dirección de la reacción

c) La reacción impide la traslación y la rotación

FIGURA 13.6 Fuerzas de reacción.

soporte en esa dirección. Los tipos de reacciones se dividen en tres grupos de acuerdo con el tipo de contacto físico.

a) *Se conoce la dirección de la reacción:* las componentes de este grupo incluyen rodillos, correderas, pernos en ranuras y cables. Cada uno de estos soportes evita el movimiento en tan solo una dirección. Las reacciones de este grupo implican solamente una incógnita; a saber, la magnitud de la fuerza de reacción. La figura 13.6a ilustra este tipo de contacto.

b) *Se desconoce la dirección de la reacción:* las componentes de este grupo incluyen pernos sin fricción, bisagras y correderas sobre superficies ásperas. Cada uno de estos soportes evita la traslación en ambas direcciones del plano. Las reacciones de este grupo incluyen dos incógnitas que, por lo general, se muestran como las componentes x y y de la fuerza de reacción. La figura 13.6b ilustra este tipo de contacto.

c) *Rotación impedida por la reacción:* las componentes de este grupo incluyen soportes fijos y uniones de perno en un inductor (motor eléctrico o de combustión interna). Cada uno de estos soportes impide la traslación en ambas direcciones del plano y la rotación libre. Las reacciones de este grupo son de tres incógnitas, generalmente conocidas como las componentes x y y de la fuerza de reacción, y el momento de la reacción. La figura 13.6c muestra este tipo de contacto.

PROBLEMA DE EJEMPLO 13.2

En la figura 13.7 se presenta un montacargas que levanta un motor. El motor que se levanta pesa 250 lb. Elabore el diagrama de cuerpo libre del montacargas completo.

SOLUCIÓN: Para construir el diagrama de cuerpo libre del montacargas completo, primero se debe aislar y dibujarse, como si estuviera flotando libremente en el espacio. Esto se hace eliminando el piso, que es el único medio que soporta el montacargas. El motor también se elimina, ya que no forma parte integral del montacargas.

Una vez que se haya dibujado de nuevo el montacargas sin el motor y sin el piso, se colocan las fuerzas de reacción en los puntos de contacto de las piezas eliminadas. Primero, como el motor pesa 250 lb, una fuerza de magnitud y dirección conocidas sustituye el efecto del motor.

Segundo, se debe replicar la acción del piso. El rodillo del frente se encuentra en el caso *a*), donde se conoce la dirección de la fuerza de reacción. Cualquier rodillo sobre una superficie lisa evita la traslación perpendicular a la superficie. La reacción en el rodillo del frente se identifica como $\mathbf{F}_{21A}$.

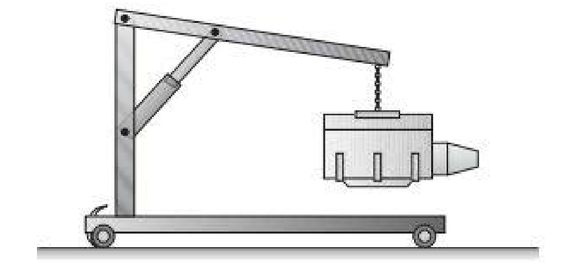


FIGURA 13.7 Montacargas del problema de ejemplo 13.2.

La diferencia con el rodillo trasero es que tiene implementado un dispositivo de frenado. Además de presentar una fuerza de reacción vertical, la configuración rueda-freno también evita la traslación a lo largo del piso. Por consiguiente, la reacción en el rodillo trasero tiene ambas componentes x y y. Las reacciones en el rodillo trasero se identifican como $\mathbf{F}^x_{21B}$ y $\mathbf{F}^y_{21B}$. En la figura 13.8 se muestra un diagrama de cuerpo libre completo.

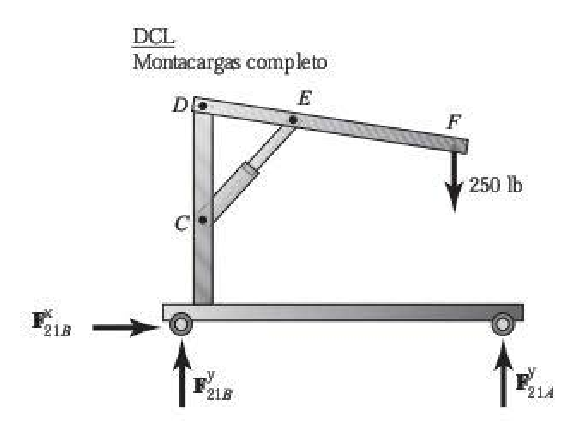


FIGURA 13.8 Diagrama de cuerpo libre del problema de ejemplo 13.2.

13.6 EQUILIBRIO ESTÁTICO

La primera ley de Newton se aplica a todos los eslabones que están en reposo o se mueven a velocidad constante; por lo que la situación se conoce como *equilibrio estático*. Para que un objeto esté en equilibrio estático, se deben cumplir las siguientes dos condiciones necesarias y suficientes:

Condición I:
La combinación, o resultante, de todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto es igual a cero y no causa traslación. Matemáticamente, la primera condición de equilibrio se resume como:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad (13.2)$$

Esta condición indica que todas las fuerzas externas que actúan sobre la componente están en equilibrio. El símbolo Σ implica la suma de todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre. Como se señaló en el capítulo 3, las fuerzas son vectores, y la ecuación (13.2) se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_1 \; +> \; \mathbf{F}_2 \; +> \; \mathbf{F}_3 \; +> \; \ldots \; +> \; \mathbf{F}_N = 0$$

Todos los métodos para el manejo de vectores que se presentaron en el capítulo 3 se utilizan con esta ecuación vectorial para despejar las fuerzas desconocidas. Se pueden usar métodos gráficos o analíticos, pero el análisis de fuerzas es más adecuado con métodos analíticos. Por lo tanto, la primera condición de equilibrio estático se descompone, generando dos ecuaciones algebraicas.

$$\Sigma \mathbf{F}^x = 0 \qquad (13.3)$$

$$\Sigma \mathbf{F}^y = 0 \qquad (13.4)$$

Condición II:
El momento debido a cualquier fuerza externa se cancela con los momentos de las otras fuerzas que actúan sobre el objeto y no causan su giro alrededor de punto alguno. La segunda condición de equilibrio se resume matemáticamente como:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad (13.5)$$

Esta condición indica que todos los momentos que actúan sobre la componente están equilibrados. La ubicación del punto A es arbitraria.

13.7 ANÁLISIS DE UN ELEMENTO CON DOS FUERZAS

Un caso especial de equilibrio, el cual es muy interesante, es el de un elemento sujeto a solamente dos fuerzas. Este tipo de componente de una máquina se conoce como *elemento con dos fuerzas*. Muchos eslabones de mecanismos, sobre todo acopladores y bielas, son elementos con dos fuerzas. En la figura 13.9 se presenta un elemento con dos fuerzas.

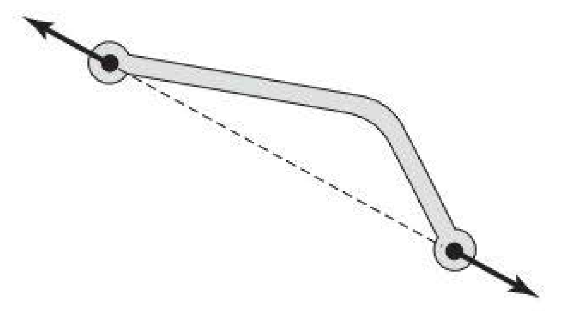


FIGURA 13.9 Elemento con dos fuerzas.

Para que un elemento con dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas deben:

1. Ser de la misma magnitud,
2. Actuar a lo largo de la misma línea y
3. Tener sentidos opuestos.

Como las dos fuerzas deben actuar a lo largo de la misma línea, la única línea que puede satisfacer esta restricción es aquella que se extiende entre los puntos donde se aplican las fuerzas. Por lo tanto, un eslabón con tan solo dos fuerzas simplemente presenta tensión o compresión.

Este hecho es extremadamente útil en el análisis de fuerzas. Cuando se conocen las ubicaciones de las fuerzas, la dirección de las fuerzas está definida. Cuando se conocen la magnitud y el sentido de una sola fuerza, la magnitud y el sentido de la otra fuerza se determinan inmediatamente. Entonces, el análisis de un elemento con dos fuerzas es sencillo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 13.3

En la figura 13.10 se muestra un novedoso cascanueces. Se aplica una fuerza de 5 lb al mango superior, como se indica, y el mecanismo no se mueve (queda estático). Dibuje un diagrama de cuerpo libre y determine las fuerzas sobre cada eslabón. Para este análisis, el peso de cada eslabón se considera insignificante.

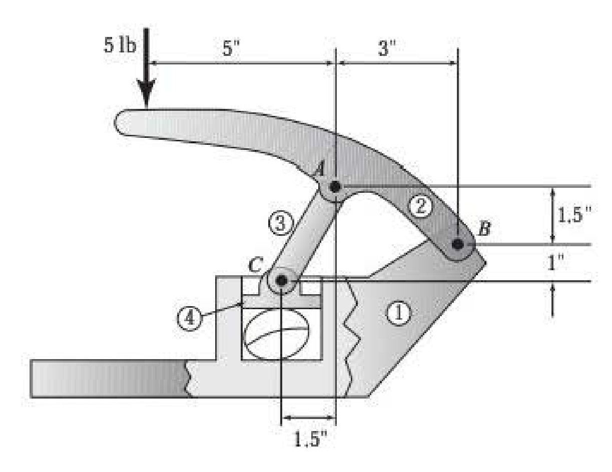


FIGURA 13.10 Cascanueces del problema de ejemplo 13.3.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore los diagramas de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo***

Observe que el eslabón 3 (*AC*) es un eslabón simple, que solo contiene dos uniones de perno. Además, ninguna otra fuerza actúa sobre este eslabón. Por lo tanto, es un elemento con dos fuerzas, mientras que las fuerzas que actúan sobre el eslabón deben ser iguales y a lo largo de la línea que une los dos pernos. En la figura 13.11a se muestra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Como se indicó anteriormente, la notación que se usa es $\mathbf{F}_{32}$, una fuerza aplicada al eslabón 3 como resultado del contacto con el eslabón 2.

Al ser un elemento con dos fuerzas, la dirección de las dos fuerzas, $\mathbf{F}_{34}$ y $\mathbf{F}_{32}$, está a lo largo de la línea que une los dos pernos. Se puede determinar el ángulo de inclinación θ de esta línea.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{1.5}\right) = 59.0°$$

El eslabón 2 también es un eslabón simple que solo contiene dos uniones de perno; sin embargo, se aplica una fuerza adicional al mango. Por lo tanto, este eslabón no es un elemento de dos fuerzas. La tercera ley de Newton establece que una fuerza que actúa en *A* será igual y opuesta a $\mathbf{F}_{32}$. Por consiguiente, la dirección de $\mathbf{F}_{23}$ se conoce como resultado de la figura 13.11a. La unión general de perno en el punto *B* indica que se usarán dos fuerzas de reacción. En la figura 13.11b se ilustra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 2.

El eslabón 4 tiene un contacto de corredera con el eslabón 1. Despreciando cualquier fuerza de fricción, esta fuerza de contacto actúa perpendicularmente a la superficie de contacto. La fuerza de contacto de la nuez misma

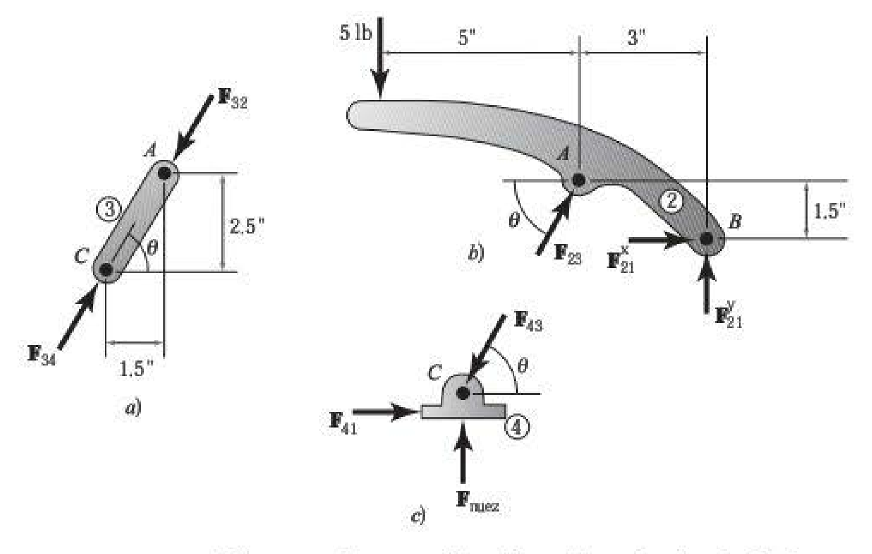


FIGURA 13.11 Diagramas de cuerpo libre del problema de ejemplo 13.3.

actuará perpendicular a la superficie aparejada. Asimismo, la tercera ley de Newton estipula que la fuerza que actúa en B es igual y opuesta a F_{34}. Por lo tanto, la dirección de F_{43} se conoce por la figura 13.11a. En la figura 13.11c se ilustra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 4.

2. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 2***

Se examina primero el eslabón 2 porque contiene la fuerza aplicada. Las tres fuerzas desconocidas sobre este eslabón (figura 13.11b) se despejan en las tres ecuaciones de equilibrio.

$\xrightarrow{+}$ $\Sigma F^x = 0$:

$$F_{23}\cos 59.0° + F_{21}^x = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma F^y = 0$:

$$F_{23}\text{sen}\,59.0° + F_{21}^y - 5\text{lb} = 0$$

$+\circlearrowleft$ $\Sigma M_B = 0$:

$$(5\text{lb})(8\text{in}) - (F_{23}\cos 59.0°)(1.5\text{ in}) - (F_{23}\text{sen}\,59.0°)(3\text{ in}) = 0$$

Resolviendo las tres ecuaciones:

$$F_{23} = +11.96\text{ lb} = 11.96\text{ lb} \nearrow 59°$$

$$F_{21}^x = -6.16\text{ lb} = 6.16\text{ lb} \leftarrow$$

$$F_{21}^y = -5.25\text{ lb} = 5.25\text{ lb} \downarrow$$

3. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 3***

Como el eslabón 3 es un elemento de dos fuerzas (figura 13.11a), las ecuaciones de equilibrio indican que las fuerzas son de la misma magnitud, actúan a lo largo de la misma línea y tienen sentidos opuestos. Desde luego, la tercera ley de Newton indica que $F_{32} = F_{23}$. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el eslabón 3 son:

$$F_{32} = 11.96\text{ lb} \swarrow 59°$$

$$F_{34} = 11.96\text{ lb} \nearrow 59°$$

4. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 4***

El diagrama de cuerpo libre del eslabón 4 (figura 13.11c) revela la fuerza ejercida sobre la nuez. Por supuesto, la tercera ley de Newton establece que $F_{34} = F_{43}$. Como las fuerzas sobre el eslabón 4 convergen en un punto, no se

aplica la ecuación de equilibrio de momento. Las dos fuerzas desconocidas sobre este eslabón se obtienen usando las dos ecuaciones de las componentes de equilibrio.

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma F^x = 0$:

$$F_{41} - F_{43} \cos 59.0° = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma F^y = 0$:

$$F_{nuez} - F_{43} \operatorname{sen} 59.0° = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene:

$$F_{41} = +6.16 \text{ lb} = 6.16 \text{ lb} \rightarrow$$

$$F_{nuez} = +10.25 \text{ lb} = 10.25 \text{ lb}\uparrow$$

PROBLEMA DE EJEMPLO 13.4

La figura 13.12 ilustra un mecanismo que se emplea para triturar rocas. La manivela del mecanismo de 60 mm se mueve lentamente, por lo que se pueden ignorar las fuerzas inerciales. En la posición indicada, determine el torque requerido para impulsar la manivela de 60 mm y triturar las rocas.

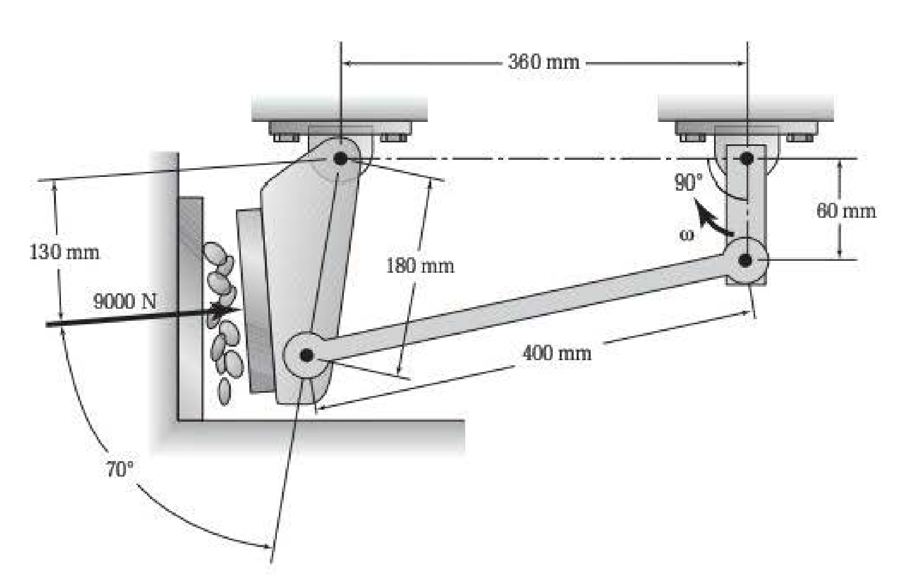


FIGURA 13.12 Triturador de rocas del problema de ejemplo 13.4.

SOLUCIÓN: **1.** ***Elabore los diagramas de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo***

Se usa trigonometría para determinar los ángulos internos de este mecanismo de cuatro barras y completarlo, como se hizo en el capítulo 4. Una alternativa es construir el diagrama cinemático usando el CAD. Se midieron los ángulos internos y los resultados se presentan en la figura 13.13. Observe que el eslabón 3 (*BC*) es un eslabón simple, que tan sólo contiene dos uniones de perno. Además, ninguna otra fuerza actúa sobre este eslabón. Por lo tanto, se trata de un elemento con dos fuerzas y las fuerzas que actúan sobre el eslabón deben ser iguales y estar a lo largo de la línea que une los dos pernos. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 3 se presenta en la figura 13.14a. Como se señaló anteriormente, la notación usada es que F_{32} es una fuerza aplicada al eslabón 3, como resultado del contacto con el eslabón 2.

El eslabón 2 también es un eslabón simple que sólo contiene dos uniones de perno; sin embargo, se aplica un torque impulsor en el eje (punto *A*), por lo que este eslabón no es un elemento de dos fuerzas. La tercera ley de Newton estipula que la fuerza que actúa sobre el eslabón 2 en el punto *B* es igual y opuesta a F_{32}. Por ende, la dirección de F_{23} se obtiene como resultado en la figura 13.14c. La unión general de perno en el punto *A* indica que se usarán dos fuerzas de reacción. En la figura 13.14b se muestra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 2.

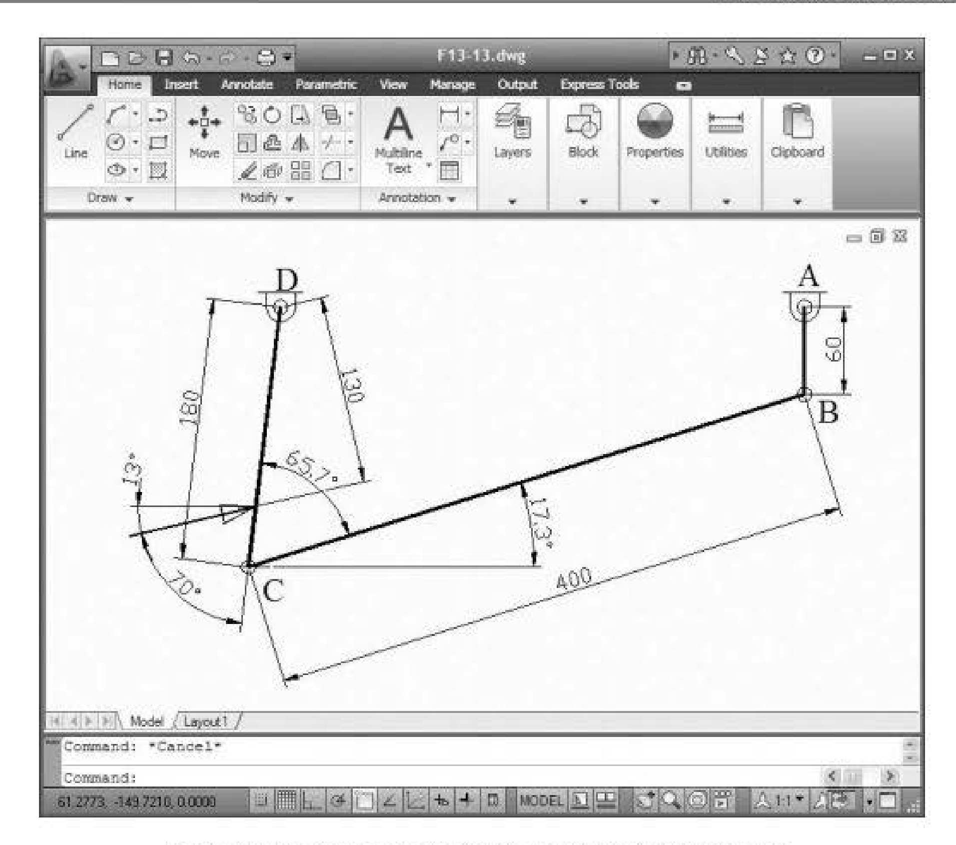


FIGURA 13.13 Diagrama de CAD del problema de ejemplo 13.4.

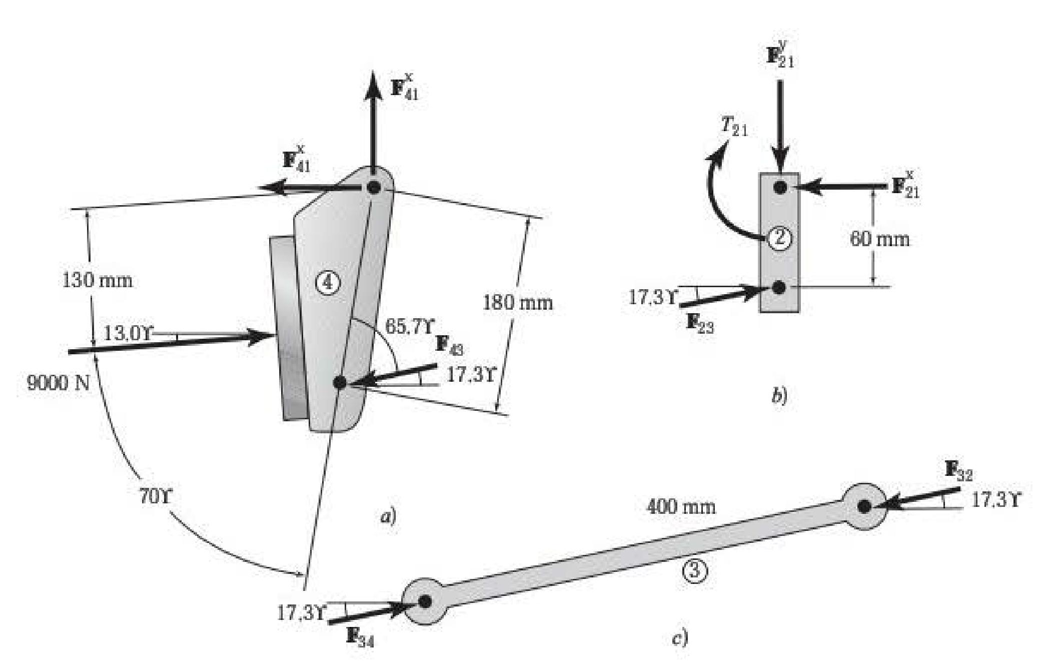


FIGURA 13.14 Diagramas de cuerpo libre del problema de ejemplo 13.4.

El eslabón 4 también contiene dos uniones de perno pero no es un elemento con dos fuerzas. La fuerza que tritura las rocas se aplica en un tercer punto sobre el eslabón. El ángulo de esta fuerza trituradora, a partir de la horizontal, se calcula a partir de los ángulos mostrados en la figura 13.13. Alineando los ángulos a lo largo de la horizontal,

$$180^\circ - 97.0^\circ - 70^\circ = 13.0^\circ$$

La tercera ley de Newton estipula también que la fuerza que actúa sobre el eslabón 4 en el punto C es igual y con sentido opuesto a $\mathbf{F}_{34}$. La unión general del perno D indica que se deben usar dos fuerzas de reacción. En la figura 13.14a se muestra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 4.

2. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 4***

El eslabón 4 se examina primero porque contiene la fuerza aplicada. Las tres fuerzas desconocidas sobre este eslabón (figura 13.11a) se obtienen usando las tres ecuaciones de equilibrio.

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma \mathbf{F}^{x} = 0$:

$$(9000\text{ N})\cos 13.0° - F_{43}\cos 17.3° - F_{41}^{x} = 0$$

$+\uparrow\ \Sigma \mathbf{F}^{y} = 0$:

$$(9000\text{ N})\,\text{sen}\,13.0° - \mathbf{F}_{43}\,\text{sen}\,17.3° + \mathbf{F}_{41}^{y} = 0$$

$+\circlearrowleft\ \Sigma M_D = 0$:

$$(9000\text{ N})(130\text{ mm}) - (\mathbf{F}_{43}\text{sen}\,65.7°)(180\text{ mm}) = 0$$

La solución de las tres ecuaciones produce:

$$\mathbf{F}_{43} = +7132\,\mathbf{N} = 7132\,\mathbf{N}\ \ \overline{17.3°}\swarrow$$

$$\mathbf{F}_{41}^{x} = +1960\,\mathbf{N} = 1960\,\mathbf{N}\leftarrow$$

$$\mathbf{F}_{41}^{y} = +96.3\text{ N} = 96.3\text{ N}\uparrow$$

3. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 3***

Como el eslabón 3 es un elemento con dos fuerzas (figura 13.14c), las ecuaciones de equilibrio indican que las fuerzas son de la misma magnitud, actúan a lo largo de la misma línea y tienen sentidos opuestos. Desde luego, la tercera ley de Newton indica que $\mathbf{F}_{34} = \mathbf{F}_{43}$. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el eslabón 3 son:

$$\mathbf{F}_{34} = 7132\,\mathbf{N}\ \ \nearrow\underline{17.3°}$$

$$\mathbf{F}_{32} = 7132\,\mathbf{N}\ \ \overline{17.3°}\swarrow$$

4. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 4***

El diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 (figura 13.14b) revela el torque instantáneo requerido para operar el dispositivo. Por supuesto, la tercera ley de Newton indica que $\mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}_{32}$.

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma \mathbf{F}^{x} = 0$:

$$-\mathbf{F}_{21}^{x} + \mathbf{F}_{23}\cos 17.3° = 0$$

$^{+}\uparrow\ \Sigma \mathbf{F}^{y} = 0$:

$$-\mathbf{F}_{21}^{y} + \mathbf{F}_{23}\,\text{sen}\,17.3° = 0$$

$+\circlearrowleft\ \Sigma M^{A} = 0$:

$$-T_{21} + (\mathbf{F}_{23}\cos 17.3°)(60\text{ mm}) = 0$$

La solución de las tres ecuaciones produce:

$$\mathbf{F}_{21}^{x} = +6809\,\mathbf{N} = 6809\,\mathbf{N}\leftarrow$$

$$\mathbf{F}_{21}^{y} = +2121\,\mathbf{N} = 212\,\mathbf{N}\downarrow$$

$$T_{21} = +408561\text{ Nmm} = 409\text{ Nm, en sentido horario}$$

Como el valor deseado es el torque, únicamente es necesario resolver la ecuación del momento.

13.8 FUERZA DE FRICCIÓN DE DESLIZAMIENTO

Como se indicó en la sección 13.5, una fuerza de contacto, como resultado de una unión de corredera, siempre actúa perpendicular a la superficie de contacto. Esta fuerza se conoce comúnmente como *fuerza normal* porque actúa perpendicularmente a las superficies en contacto.

Cuando no se puede ignorar la fuerza de fricción en el análisis de una máquina, se incluye una fuerza adicional, la *fuerza de fricción* $\mathbf{F}_f$. La fricción siempre actúa para impedir el movimiento. Por lo tanto, la fuerza de fricción actúa sobre un eslabón que se desliza, perpendicular a la fuerza normal, y en dirección opuesta al movimiento (velocidad).

En un cuerpo inmóvil, la fricción funciona para impedir el movimiento hasta que se alcanza la máxima fuerza de fricción. Este valor máximo es una función del *coeficiente de fricción* μ, que es una propiedad que se determina experimentalmente y depende de los materiales y las condiciones de la superficie de los eslabones en contacto. En la tabla 13.1 se incluyen valores promedio de los coeficientes de fricción para materiales comunes. La magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre las componentes deslizantes se calcula como:

$$\mathbf{F}_f = \mu \mathbf{N} \qquad (13.6)$$

Como se mencionó, en objetos que se mueven, la fuerza de fricción actúa en sentido opuesto a la dirección del movimiento deslizante relativo.

TABLA 13.1 Coeficientes aproximados de fricción de deslizamiento

		Seco	Lubricado
Acero endurecido	Sobre acero endurecido	0.45	0.08
	Sobre Babbit	0.35	0.15
Acero dulce	Sobre acero dulce	0.60	0.12
	Sobre bronce	0.34	0.17
	Sobre latón	0.44	—
	Sobre cobre con plomo	0.36	0.15
	Sobre hierro colado	0.23	0.13
	Sobre plomo	0.95	0.30
	Sobre aluminio	0.50	—
	Sobre plástico laminado	0.35	0.05
	Sobre teflón	—	0.04
Hierro colado	Sobre hierro colado	0.15	0.07
	Sobre bronce	0.22	0.07
	Sobre latón	0.30	—
	Sobre cobre	0.29	—
	Sobre zinc	0.21	—
Aluminio	Sobre aluminio	1.40	—

PROBLEMA DE EJEMPLO 13.5

El mecanismo de yugo escocés mostrado en la figura 13.15 sirve para impulsar una válvula. Conforme el fluido se bombea en el cilindro, la presión creciente impulsa el mecanismo y aplica un torque al eje de salida. Este torque se utiliza para activar (abrir y cerrar) las válvulas. En el instante mostrado, la carga de presión sobre el pistón es de 25 lb. Determine el torque generado sobre el eje de salida. El coeficiente de fricción entre el perno seguidor y la ranura en la cruceta es de 0.15.

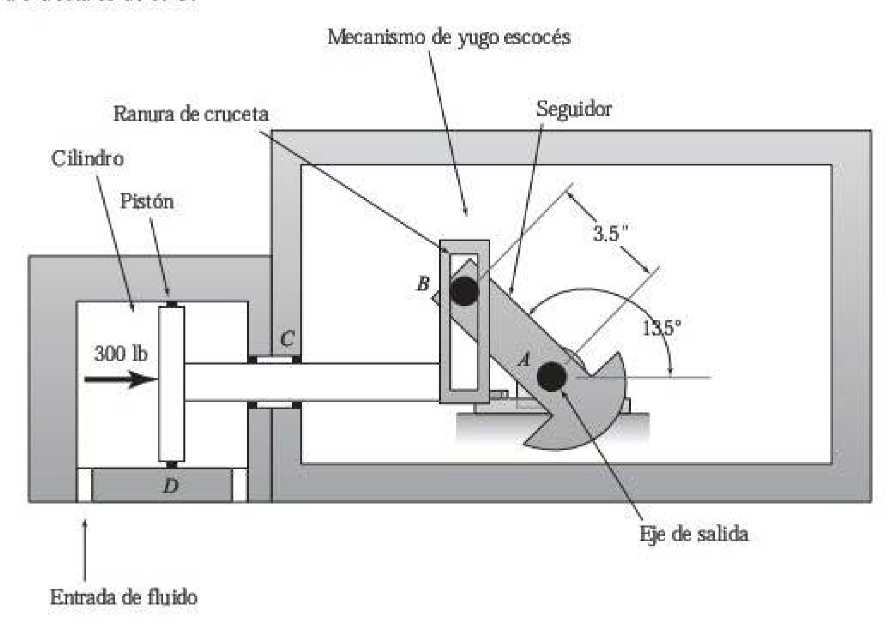


FIGURA 13.15 Impulsor de la válvula del problema de ejemplo 13.5.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático del mecanismo***

En la figura 13.16 se presenta el diagrama cinemático del mecanismo de yugo escocés.

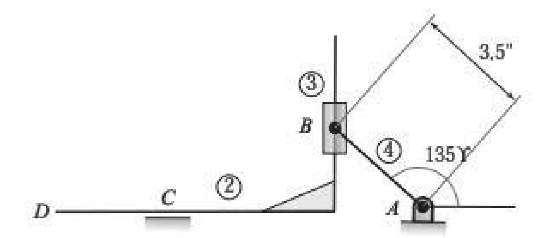


FIGURA 13.16 Diagrama cinemático del problema de ejemplo 13.5.

2. ***Elabore los diagramas de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo***

El eslabón 2 es el ensamble de cruceta en la ranura y el pistón/varilla. El eslabón 4 es el seguidor. Observe que el eslabón 3 no es un eslabón tangible. Se utiliza como una simulación cinemática para separar la unión de giro sobre el seguidor y la unión de corredera en la ranura de la cruceta. Entonces, el mecanismo se modela con todas las uniones de menor orden. El diagrama cinemático tiene cuatro eslabones, dos uniones de perno y, por ende, un grado de libertad. El impulsor de este mecanismo es el movimiento del fluido dentro del cilindro.

En la figura 13.17 se ilustran los diagramas de cuerpo libre de los eslabones 2 y 4. El eslabón 3 no se requiere en el análisis de fuerza. Advierta que la fuerza de fricción se muestra en sentido opuesto al movimiento relativo. La dirección quizá parezca confusa y necesite una explicación adicional.

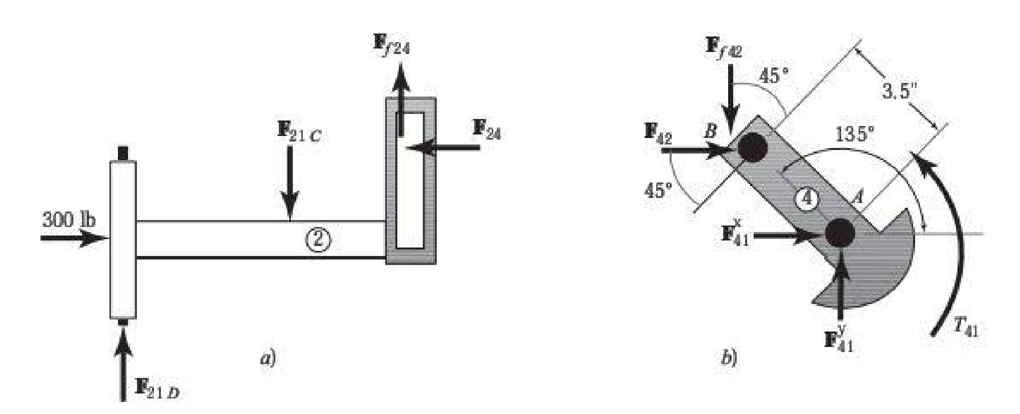


FIGURA 13.17 Diagramas de cuerpo libre del problema de ejemplo 13.5.

Considere el eslabón 4 (figura 13.17b). El perno se mueve hacia arriba en relación con la ranura de la cruceta. Por lo tanto, la fricción actúa hacia abajo para impedir este movimiento del perno. Asimismo, considere el eslabón 2 (figura 13.17a). La ranura se mueve hacia abajo en relación con el perno (recuerde la definición de movimiento relativo). Entonces, la fricción actuará hacia arriba para evitar este movimiento de la ranura.

3. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 2***

El eslabón 2 (figura 13.17a) se examina primero porque contiene la fuerza aplicada. En este análisis, solo se requiere la ecuación de equilibrio en *x*.

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma \mathbf{F}^x = 0:$

$$\mathbf{F}_{24} = 300 \text{ lb} \leftarrow$$

4. ***Obtenga las ecuaciones de equilibrio del eslabón 4***

El diagrama de cuerpo libre del eslabón 4 (figura 13.17b) mostrará el torque en el eje de salida. Desde luego, la primera ley de Newton indica que $\mathbf{F}_{42} = \mathbf{F}_{24}$.

$$\mathbf{F}_{f42} = \mu \mathbf{F}_{42} = (0.15)(300 \text{ lb}) = 45 \text{ lb}$$

El torque se determina usando la ecuación de momento de equilibrio.

$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A = 0:$

$$-(\mathbf{F}_{42}\cos 45°)(3.5\text{in}) + (\mu\mathbf{F}_{42}\cos 45°)(3.5\text{in}) + T_{21} = 0$$

$$-\ [(300\text{ lb})\cos 45°](3.5\text{in}) + [(45\text{ lb})\cos 45°(3.5\text{ in})] + T_{21} = 0$$

Finalmente, el torque ejercido sobre el eje de salida es:

$$T_{21} = +631\text{ lb-in} = 631\text{ lb-in, en sentido horario}$$

PROBLEMAS

Fuerza resultante

13–1. Determine la resultante de las fuerzas que se ilustran en la figura P13.1, cuando $\beta = 25°$.

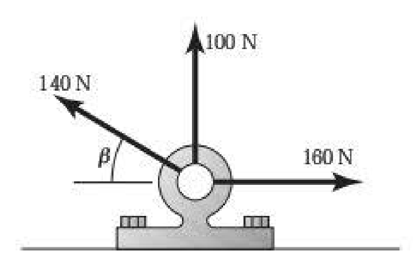


FIGURA P13.1 Problemas 1 a 3.

13–2. Determine la resultante de las fuerzas que se muestran en la figura P13.1, cuando $\beta = 65°$.

13–3. Determine la resultante de las fuerzas mostradas en la figura P13.1, cuando $\beta = 105°$.

Momento de una fuerza

13–4. Se aplica una fuerza a una llave de caja como la mostrada en la figura P13.4. Determine el momento, en relación con el centro de la tuerca, cuando $\beta = 90°$.

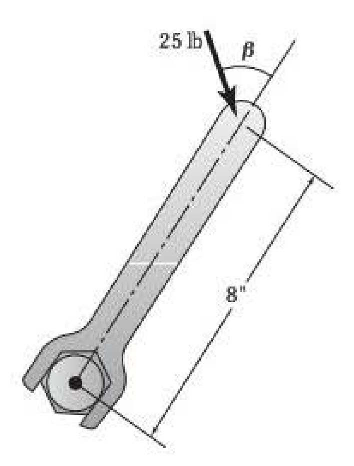


FIGURA P13.4 Problemas 4 a 6.

13–5. Se aplica una fuerza a una llave de caja como la mostrada en la figura P13.4. Determine el momento, en relación con el centro de la tuerca, cuando $\beta = 75°$.

13–6. Se aplica una fuerza a una llave de caja como la mostrada en la figura P13.4. Determine el momento, en relación con el centro de la tuerca, cuando $\beta = 110°$.

13–7. Se aplica una fuerza a la palanca de control mostrada en la figura P13.7. Determine el momento en relación con el pivote fijo, cuando $\beta = 0°$.

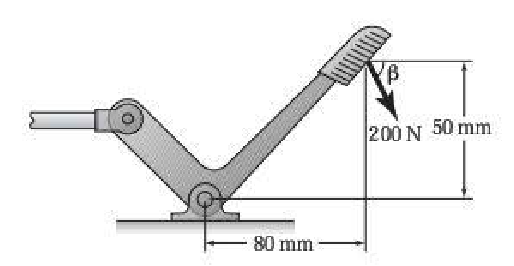


FIGURA P13.7 Problemas 7 a 9.

13–8. Se aplica una fuerza a la palanca de control mostrada en la figura P13.7. Determine el momento en relación con el pivote fijo, cuando $\beta = 60°$.

13–9. Se aplica una fuerza a la palanca de control mostrada en la figura P13.7. Determine el momento en relación con el pivote fijo, cuando $\beta = 130°$.

Fuerzas estáticas en una máquina

13–10. La figura P13.10 presenta un dispositivo levadizo. Si se aplica una fuerza de 600 lb en la parte superior de la grúa mientras el mecanismo está inmóvil, determine la fuerza requerida en el cilindro. La parte superior de la grúa pesa 80 lb y el peso del cilindro es insignificante.

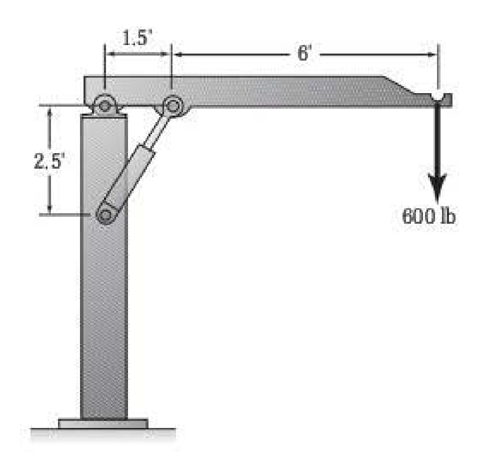


FIGURA P13.10 Problema 10.

13–11. La figura P13.11 muestra un mecanismo que eleva paquetes en un mecanismo de transferencia. Si un paquete de 100 N descansa sobre el eslabón horizontal mientras el mecanismo está inmóvil, determine el torque requerido del motor. Los pesos de los eslabones son insignificantes.

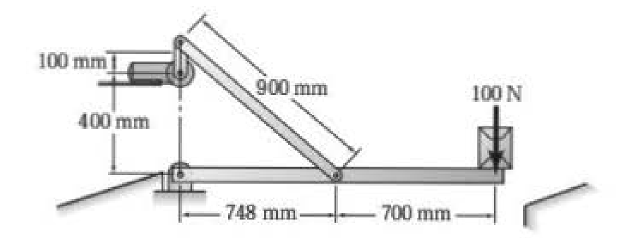


FIGURA P13.11 Problema 11.

13–12. La figura P13.12 presenta un mecanismo que sirve para cortar hojas de metal delgadas. Si se aplica una fuerza de 200 N como se indica, determine la fuerza sobre la hoja de metal. Los pesos de los eslabones son insignificantes.

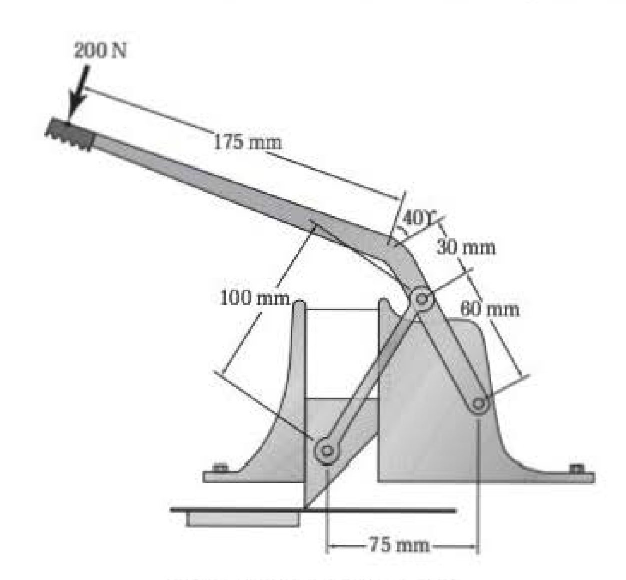


FIGURA P13.12 Problema 12.

13–13. La figura P13.13 ilustra una plataforma ajustable que sirve para cargar y descargar camiones-refrigeradores. Actualmente está ubicado un contenedor de 1200 lb como se indica. La plataforma pesa 400 lb, y el peso de los demás eslabones se considera insignificante.

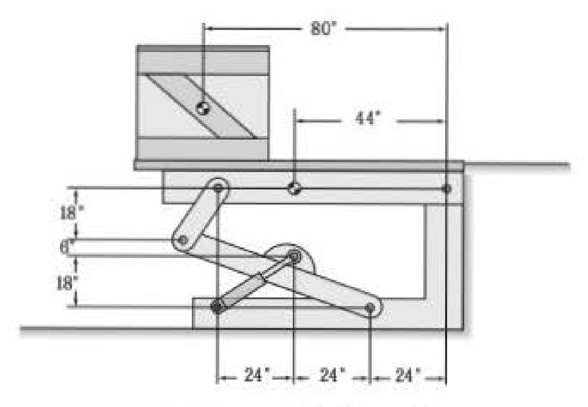


FIGURA P13.13 Problema 13.

13–14. El sujetador mostrado en la figura P13.14 tiene una carga nominal de 1500 lb. Determine la fuerza de compresión que esto crea en la varilla roscada, *AB*.

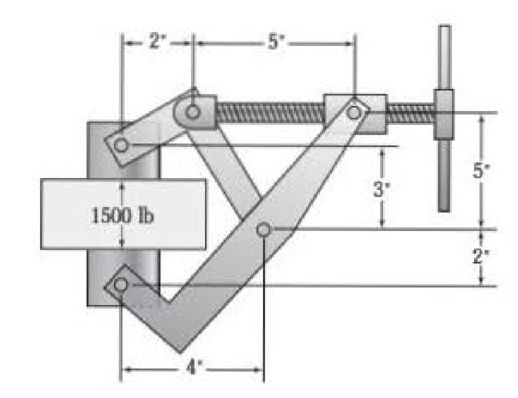


FIGURA P13.14 Problema 14.

13–15. En la figura P13.15 se presenta un vehículo utilitario con una grúa. Determine la fuerza requerida por el cilindro hidráulico para mantener la posición de la cesta.

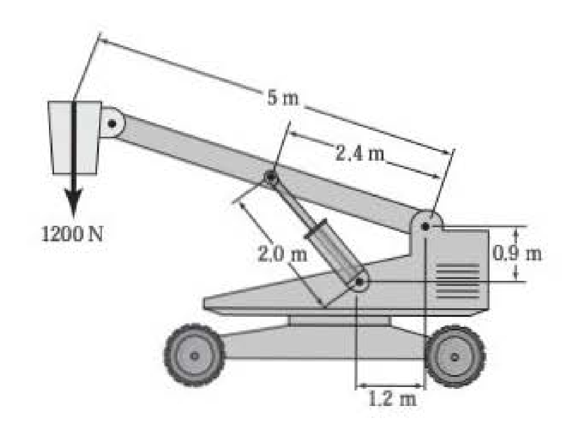


FIGURA P13.15 Problema 15.

13–16. En la figura P13.16 se ilustra un cargador frontal. Determine la fuerza requerida por ambos cilindros hidráulicos para mantener la posición de la pala.

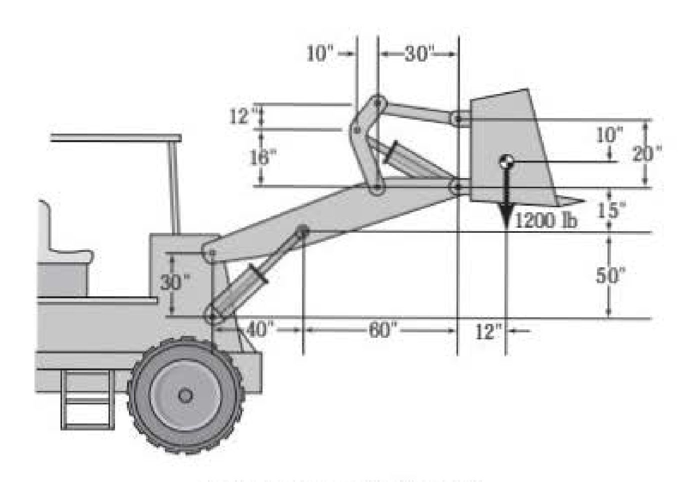


FIGURA P13.16 Problema 16.

13–17. Una caja de embalaje de 500 lb está soportada por una mesa levadiza, como se indica en la figura P13.17. Determine la fuerza requerida en el cilindro hidráulico, para mantener la plataforma en la posición mostrada.

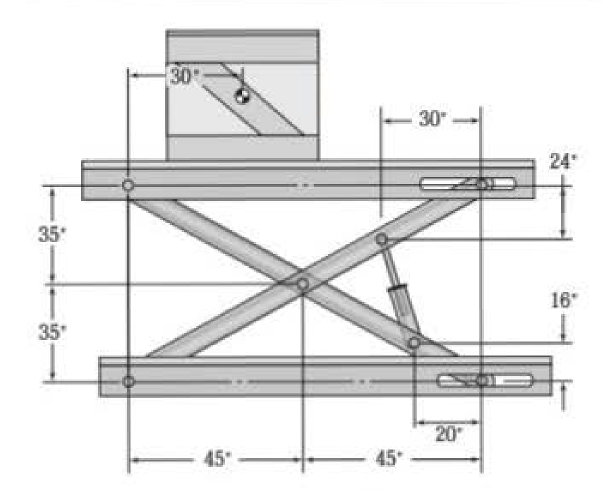


FIGURA P13.17 Problema 17.

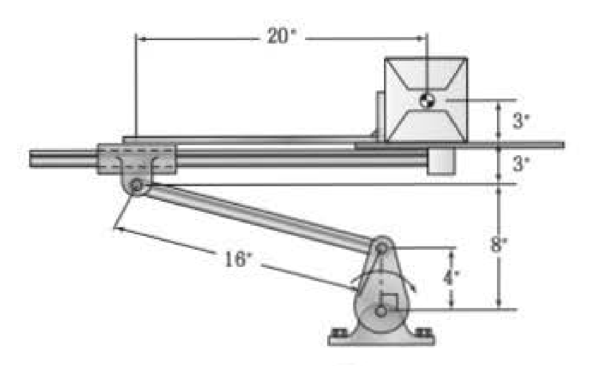


FIGURA P13.19 Problema 19.

13–18. La figura P13.18 muestra un camión para recolectar desechos capaz de mover un contenedor a partir de una posición baja, como se indica, a una posición elevada y volteada. La gravedad desaloja el contenido hacia la caja del camión. El contenedor pesa 2400 lb y dos horquetas frontales comparten el peso por partes iguales. Determine la fuerza en los dos cilindros hidráulicos.

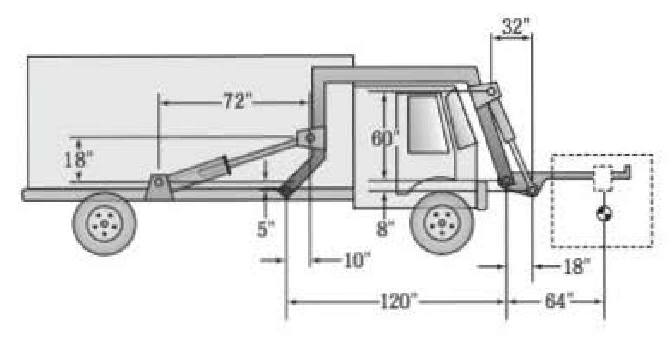


FIGURA P13.18 Problema 18.

13–19. La figura P13.19 ilustra un mecanismo para manejo de materiales que desliza paquetes de 8 lb a lo largo de un mostrador. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el mostrador es de 0.25. El coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la varilla es de 0.10. Determine el torque instantáneo requerido para operar este mecanismo, el cual funciona a baja velocidad, de modo que las fuerzas inerciales sean insignificantes.

ESTUDIO DE CASO

13–1. La figura E13.1 ilustra un mecanismo que da movimiento al destapador de inodoros *J*. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas, para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

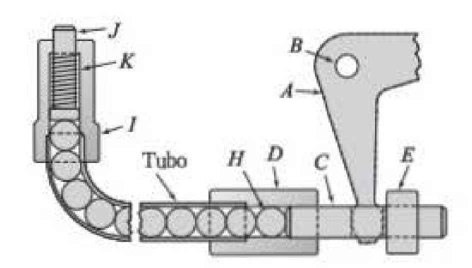


FIGURA E13.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Cuando gira la palanca *A*, ¿qué tipo de movimiento presenta *C*?
2. ¿Qué tipo de junta tienen las piezas *A* y *C*?
3. ¿Qué tipo de movimiento tiene la bola *H*?
4. ¿Qué tipo de movimiento tiene el destapador *J*?
5. ¿Cuál es el propósito del resorte *K*?
6. ¿Cuál es el propósito de la pieza *E*?
7. ¿Cuál es el propósito de este mecanismo?
8. Compare este mecanismo con otro concepto mecánico que tenga el mismo objetivo.

ANÁLISIS DE FUERZAS DINÁMICAS

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Entender la diferencia entre masa y peso.**
2. **Calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo un parecido con una forma básica o a partir del radio de giro.**
3. **Transferir el momento de inercia a un eje de referencia alternativo.**
4. **Calcular las fuerzas y los torques inerciales.**
5. **Determinar las fuerzas, incluyendo la inercia, que actúan en un mecanismo.**

14.1 INTRODUCCIÓN

En el diseño de una máquina, la determinación de las fuerzas que operan es una tarea fundamental. Considere el desarrollo de un sistema de limpiadores para automóvil. Una tarea clave consiste en la selección del motor eléctrico que impulsará los limpiadores. El torque requerido para operar el sistema es el atributo principal en este proceso de selección. Se deben considerar diferentes escenarios, como el hecho de que el automóvil podría estacionarse debajo de un árbol de maple. El aumento de la fricción en los limpiadores como producto de la savia que cae del árbol demandaría un mayor torque al motor. Un escenario común se presenta durante los periodos de fuertes lluvias. Los limpiadores tienen que operar en un entorno de alta velocidad. Cuando los limpiadores oscilan a velocidades mayores, se generan aceleraciones más grandes. Como producto de las grandes aceleraciones, se crearán fuerzas inerciales. Estas fuerzas podrían ser lo suficientemente grandes como para dañar las componentes del sistema de limpiadores. De hecho, las fuerzas inerciales creadas por el movimiento de muchas máquinas de alta velocidad exceden las fuerzas requeridas para ejecutar la tarea encomendada. En un motor reciprocante de combustión interna, como el de un automóvil, las fuerzas inerciales podrían ser más grandes que la fuerza producida por la presión del gas. En una turbina de gas, las fuerzas inerciales sobre los cojinetes, debidas al desequilibrio del rotor pueden ser magnitudes más grandes que el peso mismo del rotor.

Por lo tanto, en máquinas con aceleraciones significativas, es necesario un análisis de fuerzas dinámicas. En el capítulo anterior se trató el análisis de fuerzas en mecanismos sin aceleraciones. Este capítulo examina el análisis de fuerzas en máquinas con aceleraciones considerables. Esta situación se conoce como *equilibrio dinámico*. El análisis de equilibrio dinámico utiliza muchos conceptos de equilibrio estático, de manera que antes de estudiar este capítulo es necesario conocer los temas presentados en el capítulo anterior.

14.2 MASA Y PESO

La masa y el peso no son idénticos. La *masa*, *m*, mide la cantidad de materia de un cuerpo. La masa también se describe como la resistencia de un objeto a la aceleración. Resulta más difícil "acelerar" un objeto con masa grande.

El *peso* **W** de un cuerpo es la medida de la atracción de la gravedad sobre él. Por ende, el peso es una fuerza dirigida hacia el centro de la tierra. La *aceleración de la gravedad g* varía dependiendo de la ubicación relativa de la atracción de la gravedad. Entonces, el peso de un objeto varía. La masa, sin embargo, es una cantidad que no cambia con la atracción de la gravedad. Como ya se dijo, sirve para describir la cantidad de materia en un objeto.

Las magnitudes del peso y de la masa están relacionadas por la ley de Newton de la gravitación.

$$\mathbf{W} = mg \tag{14.1}$$

En la mayoría de los análisis sobre la tierra, la aceleración de la gravedad se supone como:

$$g = 32.2\,\text{ft/s}^2 = 386.4\,\text{in/s}^2 = 9.81\,\text{m/s}^2 = 9810\,\text{mm/s}^2$$

Este supuesto es aplicable a todas las máquinas y los mecanismos estudiados en este libro. Desde luego, en el caso del diseño de máquinas para uso en el espacio exterior, existen diferentes atracciones gravitacionales.

La masa y el peso con frecuencia se confunden en el sistema tradicional estadounidense; es más conveniente usar una unidad derivada de la masa: el slug, que es resultado directo de la ecuación (14.1):

$$\text{slug} = [\text{lb/ft/s}^2] = \text{lb s}^2/\text{ft}$$

Ocasionalmente, también se emplea la libra-masa (lb_m) como medida de la masa. Esta es la masa que pesa una libra en la superficie de la Tierra. Suponiendo que se aplica el valor estándar

de la gravedad, la libra-masa se convierte a slug de la siguiente manera:

$$1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lb}_m$$

En general, cualquier cálculo en el sistema tradicional estadounidense debería usar el slug como unidad de masa. En el sistema internacional, la unidad de masa que se usa comúnmente es el kilogramo (kg = N s^2/m).

14.3 CENTRO DE GRAVEDAD

El *centro de gravedad cg* de un cuerpo es el punto de equilibrio de ese cuerpo. Es decir, es el único punto donde es posible sostener el peso del objeto y permanecer en equilibrio en todas las direcciones. En componentes hechos de material homogéneo, el *cg* es el centro geométrico tridimensional de la componente. En muchos elementos simples, como un cilindro, el centro geométrico es evidente. En el análisis de fuerzas, la ubicación del centro de gravedad se vuelve importante, porque esta es la ubicación de la fuerza de gravedad, o peso. En el análisis de fuerzas dinámicas, cualquier efecto de inercia debido a la aceleración de la parte también actuará en este punto.

En elementos complejos, la ubicación del centro de gravedad no es obvia. Un método común para ubicar el centro de gravedad es dividir el elemento complejo en formas simples, donde el centro de gravedad de cada una sea evidente. El centro de gravedad compuesto se determina a partir del promedio ponderado de las coordenadas de los *centros de gravedad* individuales. Por ejemplo, la componente *x* del centro de gravedad de una forma compuesta se calcula con la siguiente ecuación:

$$x_{cg\,\text{total}} = \frac{m_1 x_{cg\,1} + m_2 x_{cg\,2} + m_3 x_{cg\,3} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} \quad (14.2)$$

Como la aceleración de la gravedad es la misma en todo el cuerpo, el peso se sustituye por la masa en la ecuación (14.2). Desde luego, se pueden escribir ecuaciones similares para las coordenadas *y* y *z* del centro de gravedad.

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.1

La parte mostrada en la figura 14.1 está hecha de acero (0.283 lb/in^3). Determine las coordenadas del centro de gravedad.

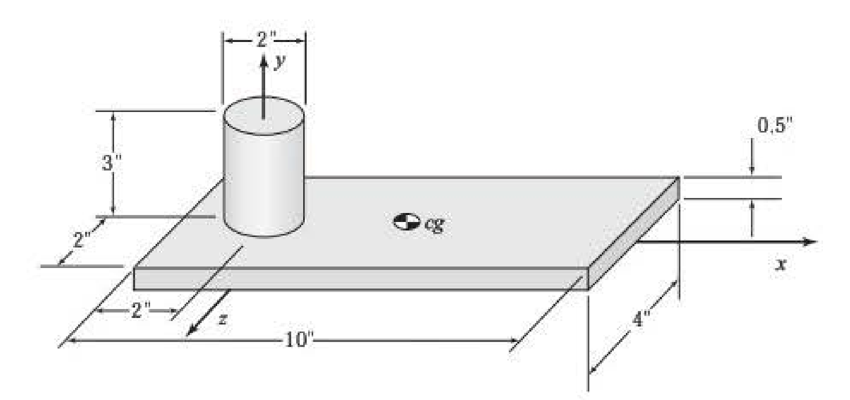


FIGURA 14.1 Parte del problema de ejemplo 14.1.

SOLUCIÓN:

1. ***Divida el eslabón en formas básicas***

   Esta parte se divide fácilmente en dos componentes. La placa de abajo se designará como componente 1, y el eje de arriba se designará como componente 2.

2. ***Calcule el peso de las formas básicas***

   El peso de las partes se determina calculando el volumen de las partes y multiplicándolo por la densidad del acero.

$$W_1 = 10.283 \text{ lb/in}^3 [(10 \text{ in})(4 \text{ in})(0.5 \text{ in})] = 5.66 \text{ lb}$$

$$W_2 = (0.283 \text{ lb/in}^3)\left[\frac{\pi}{4}(2 \text{ in})^2(3 \text{ in})\right] = 5.33 \text{ lb}$$

Estos pesos y las coordenadas del *cg* se observan en la tabla 14.1.

TABLA 14.1 Datos de las formas básicas del problema de ejemplo 14.1

Componente	Peso (lb)	x_{cg} (in)	y_{cg} (in)	z_{cg} (in)
1	5.66	(10/2 - 2) = 3	(0.5/2) = 0.25	0
2	5.33	0	(0.5/2) = 0.25	0

3. ***Con la ecuación (14.2) calcule las coordenadas del centro de gravedad***

Se calculan las coordenadas del centro de gravedad.

$$x_{cg\,total} = \frac{W_{parte\,1}x_{cg\,parte\,1} + W_{parte\,2}x_{cg\,parte\,2}}{W_{parte\,1} + W_{parte\,2}}$$

$$= \frac{(5.66\text{ lb})(3\text{ in}) + (5.33\text{ lb})(0\text{ in})}{(5.66 + 5.33)\text{ lb}} = 1.545\text{ in}$$

$$y_{cg\,total} = \frac{W_{parte\,1}y_{cg\,parte\,1} + W_{parte\,2}y_{cg\,parte\,2}}{W_{parte\,1} + W_{parte\,2}}$$

$$= \frac{(5.66\text{ lb})(0.25\text{ in}) + (5.33\text{ lb})(2\text{ in})}{(5.66 + 5.33)\text{ lb}} = 1.099\text{ in}$$

El centro de gravedad de ambas partes permanece sobre el eje z. Por consiguiente, el centro de gravedad de la parte compuesta (total) también permanece sobre el eje z. Entonces,

$$z_{cg\,total} = 0$$

14.4 MOMENTO DE INERCIA

El *momento de inercia I* de una parte mide la resistencia de la parte a la aceleración angular. Es más difícil "acelerar" un objeto que gira con un momento de inercia grande. El momento de inercia de una masa, o simplemente momento de inercia, depende de la masa del objeto además de la forma y el tamaño del mismo. Asimismo, la inercia es una propiedad que se define en relación con un punto de referencia (o un eje, cuando se consideran tres dimensiones). Este punto de referencia es generalmente el centro de gravedad de la parte.

La figura 14.2 muestra un objeto sólido cualquiera. Observe que se resalta un pequeño elemento del objeto. El momento de inercia de este elemento pequeño se determina multiplicando su masa, dm, por el cuadrado de la distancia, r, a un eje de referencia, z. Esta distancia es la distancia perpendicular del eje al elemento arbitrario dm.

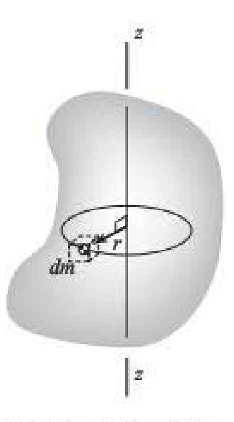


FIGURA 14.2 Un objeto sólido general.

El momento de inercia del objeto entero es la suma de todos los momentos de todas las partículas que integran el objeto. Matemáticamente, el momento de inercia se expresa como:

$$I_z = \int r^2\, dm \qquad \textbf{(14.3)}$$

Como la definición implica r, el valor del momento de inercia es diferente para cada eje. Por ejemplo, considere una varilla delgada. El momento de inercia en relación con su eje longitudinal será pequeño porque r es pequeño para cada elemento de la varilla. Para un eje perpendicular a la varilla, el momento de inercia será grande porque r es grande para los elementos más alejados del eje.

El momento de inercia de una masa se expresa en unidades de masa por unidades de longitud al cuadrado. En el sistema tradicional estadounidense, las unidades comunes son slug-pies cuadrados (slug ft^2), que se convierten a libras-pies-segundos al cuadrado (lb ft s^2). En el sistema internacional, las unidades comunes que se utilizan son kilogramo-metros cuadrados (kg m^2).

14.4.1 Momento de inercia de formas básicas

Se usó la ecuación (14.2) para deducir las ecuaciones de formas primarias. La tabla 14.2 proporciona estas ecuaciones, las cuales sirven para calcular el momento de inercia de formas sólidas comunes con densidad uniforme.

TABLA 14.2 Momentos de inercia

Nombre de la forma	Interpretación gráfica	Momento de inercia
Cilindro		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$
Varilla delgada		$I_x = 0$ $I_y = \frac{1}{12}[ml^2]$ $I_z = \frac{1}{12}[ml^2]$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{4}[mr^2]$ $I_z = \frac{1}{4}[mr^2]$
Bloque rectangular		$I_x = \frac{1}{12}[m(w^2 + h^2)]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(w^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(h^2 + l^2)]$

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.2

La parte de la figura 14.3 pesa 3 lb. Determine el momento de inercia de la parte, en relación con el eje x en el centro de la parte.

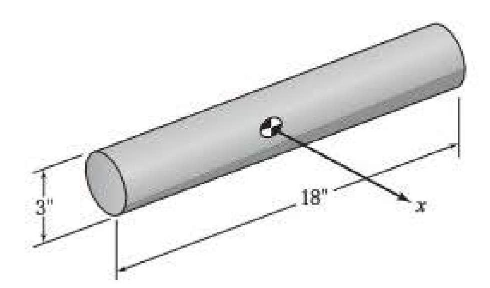


FIGURA 14.3 Parte del problema de ejemplo 14.2.

SOLUCIÓN: 1. ***Determine la masa de la parte***

La parte pesa 3 lb y se supone que se usará en la superficie de la tierra. La masa se calcula usando la ecuación (14.1).

$$m = \frac{\mathbf{W}}{g} = \frac{3\,\text{lb}}{32.2\,\text{ft/s}^2} = 0.093\,\text{slug}$$

2. ***Calcule el momento de inercia (cilindro sólido)***

En sentido estricto, esta parte es un cilindro sólido con:

$$r = 1.5 \text{ in} = 0.125 \text{ ft}$$

$$l = 18 \text{ in} = 1.5 \text{ ft}$$

El eje z en la tabla 14.2 es equivalente al eje x del análisis. El momento de inercia en relación con este eje en el centro de la parte es:

$$I_x = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)] = \frac{1}{12}[0.093 \text{ slug}(3(0.125 \text{ ft})^2 + (1.5 \text{ ft})^2)]$$

$$= 0.0178 \text{ slug ft}^2 = 0.0178 \text{ lb ft s}^2$$

3. ***Calcule el momento de inercia (varilla delgada)***

Esta parte se aproxima como una varilla delgada. Usando este supuesto, el momento de inercia se calcula a partir de la tabla 14.2 como:

$$I_x = \frac{1}{12}[m(l)^2] = \frac{1}{12}[0.093 \text{ slug } (1.5 \text{ ft})^2]$$

$$= 0.0174 \text{ slug ft}^2 = 0.0174 \text{ lb ft s}^2$$

La suposición de la varilla delgada subestima el momento de inercia real por solo 1.15%. Aparentemente, esta parte podría aproximarse como una varilla delgada.

14.4.2 Radio de giro

En ocasiones, el momento de inercia de una parte con respecto a un eje específico se encuentra en manuales que usan el *radio de giro k*. Conceptualmente, el radio de giro es la distancia del centro de gravedad al punto donde podría concentrarse el total de la masa y tener el mismo momento de inercia.

El radio de giro se utiliza para calcular el momento de inercia, de la siguiente manera:

$$I = mk^2 \qquad \textbf{(14.4)}$$

El radio de giro se expresa en unidades de longitud. En el sistema tradicional estadounidense, las unidades comunes son pies (ft) o pulgadas (in). En el sistema internacional, las unidades comunes que se usan son metros (m) o milímetros (mm).

14.4.3 Teorema de los ejes paralelos

El momento de inercia se define en relación con un eje. A veces se requerirá el momento de inercia en relación con un eje paralelo alternativo. Para realizar dicha tarea, se ha derivado una ecuación de transferencia a un eje paralelo [ref. 11]. Para transferir el momento de inercia del eje x a un eje paralelo x', la ecuación de transferencia es:

$$I_{x'} = I_x \pm md^2 \qquad \textbf{(14.5)}$$

El valor d en la ecuación (14.5) es la distancia perpendicular entre los dos ejes. Observe que el segundo término de la ecuación (14.5) se suma o se resta. El término se suma cuando el eje de referencia se aleja del centro de gravedad de la forma básica. Por el contrario, el término se resta cuando la transferencia se acerca hacia el centro de gravedad.

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.3

Para la parte mostrada en la figura 14.4, determine el momento de inercia de la parte en relación con el eje x en el extremo de la parte.

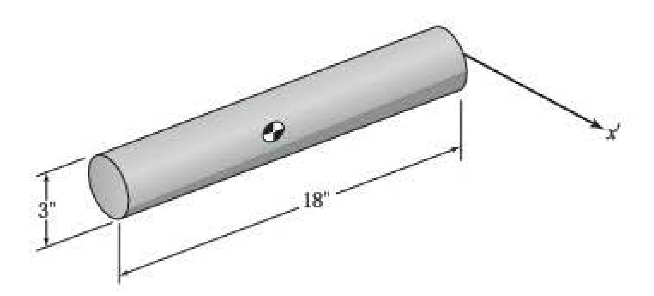


FIGURA 14.4 Parte del problema de ejemplo 14.3.

SOLUCIÓN: El momento de inercia en relación con el centro de la parte se determinó en el problema de ejemplo 14.2 como:

$$I_x = 0.0178 \text{ slug ft}^2$$

La distancia de la transferencia del centro al extremo de la parte es:

$$d = 9 \text{ in} = 0.75 \text{ ft}$$

Se usa la ecuación (14.5) para transferir el eje de referencia al extremo de la parte. Observe que el segundo término se suma porque la transferencia se aleja del centro de gravedad.

$$I_{x'} = I_x + md^2 = 0.0178 \text{slug ft}^2 + (0.093 \text{ slug})(0.75 \text{ ft})^2$$

$$= 0.0701 \text{ slug ft}^2 = 0.0701 \text{ lb ft s}^2$$

14.4.4 Cuerpos compuestos

En la práctica, las partes no siempre pueden aproximarse simplemente a las formas básicas de la tabla 14.2. Sin embargo, para partes más complejas, la determinación del momento de inercia se obtiene dividiendo las partes complejas en varias formas básicas de la tabla 14.2. Se calcula el momento de cada forma básica en relación con un eje que pase a través del centro de la parte completa. Finalmente, se determina el momento de inercia total combinando los valores de las formas individuales.

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.4

La parte mostrada en la figura 14.5 está hecha de acero. Determine el momento de inercia de la parte en relación con el eje *y* en el centro de la parte.

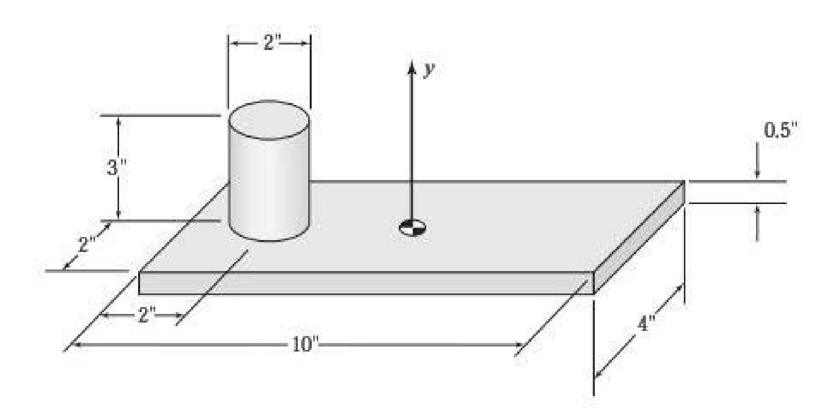


FIGURA 14.5 Parte del problema de ejemplo 14.4.

SOLUCIÓN:

1. ***Identifique las formas básicas y determine su masa***

La parte se divide en dos formas componentes, como en el problema de ejemplo 14.1. Usando los pesos determinados en ese problema, la masa de las dos partes es:

$$m_1 = \frac{\mathbf{W}_1}{g} = \frac{5.66 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.176 \text{ slug}$$

$$m_2 = \frac{\mathbf{W}_2}{g} = \frac{5.33 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.165 \text{ slug}$$

2. ***Determine el momento de inercia centroidal de las formas básicas***

La componente 1 es un bloque rectangular y el componente 2 es un cilindro. Usando la tabla 14.2, el momento de inercia de cada parte se determina en relación con sus centros de gravedad individuales.

Componente 1:

$$I_y = \frac{1}{12}\,[m(w^2 + l^2)] = \frac{1}{12}\,[0.176 \text{ slug }[(4 \text{ in})^2 + (10 \text{ in})^2]$$

$$= 0.701 \text{ slug in}^2 = 0.0118 \text{ slug ft}^2 = 0.0118 \text{ lb ft s}^2$$

Componente 2:

$$I_y = \frac{1}{12}[m(r^2)] \quad \text{(eje longitudinal)} = \frac{1}{12}[0.165 \text{ slug}(1 \text{ in})^2]$$

$$= 0.0138 \text{ slug in}^2 = 0.0001 \text{ slug ft}^2 = 0.0001 \text{ lb ft s}^2$$

3. ***Aplique el teorema del eje paralelo***

La información del centro de gravedad, determinada en el problema de ejemplo 14.1, sirve para calcular el momento de inercia de cada componente en relación con el centro de gravedad compuesto. Se usa el teorema del eje paralelo para realizar esto. Observe que la distancia perpendicular en medio del eje y está a lo largo de la dirección x.

Componente 1:

$$d_1 = (3.0 - 1.099) \text{ in} = 1.901 \text{ in} = 0.158 \text{ ft}$$

$$I_{y'(\text{componente1})} = I_{y(\text{componente1})} + m_1 d_1^2 = 0.0118 \text{ slug ft}^2 + (0.176 \text{ slug})(0.158 \text{ ft})^2$$

$$= 0.0162 \text{ slug ft}^2 = 0.0162 \text{ lb ft s}^2$$

Componente 2:

$$d_2 = (1.099 - 0) \text{ in} = 1.099 \text{ in} = 0.092 \text{ ft}$$

$$I_{y'(\text{componente2})} = I_{y(\text{componente2})} + m_2 d_2^2 = 0.0001 \text{ slug ft}^2 + (0.165 \text{ slug})(0.0923 \text{ ft})^2$$

$$= 0.0015 \text{ slug ft}^2 = 0.0015 \text{ lb ft s}^2$$

4. ***Calcule el momento de inercia compuesto***

$$I_{y'} = I_{y'(\text{componente 1})} + I_{y'(\text{componente 2})}$$

$$= (0.0162 + 0.0015) \text{ slug ft}^2 = 0.0177 \text{ slug ft}^2 = 0.0177 \text{ lb ft s}^2$$

14.4.5 Momento de inercia: determinación experimental

Un método popular experimental para determinar el momento de inercia de una parte consiste en hacer girar esta como un péndulo. Este método se ilustra en la figura 14.6.

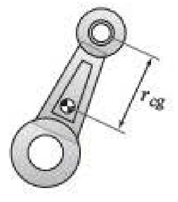


FIGURA 14.6 Experimento del momento de inercia.

La parte oscilará si se desplaza un ángulo pequeño y se libera. El momento de inercia se determina midiendo el tiempo Δt para completar una oscilación. El momento de inercia de la parte, en relación con un eje que pase a través del centro de gravedad, se ha establecido [ref. 11] como:

$$I_{cg} = m r_{cg}\left[\left(\frac{\Delta t}{2\pi}\right)^2 g - r_{cg}\right] \tag{14.6}$$

14.5 FUERZA INERCIAL

En la sección 13.4 se enunciaron las tres principales leyes de Newton de mecánica. La segunda ley es fundamental para las partes que experimentan aceleración y establece lo siguiente:

SEGUNDA LEY: Un cuerpo con una fuerza desequilibrante tiene:

a) Aceleración proporcional a la fuerza,
b) Aceleración en dirección de la fuerza y
c) Aceleración inversamente proporcional a la masa del objeto.

Para movimiento lineal, esta ley se establece en términos de la aceleración $\mathbf{A}_g$ del centro de gravedad del eslabón; de modo que,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{A}_g \tag{14.7}$$

La ecuación (14.7) se escribe como:

$$\Sigma \mathbf{F} -> m\mathbf{A}_g = 0 \tag{14.8}$$

Advierta que se emplea el símbolo de sustracción (−>) porque tanto la fuerza como la aceleración son vectores.

El segundo término de la ecuación (14.8) se conoce como la inercia de un cuerpo. Este término se define como la *fuerza inercial* $\mathbf{F}_g^i$

$$\mathbf{F}_g^i = -> m\mathbf{A}_g \qquad (14.9)$$

El signo negativo indicia que la fuerza inercial se opone a la aceleración (actúa en dirección opuesta a la aceleración). La inercia es una propiedad pasiva que no ayuda a un cuerpo a hacer algo, excepto a oponerse a la aceleración.

Este concepto se observa fácilmente. Imagine cómo un empuje súbito sobre el pedal del acelerador de un automóvil acelera violentamente el vehículo. Imagine la tendencia de su cabeza a moverse hacia atrás durante la aceleración. Esta es una fuerza inercial que actúa en dirección opuesta a la aceleración del automóvil. Además, la magnitud del movimiento de la cabeza hacia atrás es proporcional a la magnitud de la aceleración. De manera similar, cuando se frena súbitamente en un vehículo, el vehículo se desacelera y su cabeza da una sacudida hacia delante, otra vez en dirección opuesta a la aceleración del automóvil. Esta es la segunda ley de Newton en la práctica.

La ecuación (14.8) se reexpresa como

$$\Sigma \mathbf{F} +> \mathbf{F}_g^i = 0 \qquad (14.10)$$

El concepto de replantear la ecuación (14.7) en la forma de la ecuación (14.8) se conoce como *principio de d'Alembert*, cuyo uso en el análisis de fuerzas se denomina *método de la fuerza de inercia del equilibrio dinámico.* En el análisis de eslabones acelerados, permite el uso de los mismos métodos que se utilizan en el análisis estático.

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.5

El mecanismo compresor mostrado en la figura 14.7 es impulsado en sentido horario por un motor de corriente directa, a una velocidad constante de 600 rpm. En la posición mostrada, la presión del cilindro es de 45 psi. El pistón pesa 0.5 lb, y el coeficiente de fricción entre el pistón y el cilindro del compresor es de 0.1. El peso de los demás eslabones es insignificante. Determine, en el instante mostrado, el torque requerido del motor para operar el compresor.

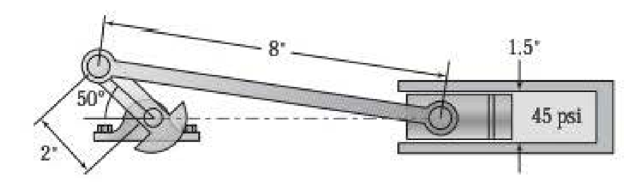


FIGURA 14.7 Mecanismo del problema de ejemplo 14.5.

SOLUCIÓN:

1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

Este es un mecanismo común de manivela-corredera en línea, que tiene un solo grado de libertad. En la figura 14.8a se muestra un diagrama cinemático a escala.

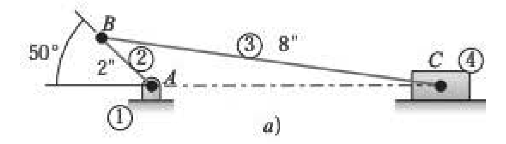


FIGURA 14.8 Diagramas del problema de ejemplo 14.5. (*Continúa*).

2. ***Elija el método para obtener el torque requerido del motor***

Como el pistón es el único componente con peso significativo, se deben determinar la fuerza inercial y la aceleración de este componente. La aceleración del pistón (eslabón 4) es de traslación pura e idéntica al movimiento del punto *C*. Este análisis de aceleración se presentó ampliamente en el capítulo 7.

Una vez que se haya obtenido la aceleración del pistón, se calculan las fuerzas inerciales subsecuentes. Finalmente, los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones correspondientes se utilizan para determinar el torque requerido.

3. ***Determine la velocidad de los puntos* B *y* C**

Este tipo de análisis se estudió ampliamente en los primeros capítulos del libro. La manivela de 2 in gira a 600 rpm. La velocidad del punto *B* es:

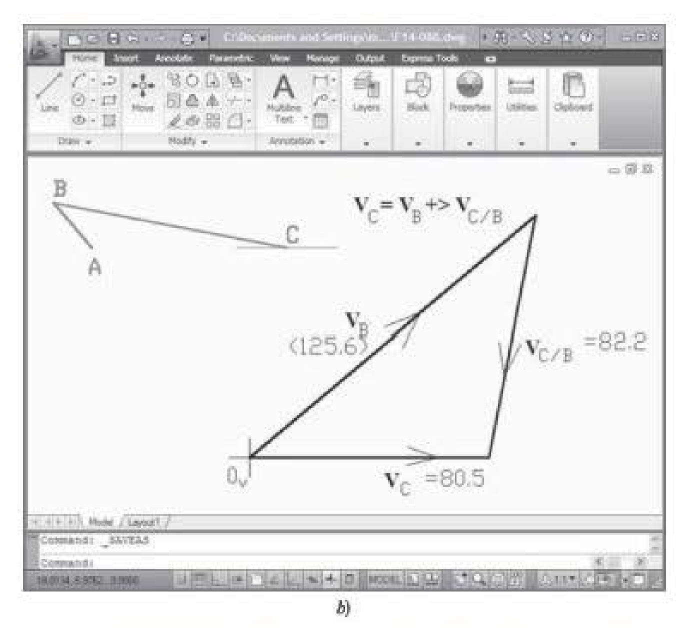
$$\omega_2 = \frac{\pi}{30}(600 \text{ rev/min}) = 62.8 \text{ rad/s, en sentido horario}$$
$$\mathbf{V}_B = \omega_2 r_{AB} = (62.8 \text{ rad/s})(2 \text{ in}) = 125.6 \text{ in/s} \quad 40^\circ$$

La dirección de $\mathbf{V}_B$ es perpendicular al eslabón 2 y congruente con la dirección de μ_2, hacia arriba a la derecha. Usando el CAD se dibuja un vector a escala, a partir del origen del diagrama de velocidad, para representar esta velocidad. La ecuación de velocidad relativa de los puntos *B* y *C* se escribe como:

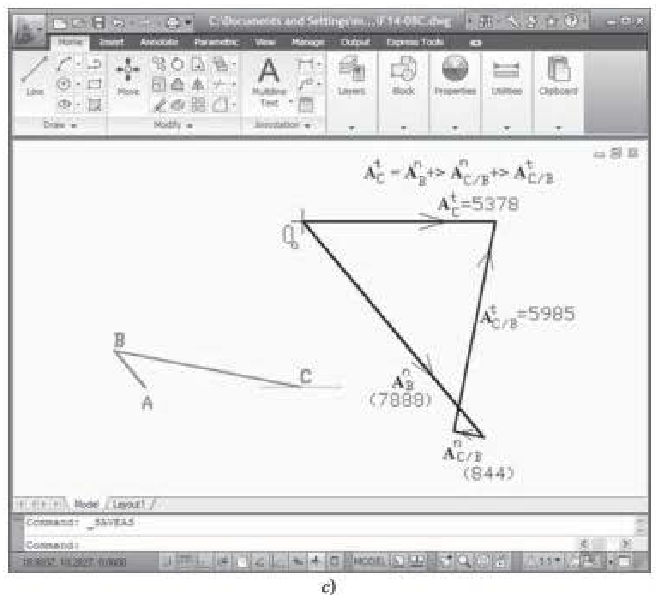
$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

En la figura 14.8b se ilustra un diagrama de velocidad completo. Escalando las magnitudes vectoriales del diagrama,

$$\mathbf{V}_C = 80.5 \text{ in/s} \rightarrow$$
$$\mathbf{V}_{C/B} = 82.2 \text{ in/s} \quad 79^\circ$$



b)



c)

FIGURA 14.8 (*Continuación*).

4. ***Determine las componentes de la aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración, el cual incluya los puntos B y C. Calculando las magnitudes de las aceleraciones conocidas,

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(\mathbf{V}_B)^2}{r_{AB}} = \frac{(125.6\,\text{in/s})^2}{2.0\,\text{in}} = 7888\,\text{in/s}^2 \ \searrow 50^\circ \quad \text{(dirigida hacia el centro de rotación, el punto } A\text{)}$$

$$a_B^t = 0 \quad \text{(no hay aceleración angular en la manivela de 2 in)}$$

$$\mathbf{A}_{C/B}^n = \frac{(\mathbf{V}_{C/B})^2}{r_{BC}} = \frac{(82.2\,\text{in/s})^2}{8.0\,\text{in}} = 844\,\text{in/s}^2 \ \ 11^\circ \nwarrow \quad \text{(dirigida de } C \text{ hacia } B\text{, medida con el CAD)}$$

Observe que el punto A no tiene aceleración normal porque el movimiento es estrictamente de traslación.

5. ***Construya un diagrama de aceleración***

La ecuación de aceleración relativa de los puntos B y C se escribe como:

$$\mathbf{A}_C^n +> \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t$$

En la figura 14.8c se muestra el diagrama de aceleración completo.

6. ***Mida la aceleración del pistón***

Escalando las magnitudes vectoriales del diagrama,

$$\mathbf{A}_{C/B}^t = 5985\,\text{in/s}^2 \ \ \nearrow 79^\circ$$

$$\mathbf{A}_C^t = 5378\,\text{in/s}^2 \ \ \rightarrow$$

Como la aceleración tangencial del punto B tiene la misma dirección que la velocidad, el pistón está acelerando (incrementando su velocidad), no desacelerando.

7. ***Calcule la fuerza inercial***

Como el pistón es el único eslabón con peso significativo, su fuerza inercial se calcula combinando las ecuaciones (14.9) y (14.1).

$$\mathbf{F}_{g4}^i = -> m_4\mathbf{A}_{g4} = \frac{\mathbf{W}_4}{g}(-> \mathbf{A}_{g4})$$

$$= \frac{(0.5\,\text{lb})}{386\,\text{in/s}^2}\,(5378\,\text{in/s}^2) = 6.96\,\text{lb} \leftarrow$$

Como el pistón no tiene aceleración angular, no se considera la inercia angular.

8. ***Elabore los diagramas de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo***

Observe que el eslabón 3 (BC) es un eslabón simple que tan solo contiene dos uniones de perno. Además, ninguna otra fuerza actúa sobre el eslabón. Por lo tanto, es un elemento con dos fuerzas y las fuerzas que actúan sobre el eslabón deben ser iguales y estar a lo largo de la línea que conecta los dos pernos. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 3 se muestra en la figura 14.8d. Como antes, la notación empleada indica que $\mathbf{F}_{32}$ es una fuerza aplicada al eslabón 3, como resultado del contacto con el eslabón 2.

El eslabón 2 también es un eslabón simple y únicamente tiene dos uniones de perno. Sin embargo, también se aplica un momento (torque) a esta manivela. Entonces, este eslabón no es un elemento simple con dos fuerzas. La tercera ley de Newton estipula que una fuerza que actúa en B es de igual magnitud y opuesta en dirección a $\mathbf{F}_{32}$. Por ello, la dirección de $\mathbf{F}_{23}$ se conoce como resultado de la figura 14.8d. El ángulo entre los eslabones 2 y 3 se midió en el modelo del CAD. La unión general de perno en el punto A indica que dos fuerzas de reacción estarán presentes. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 se ilustra en la figura 14.8e.

El eslabón 4 tiene un contacto de corredera con el eslabón 1. Esta fuerza de contacto actúa perpendicular a la superficie de contacto. Asimismo, la fuerza de compresión del gas actuará perpendicular a la superficie del pistón. La fuerza de fricción se opone al movimiento (velocidad) del eslabón 4. La tercera ley de Newton también estipula que la fuerza que actúa en C es igual y opuesta a $\mathbf{F}_{34}$. Por lo tanto, la dirección de $\mathbf{F}_{43}$ se conoce como resultado de la figura 14.8d. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 4 se presenta en la figura 14.8f.

9. ***Resuelva las ecuaciones de equilibrio dinámico del eslabón 4***

Se examina primero el eslabón 4 porque contiene la fuerza aplicada. La fuerza del gas se calcula como:

$$\mathbf{F}_{\text{gas}} = p_{\text{gas}}\,A_{\text{pistón}} = p_{\text{gas}}\left[\frac{\pi(d_{\text{pistón}})^2}{4}\right] = 45\,\text{lb/in}^2\left[\frac{\pi(1.5\,\text{in})^2}{4}\right] = 79.5\,\text{lb} \leftarrow$$

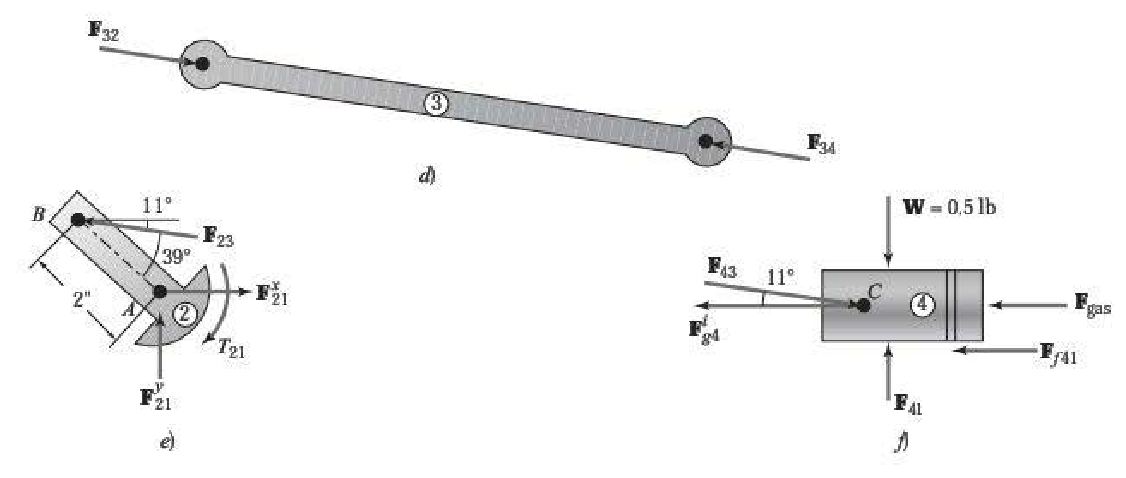


FIGURA 14.8 (*Continuación*).

La fuerza de fricción es:

$$\mathbf{F}_f = \mu\mathbf{F}_{41} = 0.1\,\mathbf{F}_{41}$$

Las dos fuerzas desconocidas en este eslabón (figura 14.8f) se obtienen usando las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma\mathbf{F}^x + > \mathbf{F}^i = 0:$

$$\mathbf{F}_{43}\cos 11.0° - \mathbf{F}_{gas} - \mathbf{F}_{g4}^i - \mathbf{F}_f = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma\mathbf{F}^y = 0:$

$$-\,\mathbf{F}_{43}\cos 11.0° + \mathbf{F}_{41} - 0.5\text{ lb} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones,

$$\mathbf{F}_{43} = +89.8\text{ lb} = 89.8\text{ lb} \;\; 11°$$

$$\mathbf{F}_{41} = +16.6\text{lb} = 16.6\text{ lb}\uparrow$$

10. ***Despeje el equilibrio del eslabón 3***

Como el eslabón 3 es un elemento con dos fuerzas (figura 14.8d), las ecuaciones de equilibrio indican que las fuerzas tienen la misma magnitud, actúan a lo largo de la misma línea y tienen sentido opuesto. Desde luego, la tercera ley de Newton establece que $\mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{23}$. Entonces, las fuerzas que actúan sobre el eslabón 3 son:

$$\mathbf{F}_{34} = 89.8\text{lb} \;\; 11°$$

$$\mathbf{F}_{32} = 89.8\text{lb} \;\; 11°$$

11. ***Despeje el equilibrio del eslabón 2***

El diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 (figura 14.8e) revelará el torque requerido del motor. Desde luego, la tercera ley de Newton indica que $\mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{23}$. Las fuerzas y el momento desconocidos de este eslabón se obtienen usando las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma\mathbf{F}^x = 0:$

$$\mathbf{F}_{21}^x - \mathbf{F}_{23}\cos 11° = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma\mathbf{F}^y = 0:$

$$\mathbf{F}_{21}^y + \mathbf{F}_{23}\operatorname{sen} 11° = 0$$

$\circlearrowleft +$ $\Sigma M_A = 0:$

$$-T_{21} + (\mathbf{F}_{23}\operatorname{sen} 39°)(2\text{ in}) = 0$$

Resolviendo las tres ecuaciones se obtiene:

$$F_{21}^{x} = +88.1 \text{ lb} = 88.1 \text{ lb} \rightarrow$$

$$F_{21}^{y} = -17.1 \text{ lb} = 17.1 \text{ lb} \downarrow$$

$$T_{21} = +113.0 \text{ lb in} = 113.0 \text{lb in, en sentido horario}$$

Como el torque es el valor deseado, tan solo es necesario resolver la ecuación de momento.

14.6 TORQUE INERCIAL

El concepto de fuerza inercial, como se describe en la ecuación (14.7), es una extensión de la segunda ley de Newton para el movimiento lineal. En el caso del movimiento angular, la segunda ley se resume en términos de la aceleración angular y el momento de inercia, en relación con un eje que pase por el centro de gravedad.

$$\Sigma M_g = I_g \alpha \qquad \textbf{(14.11)}$$

Otra vez, el subíndice "g" se refiere al punto de referencia en el centro de gravedad del eslabón.

Similar al movimiento lineal, la ecuación (14.11) se replantea como:

$$\Sigma M_g -> T_g^i = 0 \qquad \textbf{(14.12)}$$

Observe que se utiliza el símbolo de sustracción ($->$), ya que deben tomarse en cuenta las direcciones del momento y de la aceleración angular. El segundo término de la ecuación (14.12) se llama *inercia angular de un cuerpo*. Este término sirve para definir el *torque inercial*, T_g^i:

$$T_g^i = -> I_g \alpha \qquad \textbf{(14.13)}$$

Nuevamente, el signo negativo indica que el torque inercial está en dirección opuesta a la aceleración angular.

La ecuación (14.12) se replantea como:

$$\Sigma M +> T_g^i = 0 \qquad \textbf{(14.14)}$$

La ecuación (14.14) se conoce como *ecuación de momento de equilibrio dinámico*. Es el equivalente angular del principio de d'Alembert descrito en la sección 14.5. Permite el análisis de eslabones acelerados, utilizando los mismos métodos que en el análisis estático.

El siguiente problema de ejemplo combina varios conceptos del análisis de fuerzas dinámicas presentados en este capítulo.

PROBLEMA DE EJEMPLO 14.6

El mecanismo presentado en la figura 14.9 se utiliza para bajar y subir el tren de aterrizaje de pequeños aeroplanos. El eslabón del ensamble de la rueda pesa 100 lb, y tiene su centro de gravedad como se indica. El radio de giro del ensamble, en relación con el centro de gravedad, se ha determinado experimentalmente igual a 1.2 ft. El eslabón motriz gira en sentido antihorario a 3 rad/s y con una aceleración de 10 rad/s^2. Para estimar las propiedades de la masa, la manivela motriz pesa aproximadamente 15 lb y tiene 2 ft de largo, 1 ft de ancho y 0.25 ft de espesor. Se estima que el peso del eslabón conector es de 20 lb y se modela como una varilla delgada de 3.5 ft. Determine todas las fuerzas que actúan sobre las uniones de todos los eslabones y el torque requerido para impulsar el eslabón motriz.

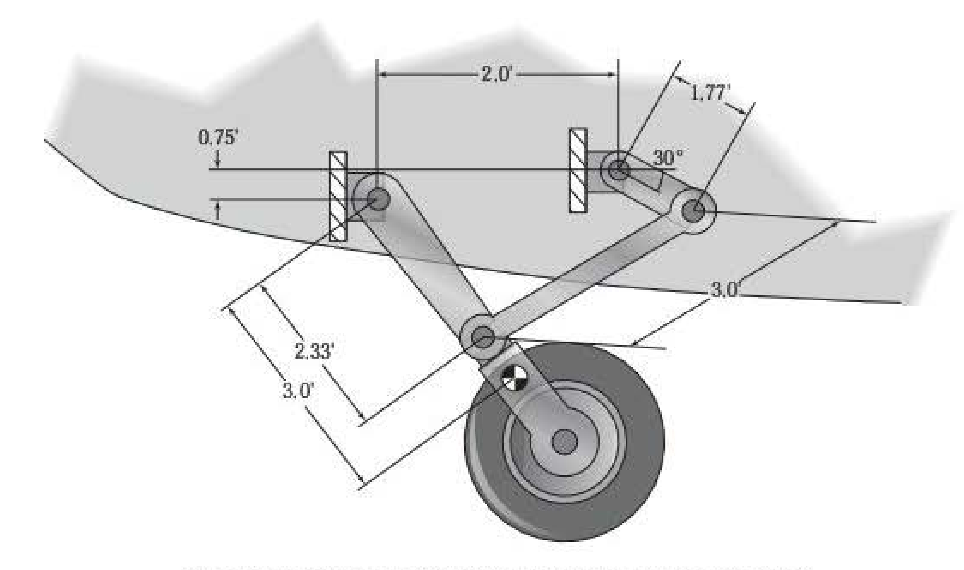


FIGURA 14.9 Tren de aterrizaje del problema de ejemplo 14.6.

SOLUCIÓN: 1. ***Elabore el diagrama cinemático e identifique los grados de libertad***

Este es el conocido mecanismo de cuatro barras que tiene un solo grado de libertad. El diagrama cinemático se presenta en la figura 14.10a.

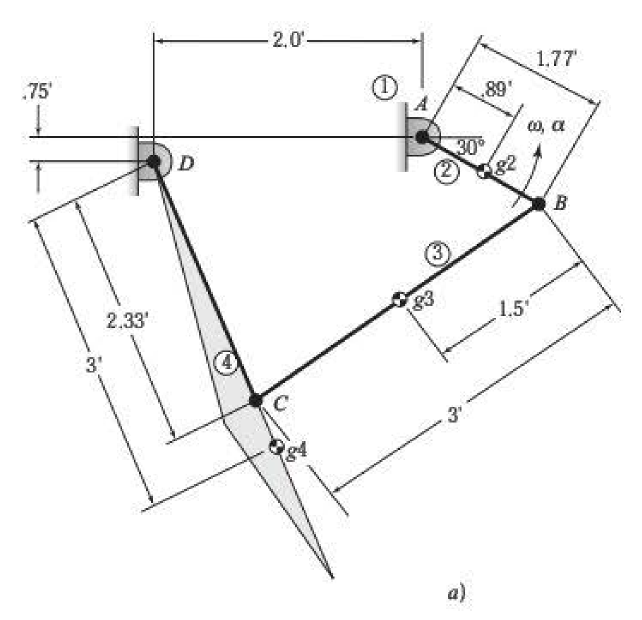


FIGURA 14.10 Diagrama del problema de ejemplo 14.6.

2. ***Elija el método para obtener el torque requerido del motor***

Como todos los eslabones tienen un peso significativo, se debe determinar la aceleración del centro de gravedad de todos los eslabones. Este análisis de aceleración se estudió exhaustivamente en el capítulo 7. Una vez que se hayan obtenido las aceleraciones, se calculan las fuerzas inerciales y los torques subsecuentes. Por último, se usan los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones correspondientes para determinar el torque requerido.

3. ***Determine la velocidad de los puntos* B *y* C**

Este tipo de análisis se estudió exhaustivamente en los primeros capítulos del libro. La manivela de 1.77 ft gira a 3 rad/s. La velocidad del punto B es:

$$\mathbf{V}_B = \omega_2 r_{AB} = (3\text{ rad/s})(1.77\text{ ft}) = 5.31\text{ ft/s} \quad \angle 60°$$

La dirección de $\mathbf{V}_B$ es perpendicular al eslabón 2 y es congruente con la dirección de μ_2, hacia arriba a la derecha. Usando el CAD se puede dibujar un vector a escala, a partir del origen del diagrama de velocidad, para representar esta velocidad.

La ecuación de velocidad relativa de los puntos B y C se escribe como:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B +> \mathbf{V}_{C/B}$$

En la figura 14.10b se observa el diagrama vectorial. Escalando las magnitudes vectoriales del diagrama,

$$\mathbf{V}_C = 5.00\text{ ft/s} \quad \angle 30.7°$$

$$\mathbf{V}_{C/B} = 2.63\text{ ft/s} \quad \diagdown 51.4°$$

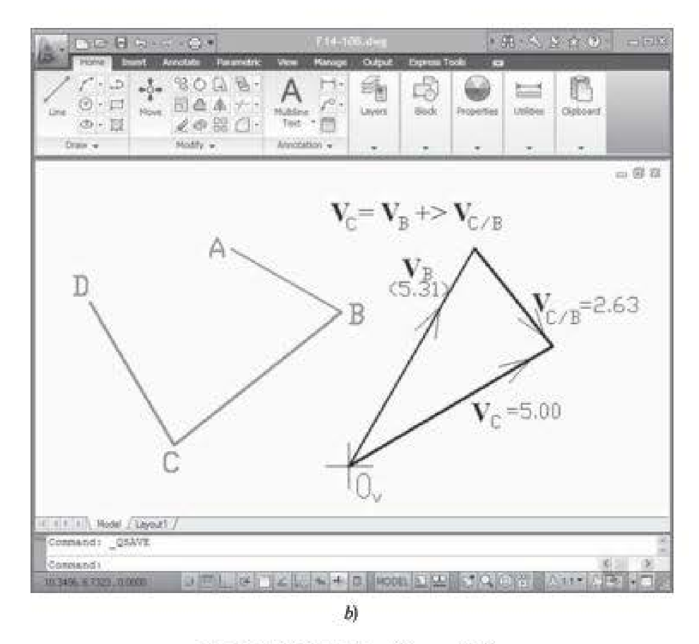
4. ***Calcule las componentes de aceleración***

El paso siguiente es construir un diagrama de aceleración, el cual incluya los puntos B y C. Calculando las magnitudes de las aceleraciones conocidas,

$$\mathbf{A}_B^n = \frac{(\mathbf{V}_B)^2}{r_{AB}} = \frac{(5.31\text{ ft/s})^2}{1.77\text{ ft}} = 15.93\text{ ft/s}^2 \quad 30° \diagdown$$ (dirigida hacia el centro de rotación, el punto A)

$$\mathbf{A}_B^t = \alpha_2 r_{AB} = (10\text{ rad/s}^2)(1.77\text{ ft}) = 17.70\text{ ft/s}^2 \quad \angle 60°$$ (perpendicular al eslabón 2, congruente con α_2)

$$\mathbf{A}_{C/B}^n = \frac{(\mathbf{V}_{C/B})^2}{r_{BC}} = \frac{(2.63\text{ ft/s})^2}{3.0\text{ ft}} = 2.30\text{ ft/s}^2 \quad \angle 38.6°$$ (dirigida de C hacia B, medida con el CAD)



b)

FIGURA 14.10 (*Continuación*).

$$\mathbf{A}_C^n = \frac{(\mathbf{V}_C)^2}{r_{CD}} = \frac{(500\,\text{ft/s}^2)}{2.33\,\text{ft}} = 10.72\ \text{ft/s}^2\ \underline{59.3°}$$ (dirigida de C hacia D, medida con el CAD)

5. ***Construya un diagrama de aceleración***

La ecuación de aceleración relativa de los puntos B y C se escribe como:

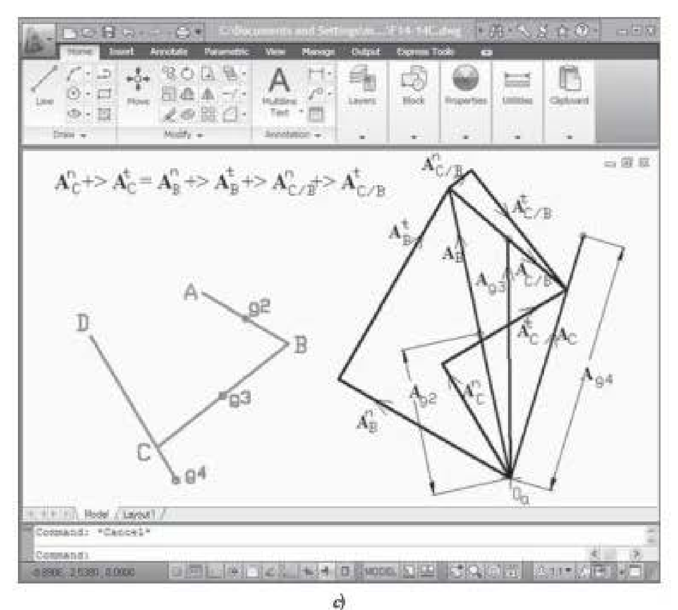
$$\mathbf{A}_C^n +> \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n +> \mathbf{A}_B^t +> \mathbf{A}_{C/B}^n +> \mathbf{A}_{C/B}^t$$

En la figura 14.10c se muestra el polígono de aceleración. Observe que se utilizó el concepto de imagen de aceleración que se presentó en la sección 7.10, para determinar la aceleración del centro de gravedad de los tres eslabones móviles.

6. ***Mida la aceleración del centro de gravedad de todos los eslabones***

Escalando las magnitudes vectoriales del diagrama,

$$\mathbf{A}_{C/B}^t = 12.28\ \text{ft/s}^2\ \overline{51.4°} \qquad \mathbf{A}_C^t = 11.60\ \text{ft/s}^2\ \underline{30.6°}$$



c)

FIGURA 14.10 (*Continuación*).

$$\mathbf{A}_{g2} = 11.91\,\text{ft/s}^2 \quad 78.0° \qquad \mathbf{A}_{g3} = 19.21\,\text{ft/s}^2 \quad 89.4°$$

$$\mathbf{A}_{g4} = 20.32\,\text{ft/s}^2 \quad 73.4°$$

Se determinan las aceleraciones angulares de los eslabones.

$$\alpha_3 = \frac{a^t_{C/B}}{r_{BC}} = \frac{12.28\,\text{ft/s}^2}{3.0\,\text{ft}} = 4.1\,\text{rad/s}^2,\ \text{en sentido antihorario}$$

$$\alpha_4 = \frac{a^t_{C}}{r_{CD}} = \frac{11.60\,\text{ft/s}^2}{2.33\,\text{ft}} = 5.0\,\text{rad/s}^2,\ \text{en sentido antihorario}$$

7. ***Calcule las propiedades de la masa***

La manivela motriz se puede considerar un bloque rectangular. En la tabla 14.2, el momento de inercia, en el centro de masa, en relación con un eje normal al lado ancho del eslabón, es:

$$I_{g2} = \frac{1}{12}\,[m(\mathbf{W}^2 + l^2)] = \frac{1}{12}\left(\frac{15\,\text{lb}}{32.2\,\text{ft/s}^2}\right)[(2\,\text{ft})^2 + (1\,\text{ft})^2] = 0.194\,\text{lb ft s}^2$$

El brazo conector (biela) se puede considerar una varilla delgada. En la tabla 14.2, el momento de inercia, en el centro de masa, en relación a un eje normal a la longitud del eslabón, es:

$$I_{g3} = \frac{1}{12}\,[ml^2] = \frac{1}{12}\left(\frac{20\,\text{lb}}{32.2\,\text{ft/s}^2}\right)(3.5\,\text{ft})^2 = 0.634\,\text{lb ft s}^2$$

El radio de giro del ensamble de la rueda se obtuvo experimentalmente. A partir de la ecuación (14.4), el momento de inercia en el centro de masa en relación con un eje normal a la longitud del ensamble es:

$$I_{g4} = mk^2 = \left(\frac{100\,\text{lb}}{32.2\,\text{ft/s}^2}\right)(1.2\,\text{ft})^2 = 4.472\,\text{lb ft s}^2$$

8. ***Calcule la fuerza inercial***

Para los tres eslabones móviles, la fuerza inercial se calcula combinando las ecuaciones (14.9) y (14.1).

$$\mathbf{F}^i_{g2} -> m_2\mathbf{A}_{g2} = \frac{\mathbf{W}_2}{g}\,(-> \mathbf{A}_{g2})$$

$$= \frac{(15\,\text{lb})}{32.2\,\text{ft/s}^2}\,(11.91\,\text{ft/s}^2) = 5.55\,\text{lb} \quad 78.0°$$

$$\mathbf{F}^i_{g3} = -> m_3\mathbf{A}_{g3} = \frac{\mathbf{W}_3}{g}\,(-> \mathbf{A}_{g3})$$

$$= \frac{(20\,\text{lb})}{32.2\,\text{ft/s}^2}\,(19.21\,\text{ft/s}^2) = 11.93\,\text{lb} \quad 89.4°$$

$$\mathbf{F}^i_{g4} = -> m_4\mathbf{A}_{g4} = \frac{\mathbf{W}_4}{g}\,(-> \mathbf{A}_{g4})$$

$$= \frac{(100\,\text{lb})}{32.2\,\text{ft/s}^2}\,(20.32\,\text{ft/s}^2) = 63.11\,\text{lb} \quad 73.4°$$

9. ***Calcule el torque inercial***

Para los tres eslabones móviles, el torque inercial se calcula con la ecuación (14.13).

$$T^i_{g2} = -> I_{g2}\alpha_2 = (0.194\,\text{lb ft s}^2)(10\,\text{rad/s}^2)$$

$$= 1.94\,\text{ft lb, en sentido horario}$$

$$T^i_{g3} = -> I_{g3}\alpha_3 = (0.634\,\text{lb ft s}^2)(4.1\,\text{rad/s}^2)$$

$$= 2.60\,\text{ft lb, en sentido horario}$$

$$T_{g4}^{i} = \;->\; I_{g4}\alpha_4 = (4.472 \text{ lb ft s}^2)(5 \text{ rad/s}^2)$$

$$= 22.36 \text{ ft lb, en sentido horario}$$

10. ***Elabore los diagramas de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo***

Como el peso de todos los eslabones se va a incluir en el análisis, no hay elementos con dos fuerzas. Por consiguiente, todas las fuerzas de contacto en las uniones son generales y están representadas por sus componentes ortogonales. En la figura 14.10d se muestra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 4. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 3 se presenta en la figura 14.10e. Desde luego, la tercera ley de Newton indica que $\mathbf{F}_{34}$ y $\mathbf{F}_{43}$ tienen la misma magnitud y direcciones opuestas. Finalmente, el diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 se ilustra en la figura 14.10f. Como cada eslabón tiene más de tres fuerzas desconocidas, las ecuaciones de equilibrio de todos los eslabones necesitarán resolverse simultáneamente.

11. ***Genere las ecuaciones de equilibrio del eslabón 4***

Las siguientes ecuaciones de equilibrio dinámico se generan a partir del diagrama de cuerpo libre del eslabón 4 (figura 14.10d).

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\quad \Sigma \mathbf{F}^x + > \mathbf{F}_g^i = 0$:

$$\mathbf{F}_{41}^x - \mathbf{F}_{43}^x - \mathbf{F}_{g4}^i \cos 73.4° = 0$$

$$\mathbf{F}_{41}^x - \mathbf{F}_{43}^x - 18.03 \text{ lb} = 0$$

$+\uparrow$ $\quad \Sigma \mathbf{F}^y + > \mathbf{F}_g^i = 0$:

$$\mathbf{F}_{41}^y - \mathbf{F}_{43}^y - \mathbf{W}_4 - \mathbf{F}_{g4}^i \operatorname{sen} 73.4° = 0$$

$$\mathbf{F}_{41}^y - \mathbf{F}_{43}^y - 160.48 \text{ lb} = 0$$

$+\circlearrowleft$ $\quad \Sigma M_D + > T_g^i = 0$:

$$-\mathbf{F}_{43}^x[2.33 \text{ ft}(\operatorname{sen} 59.4°)] - \mathbf{F}_{43}^y[2.33 \text{ ft}(\cos 59.4°)] - \mathbf{W}_4[3.0 \text{ ft}(\cos 59.4°)]$$

$$-\mathbf{F}_{g4}^i[\cos(73.4° - 30.6°)][3.0 \text{ ft}] - T_{g4}^i = 0$$

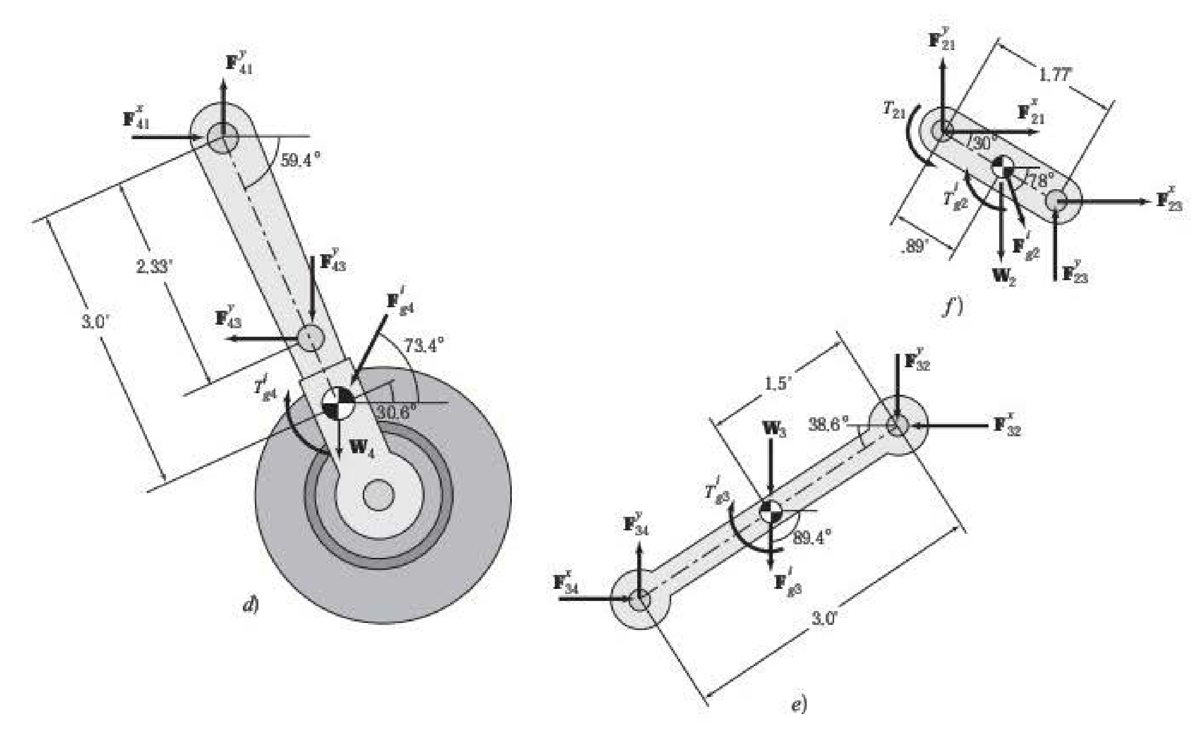


FIGURA 14.10 (*Continuación*).

Sustituyendo los valores dados

$$-2.000\,\mathbf{F}_{43}^{x} - 1.186\,\mathbf{F}_{43}^{y} - 313.98 \text{ ft lb} = 0$$

12. ***Genere las ecuaciones de equilibrio del eslabón 3***

Las siguientes ecuaciones de equilibrio dinámico se generaron a partir del diagrama de cuerpo libre del eslabón 3 (figura 14.10e).

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma \mathbf{F}^{x} + > \mathbf{F}_{g}^{i} = 0$:

$$\mathbf{F}_{34}^{x} - \mathbf{F}_{32}^{x} - \mathbf{F}_{g3}^{i} \cos 89.4^{\circ} = 0$$

$$\mathbf{F}_{34}^{x} - \mathbf{F}_{32}^{x} - 0.13 \text{ lb} = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma \mathbf{F}^{y} + > \mathbf{F}_{g}^{i} = 0$:

$$\mathbf{F}_{34}^{y} - \mathbf{F}_{32}^{y} - \mathbf{W}_3 - \mathbf{F}_{g3}^{i} \operatorname{sen} 89.4^{\circ} = 0$$

$$\mathbf{F}_{34}^{y} - \mathbf{F}_{32}^{y} - 31.93 \text{ lb} = 0$$

$+\circlearrowleft$ $\Sigma M_B + > T_g^{i} = 0$:

$$\mathbf{F}_{34}^{x}\,[3.0\,\text{ft}(\cos 38.6^{\circ})] - \mathbf{F}_{34}^{y}\,[3.0\,\text{ft}(\operatorname{sen} 38.6^{\circ})](2.33\text{ ft}) + \mathbf{W}_3\,[1.5\text{ ft}(\cos 38.6^{\circ})]$$

$$+ \mathbf{F}_{g3}^{i}\,[\cos(38.6^{\circ} - 0.6^{\circ})]\,[1.5\text{ ft}] - T_{g3}^{i} = 0$$

Sustituyendo los valores,

$$2.344\,\mathbf{F}_{34}^{x} - 1.872\,\mathbf{F}_{34}^{y} + 34.95 \text{ ft lb} = 0$$

13. ***Genere las ecuaciones de equilibrio del eslabón 2***

Las siguientes ecuaciones de equilibrio dinámico se generaron a partir del diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 (figura 14.10f).

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma \mathbf{F}^{x} + > \mathbf{F}_{g}^{i} = 0$:

$$\mathbf{F}_{23}^{x} + \mathbf{F}_{21}^{x} + \mathbf{F}_{g2}^{i} \cos 78^{\circ} = 0$$

$$\mathbf{F}_{23}^{x} + \mathbf{F}_{21}^{y} + 1.15 \text{ lb} = 0$$

$+\uparrow$ $\Sigma \mathbf{F}^{y} + > \mathbf{F}_{g}^{i} = 0$:

$$\mathbf{F}_{23}^{y} + \mathbf{F}_{21}^{y} - \mathbf{W}_2 - \mathbf{F}_{g2}^{i} \operatorname{sen} 78^{\circ} = 0$$

$$\mathbf{F}_{23}^{y} + \mathbf{F}_{21}^{y} - 20.43 \text{ lb} = 0$$

$+\circlearrowleft$ $\Sigma M_A + > T_g^{i} = 0$:

$$\mathbf{T}_{21} + \mathbf{F}_{23}^{x}\,[1.77\text{ ft}(\operatorname{sen} 30^{\circ})] + \mathbf{F}_{23}^{y}\,[1.77\text{ ft}(\cos 30^{\circ})] - \mathbf{W}_2\,[0.89\text{ ft}(\cos 30^{\circ})]$$

$$\mathbf{F}_{g2}^{i}[\operatorname{sen}(78^{\circ} - 30^{\circ})]\,[0.89\text{ ft}] - T_{g2}^{i} = 0$$

Sustituyendo los valores:

$$T_{21} + 0.885\,\mathbf{F}_{23}^{x} + 1.533\,\mathbf{F}_{23}^{y} - 17.17 \text{ ft lb} = 0$$

14. ***Resuelva las ecuaciones de equilibrio***

Se generó un total de nueve ecuaciones de equilibrio. Como se indicó anteriormente, la tercera ley de Newton estipula que las siguientes magnitudes son iguales.

$$\mathbf{F}_{43}^{x} = \mathbf{F}_{34}^{x} \qquad \mathbf{F}_{43}^{y} = \mathbf{F}_{34}^{y}$$

$$\mathbf{F}_{23}^{x} = \mathbf{F}_{32}^{x} \qquad \mathbf{F}_{23}^{y} = \mathbf{F}_{23}^{y}$$

De modo que permanecen nueve cantidades desconocidas. Resolviendo simultáneamente las nueve ecuaciones de equilibrio, se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{F}_{41}^{x} = -78.41 \text{ lb} = 78.41 \text{ lb} \leftarrow$$

$$\mathbf{F}_{41}^{y} = +58.38 \text{ lb} = 58.38 \text{ lb} \uparrow$$

$$\mathbf{F}_{43}^{x} = -96.44 \text{ lb} = 96.44 \text{ lb} \rightarrow \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{34}^{x} = 96.44 \text{ lb} \leftarrow$$

$$\mathbf{F}_{43}^{y} = -102.09 \text{ lb} = 102.09 \text{ lb} \uparrow \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{34}^{y} = 102.09 \text{ lb} \downarrow$$

$$\mathbf{F}_{32}^{x} = -96.32 \text{ lb} = 96.32 \text{ lb} \rightarrow \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{23}^{x} = 96.32 \text{ lb} \leftarrow$$

$$\mathbf{F}_{32}^{y} = -134.03 \text{ lb} = 134.03 \text{ lb} \uparrow \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{23}^{y} = 134.03 \text{ lb} \downarrow$$

$$\mathbf{F}_{21}^{x} = +95.17 \text{ lb} = 95.17 \text{ lb} \rightarrow$$

$$\mathbf{F}_{21}^{y} = +154.46 \text{ lb} = 154.46 \text{ lb} \uparrow$$

$$T_{21} = +307.88 \text{ ft lb} = 307.88 \text{ ft lb, en sentido horario}$$

PROBLEMAS

Masa y momento de inercia

14–1. Se ha determinado que la masa de la biela de un motor de combustión interna es de 2.3 kg. Calcule el peso de la biela.

14–2. Una tenaza robótica de sujeción pesa 4.5 lb. Determine la masa de la tenaza.

14–3. Una tenaza robótica de sujeción pesa 4.5 lb y tiene un radio de giro de 5 in en relación con algún eje en el centro de gravedad. Determine el momento de inercia de la parte en relación con ese eje.

14–4. El eslabón de 6 kg de un mecanismo tiene un radio de giro de 150 mm en relación con algún eje en el centro de gravedad. Determine el momento de inercia de la parte en relación con ese eje.

14–5. Para la parte mostrada en la figura P14.5, calcule el momento de inercia y el radio de giro, respecto al eje longitudinal centroidal de un eje de transmisión de 14 in de largo que pesa 5 lb y tiene un diámetro de 0.625 in.

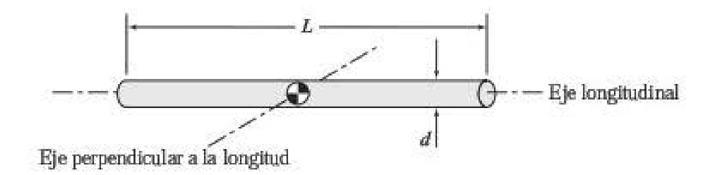


FIGURA P14.5 Problemas 5 a 8.

14–6. Para la parte mostrada en la figura P14.5, calcule el momento de inercia y el radio de giro respecto a un eje longitudinal centroidal de un eje de transmisión de 1200 mm de largo, cuya masa es de 100 kg y tiene un diámetro de 50 mm.

14–7. La parte mostrada en la figura P14.5 es un cilindro sólido de 2 ft de diámetro, 3 ft de largo y que pesa 48 lb. Determine el momento de inercia respecto a su eje centroidal axial.

14–8. La parte mostrada en la figura P14.5 es un cilindro sólido de 2 ft de diámetro, 3 ft de largo y que pesa 48 lb. Determine el momento de inercia respecto al eje centroidal perpendicular a su longitud.

14–9. La parte mostrada en la figura P14.9 es una varilla delgada de 14 in de largo, que gira alrededor de un eje perpendicular a su longitud de 3 in, a partir de su centro de gravedad. Si la varilla pesa 2 lb y tiene un diámetro de 1.25 in, determine su momento de inercia alrededor de ese eje.

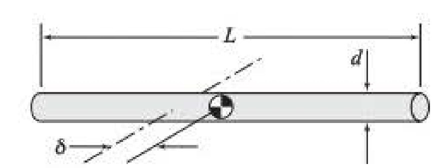


FIGURA P14.9 Problemas 9 y 10.

14–10. La parte mostrada en la figura P14.9 es una varilla delgada de 0.4 m de largo, que gira alrededor de un eje perpendicular a su longitud y a 0.12 m de su centro de gravedad. Sabiendo que la varilla tiene una masa de 6 kg, determine su momento de inercia alrededor de ese eje.

14–11. Determine el momento de inercia del eslabón de acero ($\rho = 0.183$ lb/in^3) mostrado en la figura P14.11 con res- pecto al eje *y*.

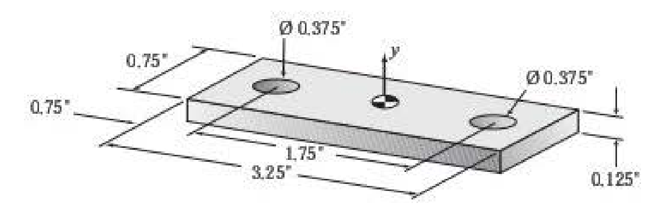


FIGURA P14.11 Problema 11.

14–12. Determine el momento de inercia del eslabón de acero ($\rho = 0.183$ lb/in^3) mostrado en la figura P14.12 con respecto al eje *y*.

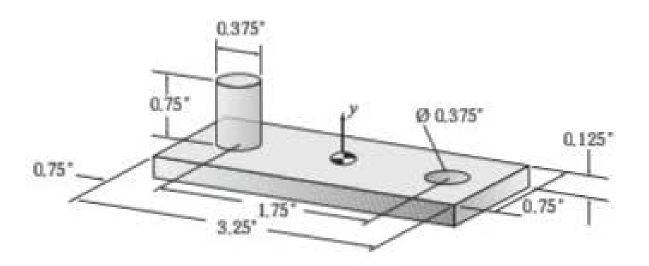


FIGURA P14.12 Problema 12.

Fuerzas inerciales

14–13. El mecanismo compresor mostrado en la figura P14.13 es impulsado en sentido horario por un motor eléctrico de corriente directa, a una velocidad constante de 800 rpm. En la posición mostrada, la presión del cilindro es de 70 psi, y el pistón pesa 0.75 lb. El coeficiente de fricción entre el pistón y el cilindro del compresor es de 0.1. El peso de los demás eslabones es insignificante. En el instante mostrado, determine el torque requerido del motor para operar el compresor.

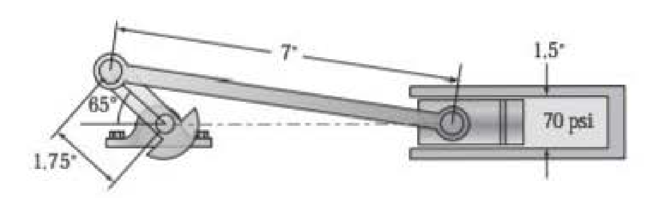


FIGURA P14.13 Problemas 13 a 15.

14–14. Para el mecanismo compresor descrito en el problema 14-13, determine el torque requerido del motor, si este gira a 800 rpm y acelera a razón de 5000 rad/s^2.

14–15. Para el mecanismo compresor descrito en el problema 14-13, determine el torque requerido del motor, si este gira a 800 rpm y desacelera a razón de 5000 rad/s^2.

14–16. El mecanismo manipulador de materiales presentado en la figura P14.16 desliza paquetes de 4 kg a lo largo de un mostrador. La máquina funciona con la manivela que gira en sentido antihorario a una velocidad constante de 120 rpm. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el mostrador es de 0.15. El peso de todos los eslabones del mecanismo es insignificante. Determine el torque instantáneo requerido del motor para operar este mecanismo.

14–17. Para el mecanismo manipulador de materiales descrito en el problema 14-16, determine el torque requerido del motor, si este gira a 120 rpm y acelera a una razón de 100 rad/s^2.

14–18. Para el mecanismo manipulador de materiales descrito en el problema 14-16, determine el torque requerido del motor, si este gira a 120 rpm y desacelera a una razón de 100 rad/s^2.

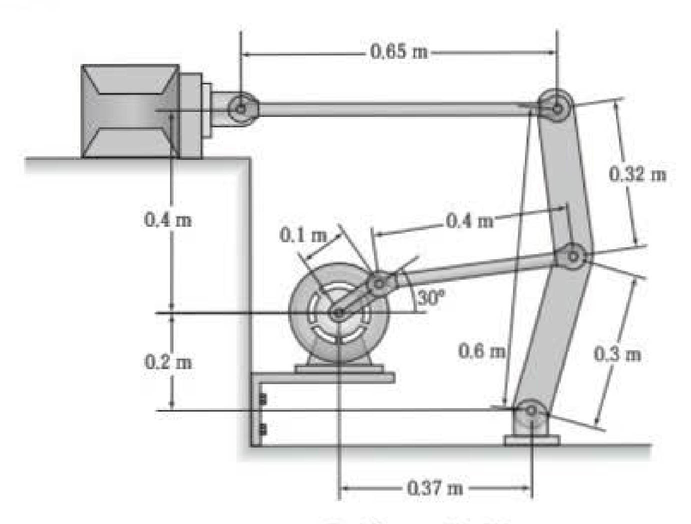


FIGURA P14.16 Problemas 16 a 18.

Torques inerciales

La figura P14.19 ilustra un eslabón que pesa 4 lb y gira en sentido horario a 20 rad/s. En los problemas 14-19 y 14-20 determine la magnitud de la fuerza inercial y el torque inercial en el centro de gravedad, si:

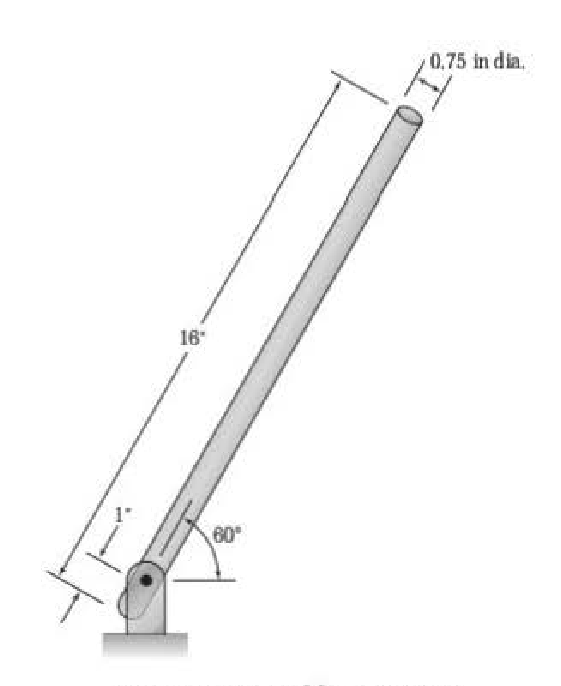


FIGURA P14.19 Problemas 19 y 20.

14–19. El eslabón acelera a 600 rad/s^2.

14–20. El eslabón desacelera a 600 rad/s^2.

La figura P14.21 muestra un eslabón de 10 kg que gira en sentido antihorario a 15 rad/s. Determine la magnitud de la fuerza inercial y el torque inercial en el centro de gravedad, si:

14–21. El eslabón acelera a 400 rad/s^2.

14–22. El eslabón desacelera a 400 rad/s^2.

14–23. La figura P14.23 presenta un mecanismo de manivela-corredera. El eslabón 2 gira en sentido horario a una velocidad constante de 200 rad/s. El peso del eslabón 2 es insignificante, el eslabón 3 pesa 3 lb y el eslabón 4 pesa 2 lb. El radio de giro del eslabón 3 respecto al cen-

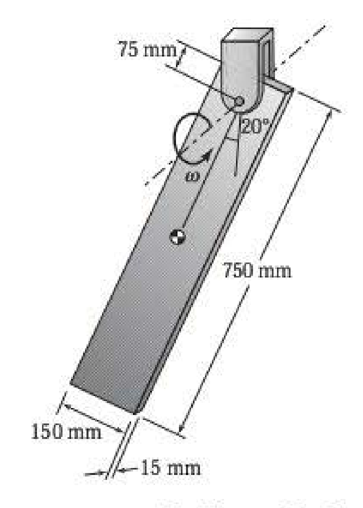


FIGURA P14.21 Problemas 21 y 22.

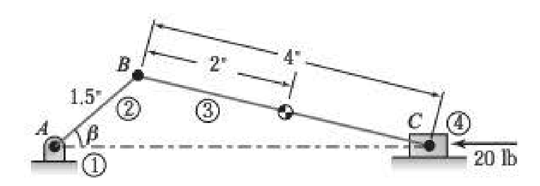


FIGURA P14.23 Problemas 23 y 24.

tro de gravedad es de 3 in. Para $\beta = 45°$, determine lo siguiente:

1. La aceleración lineal del eslabón 4 y el centro de gravedad del eslabón 3,
2. La aceleración angular del eslabón 3,
3. La fuerza y el torque inerciales del acoplador,
4. Las fuerzas en los pernos de *B* y *C* y
5. El torque para impulsar el mecanismo en esta posición.

14–24. Repita el problema 14-23 con $\beta = 120°$.

14–25. La figura P14.25 muestra un mecanismo de cuatro barras. El eslabón 2 gira en sentido antihorario a una velocidad constante de 10 rad/s. El peso de los eslabones 2 y 3 es insignificante, y el eslabón 4 pesa 17 kg. El radio de giro del eslabón 4 en relación con el centro de gravedad es de 45 mm. Para $\beta = 45°$, determine lo siguiente:

1. La aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón 4,
2. La aceleración angular del eslabón 4,

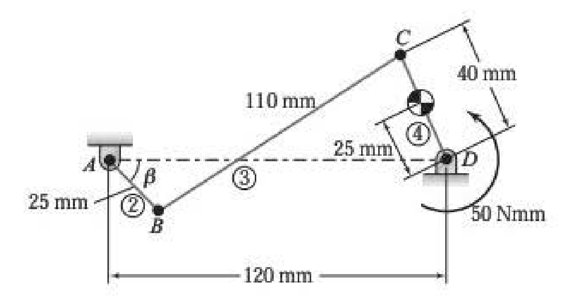


FIGURA P14.25 Problemas 25 y 26.

3. La fuerza y el torque inerciales del eslabón 4,
4. Las fuerzas en los pernos de *B* y *C* y
5. El torque para impulsar el mecanismo en esta posición.

14–26. Repita el problema 14-25 con $\beta = 90°$.

14–27. La figura P14.27 ilustra un pequeño gato hidráulico. En este instante, se aplica al mango una fuerza de 10 lb, lo cual provoca que el eslabón de 3.5 in gire en sentido horario a razón constante de 5 rad/s. El peso de los eslabones 2 y 3 es insignificante, y el eslabón 4 pesa 1.5 lb. Determine lo siguiente:

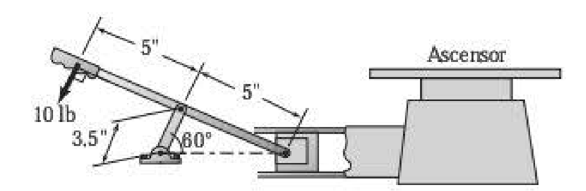


FIGURA P14.27 Problema 27.

1. La aceleración lineal del pistón,
2. La fuerza inercial del eslabón 4,
3. Las fuerzas en los pernos y
4. La fuerza desarrollada sobre el pistón por el fluido hidráulico.

14–28. La figura P14.28 ilustra un mecanismo transportador de transferencia. El eslabón impulsor gira en sentido antihorario a una razón constante de 25 rpm. Como se indica, la caja pesa 50 lb. El peso del eslabón impulsor y el acoplador es insignificante. El peso del eslabón transportador es de 28 lb y el centro de gravedad está en su punto medio. El radio de giro del eslabón transportador en relación con el centro de gravedad es de 26 in. Para $\beta = 30°$, determine gráficamente lo siguiente:

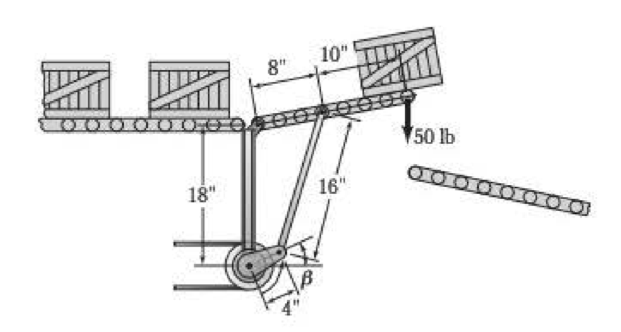


FIGURA P14.28 Problemas 28 y 29.

1. La aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón transportador,
2. La aceleración angular del eslabón transportador,
3. La fuerza y el torque inerciales del eslabón transportador,
4. Las fuerzas en los pernos y
5. El torque requerido para impulsar el mecanismo.

14–29. Repita el problema 14-28 con $\beta = 100°$.

ESTUDIO DE CASO

14–1 La figura E14.1 es un mecanismo que proporciona movimiento a las correderas *C* y *D* y se utiliza en una máquina de desmontaje de alambre. Examine cuidadosamente las componentes del mecanismo y, luego, conteste las siguientes preguntas para obtener mayor conocimiento acerca de su funcionamiento.

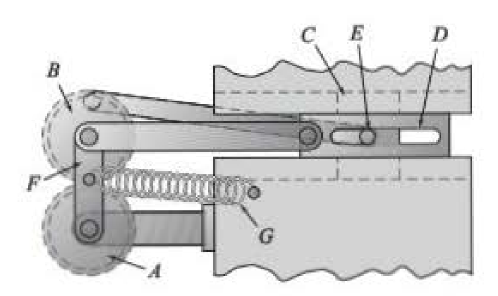


FIGURA E14.1 (Cortesía de Industrial Press).

1. Describa el movimiento del engrane *B* cuando el engrane *A* gira en sentido horario.
2. Cuando el engrane *A* gira en sentido horario, ¿cuál es el movimiento inmediato de la corredera *C*?
3. Comente la acción que ocurre cuando el perno *E* alcanza el extremo de la ranura.
4. Comente con exactitud el movimiento continuo de las correderas *C* y *E*.
5. Comente cómo se usaría posiblemente este movimiento en una máquina de desmontaje de alambre.
6. ¿Cuál es el propósito del resorte *G*?
7. ¿Cómo cambiaría este mecanismo si se instalara un resorte "más rígido"?

RESPUESTAS A PROBLEMAS PARES SELECCIONADOS

Capítulo 1

1–26. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–28. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–30. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–32. $n = 6, j_p = 7, j_h = 0, M = 1$
1–34. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–36. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–38. $n = 6, j_p = 7, j_h = 0, M = 1$
1–40. $n = 6, j_p = 7, j_h = 0, M = 1$
1–42. $n = 6, j_p = 7, j_h = 0, M = 1$
1–44. $n = 9, j_p = 11, j_h = 0, M = 2$
1–46. $n = 4, j_p = 4, j_h = 0, M = 1$
1–48. $n = 8, j_p = 10, j_h = 0, M = 1$
1–50. $n = 6, j_p = 7, j_h = 0, M = 1$
1–52. Manivela-balancín
1–54. Manivela-balancín

Capítulo 3

3–2. $A = 17.3$ in
3–4. $R = 12$ in
3–6. $s = 156.6$ mm
3–8. $x = 11.5$ in $y = 16.4$ in
3–10. $s = 175$ mm
3–12. $L = 8$ ft, 8 in
3–14. $h = 11.3$ ft
3–16. $y = 11.7$ ft
3–18. $h = 83.1$ in
3–20. $\mathbf{R} = 24.18$ 18.1°
3–22. $\mathbf{R} = 212.13$ 25.0°
3–24. $\mathbf{R} = 221.20$ 13.5°
3–26. $\mathbf{R} = 24.18$ 18.1°
3–28. $\mathbf{R} = 212.13$ 25.0°
3–30. $\mathbf{R} = 221.2$ 13.4°
3–32. $\mathbf{J} = 8.074$ 68.3°
3–34. $\mathbf{J} = 5.587$ 13.76°
3–36. $\mathbf{J} = 212.13$ 65.0°
3–38. $\mathbf{J} = 8.074$ 68.3°
3–40. $\mathbf{J} = 5.587$ 13.8°
3–42. $\mathbf{J} = 212.13$ 65.0°
3–44. $\mathbf{J} = 26.094$ 11.4°
3–46. $\mathbf{J} = 109.76$ 24.1°
3–48. $\mathbf{J} = 101.68$ 18.3°
3–52. $\mathbf{J} = 26.10$ 11.4°
3–54. $\mathbf{J} = 109.8$ 24.1°
3–56. $\mathbf{J} = 101.68$ 18.3°
3–58. $\mathbf{C} = 19.22$ $\mathbf{E} = 17.52$
3–60. $\mathbf{B} = 8.81$ $\mathbf{C} = 117.7$
3–62. $\mathbf{D} = 38.12$ $\mathbf{F} = 238.9$

Capítulo 4

4–2. $\Delta x = 2.189$ in $\rightarrow$
4–4. $\Delta R_P = 8.420$ in 27.5°
4–6. $\Delta R_{pistón} = 47.10$ mm $\leftarrow$
4–8. $\Delta\theta_{manivela} = 23.0°$, sentido antihorario
4–10. $\Delta R_{extremo} = 2.029$ in 55.1°
4–12. $\Delta\theta_{mango} = 22.2°$, sentido antihorario
4–14. $\Delta\theta_{ariete} = 17.6°$, sentido antihorario
4–16. $\Delta R_{extremo} = 22.644$ in 44.9°
4–18. $\Delta\theta_{mango} = 34.4°$, sentido antihorario
4–20. $\Delta\theta_{rueda} = 16.3°$, sentido horario
4–22. $\Delta R_{extremo} = 203.4$ 73.9°
4–24. $\Delta R_{portador} = 249.7$ mm 45.5°
4–26. $\Delta R_{caja} = 0.579$ m $\downarrow$
4–28. $\Delta L_{cilindro} = 1.566$ in
4–30. $\Delta R_{uña} = 29.62$ mm 85.2°
4–32. $\Delta L_{resorte} = 1.118$ in, más corto
4–34. $\Delta\theta_{ariete} = 3.03°$, sentido horario
4–36. $\Delta\theta_{caja} = 14.0°$, sentido antihorario
4–38. $\Delta R_P = 7.247$ 10.0°
4–40. $\Delta R_{pistón} = 66.82$ mm $\leftarrow$
4–42. $\Delta R_{sello} = 1.570$ in $\downarrow$
4–44. $\Delta\theta_{ariete} = 14.4°$, sentido horario
4–46. $\Delta\theta_{mango\,superior} = 16.8°$, cw
4–48. $\Delta L_{cilindro} = 68.1$ mm, más corto
4–50. $\Delta R_{contenedor} = 0.362$ m $\downarrow$
4–52. $\Delta R_{uña} = 30.87$ mm 86.52°
4–54. $\Delta\theta_{ariete} = 5.5°$, sentido horario
4–56. $(\Delta R_{pistón})_{máx} = 90.0$ mm
4–58. $(\Delta\theta_{ariete})_{máx} = 46.3°$
4–60. $(\Delta\theta_{ens.\ rueda})_{máx} = 57.6°$
4–62. $(\Delta\theta_{ariete})_{máx} = 29.5°$
4–64. $(\Delta R_{cuchilla})_{máx} = 1.513$ in
4–66. $(\Delta\theta_{mecanismo\ limpiador})_{máx} = 72.8°$
4–68. $(\Delta R_{perno\ desli.})_{máx} = 44.50$ mm

Capítulo 5

5–2. $\beta = 49.1°, \omega = 109$ rpm
5–4. $t_1 = 0.188$s, $t_2 = 0.142$ s
5–6. $t_1 = 0.067$ s, $t_2 = 0.53$ s
5-8. $Q = 1.714, \omega = 63.2$ rpm
5-10. $Q = 2.083, \omega = 162.2$ rpm

5–12. $L_2 = 4$ mm, $\omega = 750$ rpm
5–14. $\beta = 20°$, $\omega = 100$ rpm
5–16. $\beta = 12.6°$, $\omega = 4286$ rpm
5–18. $\beta = 8.6°$, $\omega = 1818$ rpm
5–20. $\beta = 0°$, $\omega = 17.14$ rpm
5–22. $\beta = 19.3°$, $\omega = 33.3$ rpm
5–24. $\beta = 16.36°$, $\omega = 200$ rpm
5–26. $\beta = 8.57°$, $\omega = 300$ rpm
5–28. $\beta = 6.92°$, $\omega = 40$ rpm
5–30. $\beta = 49.09°$, $\omega = 17.6$ rpm
5–32. $\beta = 51.43°$, $\omega = 240$ rpm

Capítulo 6

6–2. $\Delta t = 37.5$ s
6–4. $v = 22.37$ min/h
6–6. $\omega_{\text{mín}} = .0167$ rpm
6–8. $\Delta R_{\text{total}} = 72$ in
6–10. $\Delta R_{\text{total}} = 7.5$ in
6–12. $\mathbf{V} = 125.66$ ft/min
6–14. $\mathbf{V}_B = 90$ ft/s 20°
6–16. $\mathbf{V}_{B/A} = 5.94$ ft/s 59.4°
6–18. $\mathbf{V}_{A/B} = 15.72$ ft/s 25.9°
6–20. $\mathbf{V}_{\text{pistón}} = 272.55$ in/s ←
6–22. $\mathbf{V}_{\text{cuchilla}} = 59.63$ in/s ←
6–24. $\mathbf{V}_{\text{cuchilla}} = 5.94$ in/s ↓
6–26. $\omega_{\text{brazo limpiador}} = 2.50$ rad/s, sentido antihorario
6–28. $\omega_{\text{tanque}} = 0.85$ rad/s, sentido horario
6–30. $\omega_{\text{segmento engrane}} = 2.232$ rad/s, sentido antihorario
6–32. $\mathbf{V}_{\text{hoja de corte}} = 112.91$ mm/s ↑
6–34. $\mathbf{V}_{\text{cilindro}} = 4.39$ in/s, compresión
6–36. $\mathbf{V}_{\text{pistón derecho}} = 150.68$ in/s 45°
6–38. $\mathbf{V}_{\text{paquete}} = 775$ mm/s →
6–40. $\mathbf{V}_{\text{plataforma}} = 15.99$ ft/min 12.9°
6–42. $\mathbf{V}_{\text{cuchilla}} = 112.64$ in/s →
6–44. $\omega_{\text{brazo limpiador}} = 1.88$ rad/s, sentido horario
6–46. $\omega_{\text{segmento engrane}} = 3.827$ rad/s, sentido horario
6–48. $\mathbf{V}_{\text{cilindro}} = 4.39$ in/s, compresión
6–50. $\mathbf{V}_{\text{paquete}} = 953$ mm/s →
6–74. $\mathbf{V}_{\text{pistón}} = 230.3$ in/s ←
6–76. $\mathbf{V}_{\text{cuchilla}} = 4.82$ in/s ↓
6–78. $\omega_{\text{tanque de agua}} = 1.245$ rad/s, sentido horario
6–80. $\omega_{\text{cuchilla}} = 0.071$ rad/s, sentido antihorario
6–82. $\mathbf{V}_{\text{pistón derecho}} = 288.3$ in/s 45°
6–84. $\mathbf{V}_{\text{plataforma}} = 12.79$ ft/min 12.9°
6–86. $\mathbf{V}_{\text{cuchilla}} = 91.11$ in/s →
6–88. $\omega_{\text{brazo limpiador}} = 31.46$ rad/s, sentido horario
6–90. $\omega_{\text{segmento de engrane}} = 5.421$ rad/s, sentido horario
6–92. $\mathbf{V}_{\text{cilindro}} = 2.64$ in/s, compresión
6–94. $\mathbf{V}-2.\ \mathbf{A}_{\text{paquete}} = 10.60$ ft/s^2

Capítulo 7

7–4. $\Delta\mathbf{R}_A = 40$ mm ↑
7–6. $\alpha_{\text{leva}} = 9.82$ rad/s^2, sentido horario
7–8. $\alpha_{\text{leva}} = 7.85$ rad/s^2, sentido horario
7–10. $\Delta\mathbf{R}_{\text{actuador}} = 85$ in
7–12. $\Delta\mathbf{R}_{\text{actuador lineal}} = 15$ in ↓
7–14. $\Delta\mathbf{R}_{\text{actuador}} = 10$ in
7–16. $\mathbf{A}_B^n = 17{,}770$ in/s^2 70°
7–18. $\mathbf{A}_B = 22{,}872$ in/s^2 71.0°
7–20. $\mathbf{A}_A = 5158$ in/s^2 6.9°
7–22. $\mathbf{A}_{A/B} = 25.46$ mm/s^2 11.3°
7–24. $\mathbf{A}_{C/B} = 1.35$ ft/s^2 42.3°
7–26. $\mathbf{A}_{\text{pistón}} = 31{,}341$ in/s^2 →
7–28. $\mathbf{A}_{\text{pistón}} = 37{,}194$ in/s^2 →
7–30. $\mathbf{A}_{\text{aguja}} = 29{,}271$ mm/s^2 ↑
7–32. $\mathbf{A}_{\text{cuchilla}} = 58.97$ in/s^2 ←
7–34. $\mathbf{A}_{\text{cuchilla}} = 103.73$ in/s^2 ←
7–36. $\alpha_{\text{caballo}} = 5.22$ rad/s^2, sentido horario
7–38. $\alpha_{\text{boquilla}} = 9.80$ rad/s^2, sentido antihorario
7–40. $\alpha_{\text{boquilla}} = 78.55$ rad/s^2, sentido horario
7–42. $\alpha_{\text{ensam. rueda}} = 2.08$ rad/s^2, sentido horario
7–44. $\mathbf{A}_{\text{pistón}} = 93{,}195$ in/s^2 →
7–60. $\mathbf{A}^c_{B3/B2} = 900$ mm/s^2 30°
7–62. $\mathbf{A}^c_{B3/B2} = 900$ mm/s^2 60°

Capítulo 8

(Los resultados del programa/hoja de cálculo se presentan con un ángulo de manivela de 120°)

8–2. $\Delta\mathbf{R}_4 = 123.9$ mm a $\theta_2 = 120°$
8–4. $\theta_4 = 16.6°$ a $\theta_2 = 120°$
8–6. $\mathbf{V}_4 = -2577$ mm/s a $\theta_2 = 120°$
8–8. $\omega_4 = 3.27$ rad/s a $\theta_2 = 120°$
8–10. $\mathbf{A}_4 = 2349$ mm/s^2 a $\theta_2 = 120°$
8–12. $\omega_4 = 204.4$ rad/s a $\theta_2 = 120°$

Capítulo 9

9–14. $\omega_{\text{leva}} = 10.9$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 0.5$ in/s
9–16. $\omega_{\text{leva}} = 42.9$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 4.0$ in/s
9–18. $\omega_{\text{leva}} = 13.3$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 2.5$ in/s
9–20. $\omega_{\text{leva}} = 17.1$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 3.1$ in/s
9–22. $\omega_{\text{leva}} = 20$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 2.0$ in/s
9–28. $\omega_{\text{leva}} = 9.4$ rpm, $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 0.94$ in/s
9–30. $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 1.25$ in/s, $\mathbf{A}_{\text{máx}} = 3.13$ in/s^2
9–32. $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 8.0$ mm/s, $\mathbf{A}_{\text{máx}} = 8.0$ mm/s^2
9–34. $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 189$ mm/s, $\mathbf{A}_{\text{máx}} = 2961$ mm/s^2
9–36. $\mathbf{V}_{\text{máx}} = 1.43$ in/s, $\mathbf{A}_{\text{máx}} = 6.41$ in/s^2
9–62. $\omega_{\text{sal}} = 7.46$ rad/s, $\alpha_{\text{sal}} = 123$ rad/s^2

Capítulo 10

10–2. $p = 0.393$ in
10–4. $D = 84$ mm
10–6. $m_p = 1.53$
10–8. $m_p = 1.47$
10–10. $C = 1.125$ in
10–12. $D_1 = 2$ in, $D_2 = 4.5$ in
10–14. $C = 3.5$ in

10–16. $\mathbf{V}_t = 67.7$ in/s
10–18. $\mathbf{V}_t = 90.3$ in/s
10–20. $N_1 = 24$ dientes, $N_2 = 96$ dientes
10–22. $P_d = 8, N_1 = 16, N_2 = 64$
10–24. $P_d = 4, N_1 = 20, N_2 = 60$
10–26. $P_d = 12$
10–28. $D_1 = 3.0$ in, $D_2 = 13.33$ in
10–30. $D_1 = 2.0$ in, $D_2 = 10.25$ in
10–32. $P_d = 12, D_1 = 4.0$ in, $D_2 = 24.0$ in
10–34. $\Delta\theta = 2.12$ rev
10–36. $\Delta s = 42.4$ in
10–38. $\omega = 10.6$ rpm
10–40. $p^n = 0.28$ in
10–42. $P_d = 7.6, N_1 = 19, N_2 = 38$
10–44. $\gamma_p = 14.9°, \gamma_g = 75.1°$
10–46. $\gamma_p = 10.4°, \gamma_g = 64.6°$
10–48. $P_d = 12, N_w = 2, N_g = 50, \lambda = 5°$
10–50. $\omega_5 = 100$ rpm, sentido hoario $c = 8.5$ in
10–52. $\omega_8 = 30$ rpm, sentido horario; $C = 17.97$ in
10–54. $s_4 = 0.74$ in, $c = 4.625$ in
10–56. $P_d = 8$
10–58. $\omega_1 = 3576$ rpm
10–60. $\omega_1 = 2520$ rpm, $C = 9$ in
10–62. $N = 17-68, 17-68, 18-45, 18-45, 17-34$
10–64. $\Delta\theta_{\text{ventana}} = 8°$ sentido antihorario
10–66. $\Delta\theta_{\text{ventana}} = 10.8°$ sentido antihorario
10–68. $\omega_4 = 2160$ rpm, sentido horario
10–70. $\omega_6 = 536$ rpm, sentido horario
10–72. $\omega_8 = 378$ rpm, sentido antihorario

Capítulo 11

11–2. $\omega_{\text{sal}} = 479$ rpm, sentido horario
11–4. $\omega_{\text{sal}} = 313$ rpm, sentido antihorario
11–6. $\omega_{\text{ent}} = 2700$ rpm, sentido antihorario
11–8. $c = 22.375$ in, $T = 162°$
11–10. $c = 25.618$ in, $\theta = 144°$
11–12. 5V correa
11–14. 3V correa
11–16. 3V correa
11–18. $\omega_{\text{sal}} = 84$ rpm, sentido horario
11–20. $\omega_{\text{ent}} = 760$ rpm, sentido horario
11–22. $c = 48.724$ in, $\theta = 125°$
11–24. $c = 52.424$ in, $\theta = 96°$
11–26. No. 80 cadena
11–28. No. 100 cadena

Capítulo 12

12–2. $p = .0357$ in, $\lambda = 2.87°$
12–4. $p = .020$ in, $\lambda = 3.65°$
12–6. $\Delta\mathbf{R}_{\text{ariete}} = 2.5$ in↑
12–8. $\Delta\mathbf{R}_{\text{mesa}} = 0.154$ in↑
12–10. $\Delta\mathbf{R}_{\text{placa}} = 2.756$ in↓
12–12. $\Delta\mathbf{R}_{\text{plataforma}} = 2.564$ in 29.7°
12–14. $\Delta\mathbf{R}_{\text{extremo}} = 6.445$ in 28.3°
12–16. $\Delta\mathbf{R}_{\text{extremo frontal}} = 0.921$ in 86.7°
12–18. $\mathbf{V}_{\text{ariete}} = 0.167$ in/s↓
12–20. $\mathbf{V}_{\text{mesa}} = 0.154$ in./s↑
12–22. $\mathbf{V}_{\text{plataforma}} = 7.236$ in/s 32.8°
12–34. $e = 26\%$
12–36. $e = 47.2\%$
12–38. $e = 24.5\%$
12–40. M10 × 1.50 y M8 × 1.25

Capítulo 13

13–2. $R = 248$ 66°
13–4. $M = 200$ in lbs, sentido horario
13–6. $M = 188$ in lbs, sentido horario
13–8. $M = 18.9$ Nm, sentido horario
13–10. $\mathbf{F}_{\text{cil}} = 3733$ lbs(C)
13–12. $\mathbf{F}_{\text{metal}} = 868$ N↓
13–14. $\mathbf{F}_{\text{varilla roscada}} = 1200$ lb(C)
13–16. cil. frontal = 2137 lbs(C)
cil. trasero = 7182 lbs(C)
13–18. cil. frontal = 5000 lbs(T)
cil. trasero = 11,110 lbs(C)

Capítulo 14

14–2. $m = 0.14$ slugs
14–4. $I = 0.135$ kg m^2
14–6. $I_x = 31.25$ kg m^2
14–8. $I_z = 1.49$lb ft s^2
14–10. $I_z = 0.166$ kg m^2
14–12. $I_{y\,cg} = 0.00626$ lb in s^2
14–14. $T_{\text{motor}} = 199.49$ in lbs, sentido horario
14–16. $T_{\text{motor}} = 14.04$ Nm, sentido antihorario
14–18. $T_{\text{motor}} = 10.22$ Nm, sentido antihorario
14–20. $\mathbf{F}^i_{cg} = 52.25$ lbs 3.7°
$T^i_{cg} = 132.5$ in lbs, sentido horario
14–22. $\mathbf{F}^i_{cg} = 1377$ N 49.4°
$T^i_{cg} = 19.5$ Nm, sentido antihorario

REFERENCIAS

1. Barton, Lyndon, *Mechanism Analysis: Simplified Graphical and Analytical Techniques*, 2a. ed., Marcel Dekker Inc., Nueva York, 1993.
2. Baumeister, Theodore III, Avallone, Eugene, and Sadegh, Ali, *Mark's Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 11a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2006.
3. Chironis, Nicholas and Sclater, Neil, *Mechanisms and Mechanical Drives Sourcebook*, 4a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2007.
4. Erdman, Aurthur, Sandor, George, and Kota, Sridhar, *Mechanism Design, Vol 1: Analysis and Synthesis*, 4a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
5. Kepler, Harold, *Basic Graphical Kinematics*, 2a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.
6. Jensen, Preben, *Cam Design and Manufacture*, 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1987.
7. Jensen, Preben, *Classical Modern Mechanisms for Engineers and Inventors*, Marcel Dekker, Inc., Nueva York, 1991.
8. Jones, Franklin, Holbrook, Horton, and Newell, John, *Ingenious Mechanisms for Designers and Inventors, Vols. I–IV*, Industrial Press Inc, Nueva York, 1930.
9. Mabie, Hamilton and Reinholtz, Charles, *Mechanisms and Dynamics of Machinery*, 4a. ed., John Wiley and Sons Inc., Nueva York, 1987.
10. Martin, George, *Kinematics and Dynamics of Machines*, 2a. ed., Waveland Press Inc., Long Groove, IL, 2002.
11. Norton, Robert, *Design of Machinery*, 4a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2008.
12. Uicker, John, Pennock, Gordon, and Shigley, Joseph, *Theory of Machines and Mechanisms*, 4a. ed., Oxford University Press, Nueva York, 2010.
13. Townsend, Dennis and Dudley, Darle, *Dudley's Gear Handbook*, 2a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1991.
14. Waldron, Kenneth and Kinzel, Gary, *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*, 2a. ed., John Wiley and Sons Inc., Hoboken, NJ, 2004.
15. Wilson, Charles and Sadler, Peter, *Kinematics and Dynamics of Machinery*, 3a. ed., Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, 2003.
16. *Working Model Demonstration Guide*, Knowledge Revolution Inc., San Mateo, CA, 1995.

ÍNDICE ANALÍTICO

H

I

L

M

N

P





MÁQUINAS Y MECANISMOS

Cuarta edición

David H. Myszka

El propósito de este libro es ofrecer las técnicas necesarias para estudiar el movimiento de las máquinas. El texto se enfoca en la aplicación de teorías cinemáticas a maquinaria del mundo real, por lo que intenta cerrar la brecha entre el estudio teórico de la cinemática y la aplicación a mecanismos prácticos. Los temas que se presentan en esta obra son fundamentales en el proceso de diseño de máquinas.

Entre las características distintivas de este libro destacan:

- Ilustraciones y bocetos de máquinas que incluyen los mecanismos estudiados en el texto.
- Uso de métodos analíticos y técnicas gráficas en el análisis de los mecanismos.
- Ejercicios en Working Model®, un paquete de software dinámico disponible comercialmente.
- Sugerencias para implementar las técnicas gráficas de sistemas de diseño asistidos por computadora (CAD).

El libro hace énfasis en los estudios de caso, lo cual ofrece una excelente oportunidad para centrar la atención en el funcionamiento de las máquinas.

Para mayor información visite la página Web de este libro:

www.pearsonenenespañol.com/myszka

